Автоматика и телемеханика, № 2, 2019

Стохастические системы

© 2019 г. **Е.С. ПАЛАМАРЧУК, канд. физ.-мат. наук (e.palamarchuck@gmail.com)**
(Национальный исследовательский университет
"Высшая школа экономики", Москва;
Центральный экономико-математический институт РАН, Москва)

О ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ С НЕОГРАНИЧЕННОЙ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ НЕУСТОЙЧИВОЙ МАТРИЦЕЙ СОСТОЯНИЯ[1]

Рассматривается задача управления на бесконечном интервале времени линейной стохастической системой с неустойчивой асимптотически неограниченной матрицей состояния. Понятие антиустойчивости матрицы обобщается на случай неэкспоненциальной антиустойчивости, и вводится функция темпа антиустойчивости как характеристика роста нормы соответствующей фундаментальной матрицы. Показывается, что линейный установившийся закон управления является оптимальным по критерию скорректированного обобщенного долговременного среднего. Построенный критерий в явном виде включает информацию о темпе антиустойчивости и параметрах возмущающего процесса. Проводится анализ условий оптимальности.

Ключевые слова: стохастический линейно-квадратический регулятор, антиустойчивость, неустойчивость, суперэкспоненциальный рост, уравнение Риккати.

DOI: 10.1134/S0005231019020041

1. Введение

Стабилизация неустойчивых систем относится к числу важных задач, решаемых в теории управления [1–7]. Требование к свойству устойчивости как независящему от конкретного горизонта приводит к рассмотрению постановок на бесконечном временнóм интервале. Для линейных систем возможность стабилизации и наличие приводящего к стабилизации оптимального управления напрямую связаны с характером изменения коэффициентов систем. Стандартным предположением при этом является ограниченность параметров по времени, см. [1] и [8, с. 267]. Тем не менее существуют примеры систем см., например, [9–13], не удовлетворяющих указанному выше условию, что порождает необходимость отдельного исследования соответствующих ситуаций. Далее описывается система управления, рассматриваемая в данной статье.

[1] Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 17-11-01098) в Национальном исследовательском университете "Высшая школа экономики".

Пусть на полном вероятностном пространстве $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}\}$ задан n-мерный случайный процесс $X_t = X_t(\omega)$, $t \geqslant 0$, $\omega \in \Omega$, описываемый уравнением

$$dX_t = A_t X_t dt + B_t U_t dt + G_t dw_t, \quad X_0 = x, \tag{1}$$

где начальное состояние x неслучайно; $w_t = w_t(\omega)$, $t \geqslant 0$, — d-мерный стандартный винеровский процесс; $U_t = U_t(\omega)$ — управление или k-мерный случайный процесс; A_t, B_t, G_t, $t \geqslant 0$, — детерминированные матричные функции времени таких размеров, при которых (1) имеет смысл. В качестве допустимых управлений $U_t = U_t(\omega)$ рассматриваются случайные процессы, согласованные с фильтрацией $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$, $\mathcal{F}_t = \sigma\{w_s,\, s \leqslant t\}$ ($\sigma(\cdot)$ — знак σ-алгебры), такие, что уравнение (1) имеет решение и при этом $U_t(\omega)$ – с вероятностью единица квадратично интегрируем, т.е. $\int_0^t \|U_s(\omega)\|^2\, ds < \infty$ почти наверное для любого $t \geqslant 0$ ($\|\cdot\|$ – евклидова норма). Множество допустимых управлений обозначим через $\mathcal{U}$. Вводимые в дальнейшем переменные, являющиеся функциями времени t и характеризующие элементы системы управления, будут пониматься как неслучайные, если это не оговорено особо, как это было сделано для процессов $X_t = X_t(\omega)$, $w_t = w_t(\omega)$ и $U_t = U_t(\omega)$. При этом также полагаем, что $\int_0^\infty \|G_t\|^2\, dt > 0$, матрица B_t – ограничена; матрица A_t является неограниченной на бесконечности, т.е. $\|A_t\| \to \infty$ при $t \to \infty$. Важно подчеркнуть, что основное предположение относительно матрицы состояния A_t касается отсутствия у нее свойства асимптотической устойчивости. Также известно, см. [14–16], что для матриц с зависящими от времени элементами наряду с экспоненциальной устойчивостью рассматривается и более общее понятие устойчивости с переменным темпом δ_t. Сформулируем необходимые в данном случае определения.

Определение 1 (см. [16]). *Матрица $\bar{A}_t$ является устойчивой с темпом δ_t, если существует функция $\delta_t > 0$, при $t \geqslant 0$, $\lim_{t\to\infty} \int_0^t \delta_v\, dv \to \infty$, такая что $\limsup_{t\to\infty} (\|\bar{A}_t\|/\delta_t) < \infty$, и для фундаментальной матрицы $\bar{\Phi}(t,s)$, соответствующей $\bar{A}_t$, справедлива оценка $\|\bar{\Phi}(t,s)\| \leqslant \kappa \exp\{-\int_s^t \delta_v\, dv\}$, $0 \leqslant s \leqslant t$, с некоторой константой $\kappa > 0$. Если $\delta_t \equiv \mathrm{const}$, то устойчивость – экспоненциальная, при $\delta_t \to 0$ – субэкспоненциальная и при $\delta_t \to \infty$ – суперэкспоненциальная, где $t \to \infty$.*

Следующее определение выступает естественным обобщением известного понятия экспоненциальной антиустойчивости, см. [17].

Определение 2. Матрица $\mathcal{A}_t$ называется антиустойчивой с темпом δ_t (или δ_t-антиустойчивой), если матрица $\bar{A}_t = -\mathcal{A}'_t$ ($'$ – знак транспонирования) является устойчивой с темпом δ_t. При этом экспоненциальная, субэкспоненциальная или суперэкспоненциальная антиустойчивости характеризуются в соответствии с определением 1.

Далее приводятся основные предположения относительно параметров системы (1), в рамках которых будут получены основные утверждения статьи.

Предположение $\mathcal{A}$. Матрица A_t является суперэкспоненциально антиустойчивой с темпом δ_t, при этом δ_t – неубывающая дифференцируемая функция, $t \geqslant 0$, и $\lim_{t\to\infty}(\dot{\delta}_t/\delta_t^2) = 0$ (знак $\dot{}$ – производная функции по времени).

Предположение $\mathcal{B}$. Матрица B_t такая, что $B_tB_t' \geqslant bI$ при $t \geqslant 0$, где $b > 0$ – некоторая константа (запись $A \geqslant B$ для матриц означает, что разность $A - B$ неотрицательно определена).

Условия в предположениях $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ более подробно обсуждаются в разделе 2.

Для каждого $T > 0$ в качестве целевого функционала определи́м случайную величину $J_T(U)$:

$$J_T(U) = \int_0^T (X_t'Q_tX_t + U_t'R_tU_t)dt, \tag{2}$$

где $U \in \mathcal{U}$ – допустимое управление на интервале $[0, T]$; $Q_t \geqslant qI$, $R_t \geqslant \rho I$, $t \geqslant 0$, – ограниченные симметричные матрицы, q, ρ – некоторые положительные константы. Необходимо отметить, что под стабилизацией системы (в широком смысле) может пониматься поддержание траектории ее развития вблизи заданного уровня в течение планового периода путем выбора управляющих воздействий, см., например, [18, ч. 3]. Рассмотрение такого подхода также объясняет использование (2) при оценке качества управления. Действительно, (2) измеряет совокупные потери, возникающие из-за отклонения X_t от нулевого состояния и, кроме того, учитывает издержки применения соответствующей стратегии.

Далее требуется сформулировать задачу управления, включающую оптимизацию $\mathrm{E}J_T(U)$ при $T \to \infty$ ($\mathrm{E}(\cdot)$ – оператор взятия математического ожидания), что возможно сделать, подобрав подходящую нормировку ожидаемого значения целевого функционала, и тогда соответствующее оптимальное управление называется оптимальным в среднем на бесконечном интервале времени. Основываясь на известных результатах [8, с. 306; 19–21], можно ожидать, что получаемая таким образом стратегия будет иметь форму оптимального установившегося закона [8], определяемого на основе решения уравнения Риккати, и при этом будет стабилизировать систему. В данном случае проблема стабилизации рассматривается в контексте, специфичном для линейных стохастических систем управления с аддитивным шумом, который не зависит от состояния или управления. Оптимальная стратегия призвана обеспечивать стабилизацию долгосрочных потерь в смысле минимизации роста ожидаемого значения целевого функционала (2), характеристику данного подхода см., например, в [22, гл. 3]. С учетом изложенного цель данной статьи – нахождение управления, являющегося решением задачи

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{\mathrm{E}J_T(U)}{\int_0^T \delta_t \|G_t\|^2\, dt} \to \inf_{U\in\mathcal{U}}, \tag{3}$$

где δ_t – функция, задающая темп антиустойчивости матрицы A_t из уравнения динамики состояния (1), см. предположение $\mathcal{A}$. Методика построения критерия в (3) и необходимая аргументация будут даны в разделе 3. В разделе 3 также приводятся дополнительные условия на коэффициенты, гарантирующие возможность достижения устойчивости траекторий в стохастической системе посредством применения управления, которое выступает решением (3). Статья организована следующим образом. В разделе 2 проводится обсуждение приведенных ранее предположений на параметры системы. В разделе 3 формулируется основной результат о существовании управления U^* в форме линейного установившегося закона, являющегося решением задачи (3) с соответствующим критерием, который относится к типу скорректированных обобщенных долговременных средних. Также показывается, что U^* будет стабилизирующим управлением в детерминированной системе. Раздел 4 посвящен анализу технического условия, необходимого для установления оптимальности U^*, и примерам. Заключение содержит основные выводы и описание возможных направлений дальнейших исследований.

2. Об основных предположениях на параметры

Обсудим сформулированные ранее предположения на параметры системы управления (1)–(2). Основное внимание уделим специфике предположений $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$. При этом предположение $\mathcal{A}$ касается свойств неограниченной на бесконечности матрицы A_t в (1) и связано с определениями 1 и 2. В определении 1 функция δ_t задает темп убывания верхней оценки нормы фундаментальной матрицы (при фиксированном s), выступает в качестве характеристики асимптотической устойчивости и носит название темпа устойчивости. Экспоненциальная устойчивость имеет место для $\delta_t \equiv \text{const}$. Если $\delta_t \to 0$ при $t \to \infty$, то возникает субэкспоненциальный тип устойчивости, а при $\delta_t \to \infty$ – суперэкспоненциальный, данная терминология была введена в [14]. Для неограниченных матриц определение понятия суперэкспоненциальной устойчивости позволяет дать более полную характеристику поведения решений соответствующих линейных уравнений, так как в данном случае экспоненциально убывающая верхняя оценка с произвольным постоянным темпом (соответствующая экспоненциальной устойчивости) оказывается неинформативной, как отмечалось в [1]. В этой связи суперэкспоненциально устойчивые матрицы также естественно будет назвать суперустойчивыми или сверхустойчивыми, см. [19]. Для неустойчивых матриц приведенные в определении 1 требования не выполняются. В частности, возможно асимптотически неограниченное возрастание нормы фундаментальной матрицы. В целях уточнения характера неустойчивости используется понятие антиустойчивости, связанное с теорией операторов, см., например, [17, с. 11]. Обращаясь далее к соответствующему определению 2, нетрудно заметить, что экспоненциальная антиустойчивость соответствует $\delta_t \equiv \text{const}$ определения 2, если $\delta_t \to 0$ имеем субэкспоненциальную антиустойчивость, а при $\delta_t \to \infty$ матрица $\mathcal{A}_t$ является суперэкспоненциально антиустойчивой. Суперэкспоненциальную антиустойчивость также можно охарактеризовать как сверхнеустойчивость. Действительно, воспользовавшись фактом, что фундаментальная матрица $\Phi(t,s)$ для $\mathcal{A}_t$ является решением задачи

$$\frac{\partial \Phi(t,s)}{\partial t} = \mathcal{A}_t \Phi(t,s), \quad \Phi(s,s) = I,$$

где I – единичная матрица, $\bar{\Phi}(t,s) = \Phi'(s,t)$, при этом $\bar{\Phi}(t,s)$ задается для $\bar{\mathcal{A}}_t = -\mathcal{A}'_t$ ($\Phi(s,t) = \Phi^{-1}(t,s)$, см. также [17, с. 2]), нетрудно заметить, что следствием приведенной в определении 1 верхней оценки будет являться суперэкспоненциально растущая нижняя граница по параметру t для $\Phi(t,s)$ при фиксированном $s \geqslant 0$:

$$\|\Phi(t,s)\| \geqslant (1/\kappa)\exp\left\{\int\limits_s^t \delta_v\,dv\right\}, \quad 0 \leqslant s \leqslant t.$$

Очевидно, что любая антиустойчивая матрица является также неустойчивой, но обратное неверно. Предположим, что рассматриваются матрицы 2×2:

$$\mathcal{A}_t^{(1)} = (2t\;0\,;\;0\;-2t), \quad \mathcal{A}_t^{(2)} = (2t\;0\,;\;0\;2t)\ (;\ –\ \text{разделитель строк}),$$
$$\|\mathcal{A}_t^{(1)}\| = \|\mathcal{A}_t^{(2)}\| = 2\sqrt{2}t.$$

При этом

$$\Phi^{(1)}(t,s) = \left(\exp(t^2-s^2)\;0\,;\;0\;\exp(-t^2+s^2)\right),$$
$$\Phi^{(2)}(t,s) = \left(\exp(t^2-s^2)\;0\,;\;0\;\exp(t^2-s^2)\right)$$

и $\|\Phi^{(1)}(t,s)\| \to \infty$, $\|\Phi^{(2)}(t,s)\| \to \infty$, если $t \to \infty$, т.е. обе матрицы неустойчивы. Однако если взять $\bar{\mathcal{A}}_t^{(1)} = -(\mathcal{A}_t^{(1)})'$ и $\bar{\mathcal{A}}_t^{(2)} = -(\mathcal{A}_t^{(2)})'$, то

$$\bar{\mathcal{A}}_t^{(1)} = (-2t\;0\,;\;0\;2t), \quad \bar{\mathcal{A}}_t^{(2)} = (-2t\;0\,;\;0\;-2t),$$

тогда $\bar{\Phi}^{(1)}(t,s) = (\exp(-t^2+s^2)\;0\,;\;0\;\exp(t^2-s^2))$, что также соответствует неустойчивой матрице, а $\bar{\Phi}^{(2)}(t,s) = (\exp(-t^2+s^2)\;0\,;\;0\;\exp(-t^2+s^2))$ будет характеризовать суперэкспоненциальную устойчивость. Таким образом, из двух неустойчивых матриц $\mathcal{A}_t^{(1)}$ и $\mathcal{A}_t^{(2)}$ матрица $\mathcal{A}_t^{(2)}$ – антиустойчива, а $\mathcal{A}_t^{(1)}$ – не антиустойчива.

Введенное предположение $\mathcal{B}$ задает условия, предъявляемые к матрице B_t, которая характеризует вклад управляющего воздействия в динамику состояния системы. Как будет показано далее, предположение $\mathcal{B}$ обеспечит возможность суперэкспоненциальной стабилизации линейной детерминированной системы, т.е. найдется кусочно-непрерывная матрица K_t, такая что матрица $A_t + B_tK_t$ будет суперэкспоненциально устойчивой. Построение законов управления в виде обратной связи по состоянию является распространенным подходом, применяемым для стабилизации не только линейных [1, 3, 7, гл. 6], но также и нелинейных систем, см. [2, 23]. Необходимо отметить ряд особенностей рассматриваемой системы (1), не позволяющих использовать предложенные ранее методы. Во-первых, ситуация $\|A_t\| \to \infty$ при $t \to \infty$ находится за пределами случаев стабилизируемости автономных систем и систем с ограниченными коэффициентами, например, [1, 3]. Во-вторых, требование суперэкспоненциальной стабилизации с возможностью $\|K_t\| \to \infty$ при $t \to \infty$ не удовлетворяет ключевым предположениям, сформулированным для систем с $\|A_t\| \to \infty$ в [5, 6, 24]. Также необходимо отметить, что стандартное условие, достаточное для стабилизируемости систем с ограниченными коэффициентами, а именно – управляемость пары матриц (A_t, B_t), см. [1], в случае $\|A_t\| \to \infty$ при $t \to \infty$ может обеспечить лишь неравномерную по времени стабилизацию (тогда в определении 1 $\kappa = \kappa(s)$ является функцией s и $\kappa(s) \to \infty$ для $s \to \infty$), как было показано в [13, 15]. Вследствие этого в рассматриваемой ситуации относительно параметров системы и формулируется предположение $\mathcal{B}$.

3. Основные результаты

Как отмечалось в [19], определение оптимального в среднем управления U^* на бесконечном интервале времени осуществляется посредством нахождения решения задачи вида

$$\limsup_{T\to\infty} \mathrm{E}\mathcal{K}_T(U) \to \inf_{U\in\mathcal{U}}, \tag{4}$$

где $\mathrm{E}\mathcal{K}_T(U)$ – математическое ожидание некоторого функционала $\mathcal{K}_T(U)$, зависящего от допустимого управления $U \in \mathcal{U}$ и длины интервала планирования T. В качестве примера можно привести известный критерий долговременного среднего $\mathrm{E}\mathcal{K}_T(U) = \mathrm{E}J_T(U)/T$ для (1)–(2) с ограниченными коэффициентами, который затем обобщался и корректировался в [19, 20, 25], в направлении уточнения нормировки $\mathrm{E}J_T(U)$ и отражения специфики факторов, влияющих на динамику систем. Определенный в данном исследовании критерий, см. (3), также относится к классу долговременных средних. Отметим, что при построении критерия в (4) и его последующем анализе используется подход (подробную характеристику см. также в [19]), основанный на определении установившегося закона управления $U_t^* = -R_t^{-1}B_t'\Pi_t X_t^*$, структура которого содержит решение уравнения Риккати (при условии, что оно существует):

$$\dot{\Pi}_t + \Pi_t A_t + A_t'\Pi_t - \Pi_t B_t R_t^{-1} B_t'\Pi_t + Q_t = 0. \tag{5}$$

Под решением (5) понимается такая функция Π_t, которая при подстановке в (5) дает верное равенство. В [19, 21, 26] указывалось, что подходящая нормировка ожидаемого значения функционала $\mathrm{E}J_T(U)$ для критерия в (4) включает оценку изменения Π_t, применяемую затем для корректировки дисперсии интегральных шумовых воздействий $\int_0^T \|G_t\|^2\,dt$. В частности, в [19] было установлено, что $\limsup_{t\to\infty}(\|\Pi_t\|\delta_t) < \infty$, где δ_t – найденный темп устойчивости, что способствовало введению критерия скорректированного обобщенного долговременного среднего с

$$\mathrm{E}K_T(U) = \mathrm{E}J_T(U)\Big/\int_0^T (1/\delta_t)\|G_t\|^2\,dt.$$

Для случая системы управления (1)–(2) при условии выполнения предположений $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ соответствующее исследование, касающееся уравнения Риккати и определения критерия, проводится далее, а затем доказывается оптимальность U^* с точки зрения построенного критерия. В следующем утверждении устанавливается существование симметричного неотрицательно определенного решения уравнения Риккати (5), оценивается порядок его изменения и определяются стабилизирующие свойства линейного закона управления $u_t = -R_t^{-1}B_t'\Pi_t x_t$ в детерминированной системе $dx_t = A_t x_t dt + B_t u_t dt$.

Лемма. Пусть выполнены предположения $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$. Тогда существует абсолютно непрерывная функция Π_t, $t \geqslant 0$, с значениями в множестве неотрицательно определенных симметричных матриц, удовлетворяющая уравнению Риккати (5), *при этом $c_1\delta_t I \leqslant \Pi_t \leqslant c_2\delta_t I$, где $c_1, c_2 > 0$ – некоторые константы. Матрица $A_t - B_t R_t^{-1} B_t'\Pi_t$ является $\tilde{\delta}_t$-суперэкспоненциально устойчивой с $\tilde{\delta}_t = \lambda\delta_t$, где δ_t – темп антиустойчивости матрицы A_t, а λ – некоторая положительная константа.*

Доказательства леммы и последующих утверждений вынесены в Приложение.

Замечание 1. В условиях леммы функция $\Pi_t \geqslant 0$ при $t \geqslant 0$, удовлетворяющая (5), может быть получена как предел при $T \to \infty$ решений Π_t^T уравнения (5) с граничным условием $\Pi_T^T = 0$ (здесь верхний индекс ^{T} обозначает решение уравнения при граничном условии), т.е. $\lim_{T\to\infty} \Pi_t^T = \Pi_t$. Для систем с ограниченными коэффициентами данный факт хорошо известен, см. [8, теорема 3.5, с. 267], а в рассматриваемом случае справедливость такого предельного перехода устанавливается при доказательстве леммы.

При исследовании оптимальности установившегося закона управления U^* в стохастической системе потребуется следующее техническое условие, связывающее допустимые матрицу диффузии G_t и темп антиустойчивости δ_t:

Предположение $\mathcal{G}$.

$$\lim_{T\to\infty} \frac{\delta_T^2 \|G_T\|^2}{\int\limits_0^T \delta_t \|G_t\|^2\, dt} = 0. \tag{6}$$

Для характеристики оптимальности U^* также будет использован подход, при котором происходит сравнение ненормированных значений целевых функционалов при разных управлениях, основанный на понятии опережающей оптимальности (так называемой overtaking оптимальности, см., напр., [20])

Определение 3 (см. [20]). *Управление $U^* \in \mathcal{U}$ обладает свойством опережающей оптимальности в среднем (опережающе оптимально в среднем) на бесконечном интервале времени, если для любого числа $\epsilon > 0$ существует $T_0 > 0$, такое что при произвольном допустимом управлении $U \in \mathcal{U}$ выполнено неравенство*

$$\mathrm{E}J_T(U^*) < \mathrm{E}J_T(U) + \epsilon \ \text{ для любого } T > T_0. \tag{7}$$

Основной результат статьи содержится в следующем утверждении.

Теорема. Пусть выполнены предположения $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$. Тогда закон управления вида

$$U_t^* = -R_t^{-1} B_t' \Pi_t X_t^*, \tag{8}$$

где процесс X_t^*, $t \geqslant 0$, задается уравнением

$$dX_t^* = (A_t - B_t R_t^{-1} B_t' \Pi_t) X_t^* dt + G_t dw_t, \quad X_0^* = x, \tag{9}$$

является решением задачи

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{EJ_T(U)}{\int\limits_0^T \delta_t \|G_t\|^2 \, dt} \to \inf_{U\in\mathcal{U}}. \tag{10}$$

При этом матричная функция $\Pi_t \geqslant 0$ при $t \geqslant 0$ удовлетворяет уравнению Риккати (5) *и обладает свойствами, сформулированными в лемме. Значение критерия на оптимальном управлении $J^* = \limsup_{T\to\infty} \frac{\mathrm{E}J_T(U^*)}{\int_0^T \delta_t \|G_t\|^2 \, dt}$ является конечным положительным числом*:

$$0 < J^* = \limsup_{T\to\infty} \frac{\int\limits_0^T \mathrm{tr}(G_t' \Pi_t G_t) \, dt}{\int\limits_0^T \delta_t \|G_t\|^2 \, dt} < \infty,$$

где δ_t – темп антиустойчивости матрицы A_t, $\mathrm{tr}(\cdot)$ – след матрицы. Кроме того, если $\|G_t\|\delta_t \to 0$, $t \to \infty$, то управление U^* также является опережающе оптимальным в среднем на бесконечном интервале времени.

Замечание 2. Для детерминированной системы управления ($G_t \equiv 0$) при условии выполнения предположений $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ стратегия U^* будет являться решением задачи $\limsup_{T\to\infty} J_T(U) \to \inf_{U\in\mathcal{U}}$, а значение $\limsup_{T\to\infty} J_T(U^*) = x'\Pi_0 x$.

Критерий в (10) также можно отнести к критериям скорректированного обобщенного долговременного среднего, см. [19, 21]. В отличие от случая систем управления с субэкспоненциально [21] и суперэкспоненциально [19] устойчивыми матрицами состояния корректировка осуществляется в сторону увеличения нормировки ожидаемого значения целевого функционала (домножение $\|G_t\|^2$ на δ_t в подынтегральном выражении (10)).

Замечание 3. По результатам, содержащимся в утверждениях леммы и теоремы, можно сделать вывод о том, что оптимальное управление U^* является стабилизирующим для детерминированной системы (см. лемму), а в стохастической системе такое управление U^* стабилизирует рост ожидаемого значения целевого функционала при $T \to \infty$, которое не превышает величину $\int_0^T \delta_t \|G_t\|^2 \, dt$ с точностью до мультипликативной константы. При этом возможность стабилизации управлением U^* соответствующей оптимальной траектории X_t^*, $t \geqslant 0$, будет зависеть от поведения матрицы диффузии G_t. На основании результатов из [16] для устойчивости процесса в среднем квадратичном, т.е. $\mathrm{E}\|X_t^*\|^2 \to 0$ при $t \to \infty$, см. [27, с. 171], достаточно потребовать $\|G_t\|^2/\delta_t \to 0$, $t \to \infty$, что, в частности, выполняется при использовании опережающе оптимальной стратегии U^* (см. условие в теореме) или же ограниченной матрицы диффузии G_t. В рамках более сильного условия

$(\|G_t\|^2/\delta_t)\ln(\int_0^t \delta_v\,dv) \to 0$, $t\to\infty$, также см. [16], для траектории имеет место стохастическая устойчивость с вероятностью единица по определению из [28, с. 111], когда $\|X_t^*(\omega)\| \to 0$ почти наверное при $t\to\infty$, т.е. для почти всех $\omega\in\Omega$. Приведенная характеристика X_t^* представляет существенное отличие по сравнению с поведением оптимальной траектории для стохастических линейных регуляторов, в которых шум зависит от состояния или управления (т.е. когда в (1) вместо $G_t dw_t$ возмущения имеют форму $X_t' G_t dw_t$ или $U_t' G_t dw_t$). В таких системах мультипликативный характер случайных воздействий естественным образом порождает стабилизирующие свойства соответствующей оптимальной стратегии управления, см. [27, гл. 8].

4. Анализ условий оптимальности и примеры

Проанализируем техническое условие (6), при выполнении которого справедливо основное утверждение теоремы. Введя обозначение

$$\Gamma_T = \int_0^T \delta_t \|G_t\|^2\,dt,$$

(6) можно переписать в виде

$$\lim_{T\to\infty} \frac{d\Gamma_T/dT}{\Gamma_T}\delta_T = 0. \tag{11}$$

Таким образом, (6) означает, что рост нормировки критерия должен быть достаточно медленным по отношению к функции δ_t, характеризующей антиустойчивость матрицы состояния. Как видно из (11), необходимым условием здесь будет являться стремление к нулю темпа изменения Γ_T. С другой стороны, если положить $\tilde G_t = \delta_t G_t$ (“усилить” матрицу возмущений), то (6) примет вид

$$\lim_{T\to\infty} \frac{\|\tilde G_T\|^2}{\int_0^T (1/\delta_t)\|\tilde G_t\|^2\,dt} = 0. \tag{12}$$

Знаменатель в (12) совпадает с нормировкой критерия для систем с суперэкспоненциально устойчивой матрицей состояния и матрицей диффузии $\tilde G_t$, см. [19]. Далее рассмотрим систему с ограниченной A_t и предположим, что для такой системы существует оптимальный установившийся закон управления $\bar U_t^*$. Как известно (см. [20]), оптимальность $\bar U^*$ в соответствующей стохастической системе с матрицей возмущений $\tilde G_t$ может исследоваться при помощи понятия g-оптимальности в среднем на бесконечном интервале времени, которая имеет место в случае, когда $\limsup_{T\to\infty} g_T(\mathrm{E}J_T(\bar U^*) - \mathrm{E}J_T(U)) \leqslant 0$ для любого $U\in\mathcal U$ при заданной функции $g_T>0$, $T>0$. Данный подход позволяет оценить порядок изменения разности математических ожиданий целевых функционалов в отличие от долговременных средних, сравнивающих предельные (при $T\to\infty$) нормированные значения $\mathrm{E}J_T(U)$. В частности, функция $g_T = 1/\int_0^T \|\tilde G_t\|^2\,dt$ является нормировкой в критерии обобщенного долговременного среднего, см. [20, 29]. Тогда выполнение (12) будет означать, что в стандартной стохастической системе с матрицей $\tilde{G}_t$ имеет место g-оптимальность с более медленно растущей нормирующей функцией $g_T = 1/\int_0^T (1/\delta_t)\|\tilde{G}_t\|^2\,dt$, взятой из критерия для суперустойчивых систем.

В следующем далее примере показывается, что (6) допускает включение в анализ систем управления с различным характером изменения параметров возмущений во времени.

Пример 1. Рассмотрим случай $\|G_t\|^2 \sim 1/\delta_t^m$, где m – вещественное число (знак $\sim$ используется для указания на асимптотически одинаковый порядок изменения двух функций: $f_t \sim g_t$, если $\lim_{t\to\infty}(f_t/g_t) = c \neq 0$). Ситуация $m = 0$ соответствует постоянной матрице диффузии, для $m > 0$ имеем так называемые затухающие возмущения, а при $m < 0$ – нарастающие.

а) $m > 2$: в этом случае $\|G_t\|^2\delta_t^2 \to 0$, $t \to \infty$, т.е выполняется более сильное условие, чем (6), приводящее к опережающей оптимальности в среднем на бесконечном интервале времени;

б) $m = 2$: условие (6) выполнено при $\lim_{t\to\infty}\int_0^t (1/\delta_s)\,ds \to \infty$, т.е. есть возможность рассматривать только достаточно медленно растущие функции темпа антиустойчивости, например $\delta_t \sim t^k$, $0 < k \leqslant 1$;

в) $m < 2$, $m \neq 1$: соотношение (6) имеет место при условии $\dot{\delta}_t \to 0$, $t \to \infty$, т.е. вновь допустимыми оказываются медленно растущие функции δ_t, например $\delta_t \sim \ln t$;

г) $m = 1$: выполнение (6) обеспечивается, если $\delta_t/t \to 0$, $t \to \infty$, когда темп антиустойчивости растет медленнее линейной функции, в частности для $\delta_t \sim t^k$, $0 < k < 1$.

В качестве иллюстрации применения основного утверждения, полученного в данной статье (теоремы), рассматривается следующий пример 2.

Пример 2. Система управления скалярным процессом, см. (1)–(2) при $n = 1$, имеет вид: $dX_t = (t+1)X_t dt + \sqrt{2}U_t dt + (t+1)^{-1}dw_t$, $X_0 = 1$, $J_T(U) = \int_0^T [X_t^2 + (t+1)^2((t+1)^2+1)^{-1}U_t^2]dt$. При этом $A_t = t+1$, $B_t = \sqrt{2}$, $G_t = 1/(t+1)$, $x = 1$, $Q_t = 1$, $R_t = (t+1)^2((t+1)^2+1)^{-1}$ (также $1/2 \leqslant$ $\leqslant R_t \leqslant 1$). Нетрудно заметить, что коэффициенты системы удовлетворяют сделанным ранее предположениям: $A_t = t+1$ суперэкспоненциально антиустойчива с темпом $\delta_t = t+1$, $B_t' B_t = 2 > 0$. В данном случае уравнение Риккати (5) принимает вид

$$\dot{\Pi}_t + 2(t+1)\Pi_t - 2(1+(t+1)^{-2})\Pi_t^2 + 1 = 0 \tag{13}$$

и имеет решение со свойствами, определенными в лемме. Действительно, $\Pi_t = t+1$ будет являться решением (13). Функция Π_t также может быть получена (см. замечание 1) как предел $\lim_{T\to\infty}\Pi_t^T = \Pi_t$, где

$$\Pi_t^T = (t+1)\left[1 + 0{,}5(Z(T,t)-2)^{-1}\right],$$

$$Z(T,t) = \exp\left\{-(t+1)^2\right\}\frac{[\Psi_T - \Psi_t]}{(t+1)^3} +$$

$$+ \exp\left\{(T+1)^2 - (t+1)^2\right\}\frac{[1-(T+1)(t+1)^{-1}]}{(t+1)^2}$$

с

$$\Psi_x = \int \exp\{-(x+1)^2\}\, dx.$$

При этом $A_t - B_t R_t^{-1} B_t' = -(t+1) - 2(t+1)^{-1}$ суперэкспоненциально устойчива с темпом $\tilde{\delta}_t = t+1$. Далее, функция $G_t = 1/(t+1)$ удовлетворяет предположению $\mathcal{G}$ (см. также п. б примера 1), $\int_0^T \delta_t G_t^2\, dt = \ln(T+1)$, следовательно, по теореме 1 закон управления $U_t^* = -\sqrt{2}[(t+1) + (t+1)^{-1}]X_t^*$, с динамикой процесса

$$dX_t^* = \left[-(t+1) - 2(t+1)^{-1}\right] X_t^* dt + (t+1)^{-1} dw_t, \quad X_0^* = 1,$$

является решением задачи

$$\limsup_{T\to\infty} \{EJ_T(U)/\ln(T+1)\} \to \inf$$

и значение $J^* = 1$, так как $\int_0^T \Pi_t G_t^2\, dt = \ln(T+1)$.

5. Заключение

В стьтье рассмотрена задача управления на бесконечном интервале времени линейной стохастической системой с суперэкспоненциально антиустойчивой (т.е. сверхнеустойчивой) матрицей A_t в уравнении состояния. Такая сверхнеустойчивость означает, что нижняя граница для нормы соответствующей фундаментальной матрицы растет по экспоненте с неограниченным темпом δ_t, $\delta_t \to \infty$, при $t \to \infty$. Показано, что закон управления (8)–(9) в виде линейной обратной связи по состоянию является решением задачи (10) с критерием скорректированного обобщенного долговременного среднего (см. теорему). Построенный критерий содержит нормированное ожидаемое значение квадратичного целевого функционала. Нормирующая функция $\Gamma_T = \int_0^T \delta_t \|G_t\|^2\, dt$ представляет собой сумму дисперсий компонент вектора $\mathcal{Z}_T = \int_0^T \sqrt{\delta_t} G_t\, dw_t$ интегральных усиленных шумовых воздействий на систему. В отличие от ранее изученного случая δ_t-суперэкспоненциально устойчивой матрицы A_t, см. [19], где была определена нормировка $\int_0^T (1/\delta_t)\|G_t\|^2\, dt$, в рассматриваемой ситуации темп антиустойчивости δ_t увеличивает значение Γ_T.

В качестве направления дальнейших исследований следует выделить рассмотрение задач с более сильными (в вероятностном смысле) критериями оптимальности, когда в (4) происходит минимизация не средних значений, а самих нормированных целевых функционалов как случайных величин в системах с суперустойчивыми или сверхнеустойчивыми матрицами состояния.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы. Положим $\tilde{\Pi}_t = \Pi_t/\delta_t$ и рассмотрим уравнение Риккати для функции $\tilde{\Pi}_t$:

$$\dot{\tilde{\Pi}}_t + \tilde{\Pi}_t \tilde{A}_t + \tilde{A}_t' \tilde{\Pi}_t - \tilde{\Pi}_t B_t (R_t/\delta_t)^{-1} B_t' \tilde{\Pi}_t + Q_t/\delta_t = 0, \tag{П.1}$$

где $\tilde{A}_t = A_t + (1/2)(\dot{\delta}_t/\delta_t)I$. Уравнение вида (П.1) возникает в системе управления

$$dx_t = \tilde{A}_t x_t dt + B_t u_t dt, \quad x_{t_0} = \tilde{x}, \quad J_{T,t_0}(u) = \int\limits_{t_0}^{T} (1/\delta_t)(x_t' Q_t x_t + u_t' R_t u_t)\, dt$$

с суперэкспоненциально антиустойчивой матрицей $\tilde{A}_t$, $\tilde{x}$ — произвольный вектор начального состояния, $t_0 \geqslant 0$ — фиксированный момент времени. При этом темп антиустойчивости $\delta_t^{(0)} = \tilde{\lambda}\delta_t$, $0 < \tilde{\lambda} < 1$, что следует из условия $\dot{\delta}_t/\delta_t^2 \to 0$, $t \to \infty$, предположения $\mathcal{A}$. Хорошо известно [8, теорема 3.4, с. 253], что при конечном T задача $J_{T,t_0}(u) \to \min$ имеет решение $u_t^{*T} = -(R_t/\delta_t)^{-1} \times \times B_t' \Pi_t^T x_t^{*T}$, при этом значение функционала на оптимальном управлении $J_{T,t_0}(u^{*T}) = \tilde{x}\tilde{\Pi}_{t_0}^T \tilde{x}$, где симметричная матрица $\tilde{\Pi}_t^T \geqslant 0$ — решение уравнения (П.1) с граничным условием $\tilde{\Pi}_T^T = 0$. Построим альтернативное управление, стабилизирующее систему и не зависящее от T:

$$u_t^{(0)} = K_t x_t^{(0)} = -k\delta_t B_t'(B_t B_t')^{-1} x_t^{(0)}.$$

Заметим, что в силу предположения $\mathcal{B}$ это управление существует, а константу $k > 0$ можно выбрать таким образом, чтобы обеспечить δ_t-суперэкспоненциальную устойчивость матрицы $\tilde{A}_t + B_t K_t = \tilde{A}_t - k\delta_t I$. Поэтому

$$\tilde{x}\tilde{\Pi}_{t_0}^T \tilde{x} \leqslant J_{T,t_0}(u^{(0)}) \leqslant c\|\tilde{x}\|^2 \int\limits_{t_0}^{T} \exp\left\{ -\int\limits_{t_0}^{t} 2\delta_v\, dv \right\} (1/\delta_t + \delta_t)\, dt \leqslant \tilde{c}\|\tilde{x}\|^2.$$

Здесь и далее в качестве c и $\tilde{c}$ будем обозначать некоторые положительные константы, конкретные значения которых не играют роли и могут меняться от формулы к формуле. Таким образом, $\tilde{\Pi}_{t_0}^T$ — неубывающая (по T) и ограниченная функция. Стандартная аргументация (см. [8, с. 268]) приводит к тому, что существует предел $\lim_{T\to\infty} \tilde{\Pi}_t^T = \tilde{\Pi}_t$, удовлетворяющий (П.1) и обладающий теми же свойствами, что и $\tilde{\Pi}_t^T$. Так как $\Pi_t = \delta_t \tilde{\Pi}_t$, то из ограниченности $\tilde{\Pi}_t$ сверху следует соотношение $\Pi_t \leqslant c_2 \delta_t I$ с некоторой константой $c_2 > 0$. Для установления нижней границы изменения Π_t рассмотрим функцию $\bar{\Pi}_t = \Pi_t^{-1}$, являющуюся решением уравнения

$$\dot{\bar{\Pi}}_t - \bar{\Pi}_t' A_t' - A_t \bar{\Pi}_t - \bar{\Pi}_t Q_t \bar{\Pi}_t + B_t R_t^{-1} B_t' = 0. \tag{П.2}$$

Уравнение (П.2) также относится к классу уравнений Риккати и соответствует системе управления с δ_t-суперэкспоненциально устойчивой матрицей $-A_t'$. Для таких систем известно [19], что $\bar{\Pi}_t \leqslant \bar{c}_1(1/\delta_t)$, откуда следует соотношение $\Pi_t \geqslant c_1 \delta_t I$ при некоторой константе $c_1 > 0$.

Переходя к исследованию устойчивости матрицы $A_t - B_t R_t^{-1} B_t' \Pi_t$, рассмотрим линейное уравнение $dz_t = (A_t - B_t R_t^{-1} B_t' \Pi_t) z_t dt$, $z_{t_0} = z$, и выпишем

$$d(z_t' \Pi_t z_t) = (-z_t' Q_t z_t - z_t' \Pi_t B_t R_t^{-1} B_t' \Pi_t z_t) dt.$$

Предположение $\mathcal{B}$ и полученное двойное неравенство $c_1\delta_t I \leqslant \Pi_t \leqslant c_2\delta_t I$ приводят к последовательности оценок:

$$d(z_t'\Pi_t z_t) \leqslant -\lambda\delta_t(z_t'\Pi_t z_t)dt,$$

$$z_t\Pi_t z_t \leqslant z_{t_0}\Pi_{t_0}z_{t_0}\exp\left\{-\int\limits_{t_0}^{t}\lambda\delta_v\,dv\right\},$$

$$\|z_t\|^2 \leqslant \kappa\exp\left\{-\int\limits_{t_0}^{t}\lambda\delta_v\,dv\right\}\|z\|^2 \tag{П.3}$$

при некоторых положительных константах λ и κ. Из соотношения (П.3) следует $\tilde{\delta}_t$–суперэкспоненциальная устойчивость матрицы $A_t - B_tR_t^{-1}B_t'\Pi_t$ с $\tilde{\delta}_t = \lambda\delta_t$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. В силу выполнения предположений $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ справедливо утверждение леммы о существовании и свойствах решения уравнения Риккати (5), а также можно определить закон управления U^* в виде (8)–(9). Зафиксировав произвольное конкурирующее управление $U \in \mathcal{U}$ и соответствующий ему процесс X_t, положим $x_t = X_t - X_t^*$ и $u_t = U_t - U_t^*$. Пара $(x_t, u_t)_{t\leqslant T}$ удовлетворяет уравнению

$$dx_t = (A_tx_t + B_tu_t)dt, \quad x_0 = 0. \tag{П.4}$$

Так как $Q_t \geqslant qI$, то найдется число $k > 0$, такое что матрица $A_t - k\delta_t\sqrt{Q_t}$ будет δ_t-устойчивой. Тогда, преобразовав (П.4), получим

$$dx_t = (A_t - k\delta_t\sqrt{Q_t})x_tdt + k\delta_t\sqrt{Q_t}x_tdt + B_tu_tdt, \quad x_0 = 0,$$

и

$$\|x_t\| \leqslant c\int\limits_0^t \exp\left\{-\int\limits_s^t \delta_v\,dv\right\}\left(\delta_s\|\sqrt{Q_s}x_s\| + \|\sqrt{R_s}u_s\|\right)ds.$$

Согласно неравенству Коши–Буняковского

$$\|x_t\|^2 \leqslant \tilde{c}\int\limits_0^t \exp\left\{-\int\limits_s^t \delta_v\,dv\right\}\left(\delta_sx_s'Q_sx_s + u_s'R_su_s\right)\,ds,$$

откуда следует оценка

$$\frac{1}{\delta_t}\|x_t\|^2 \leqslant \tilde{c}\int\limits_0^t (x_s'Q_sx_s + u_s'R_su_s)\,ds. \tag{П.5}$$

Далее, представление для разности $J_T(U^*) - J_T(U)$ имеет вид

$$(\text{П.6})\quad J_T(U^*) - J_T(U) = 2x_T'\Pi_T X_T^* - \int\limits_{t_0}^{T} (x_t'Q_t x_t + u_t'R_t u_t)\,dt - 2\int\limits_0^T x_t'\Pi_t G_t dw_t.$$

С учетом (П.5), свойств функции Π_t (см. лемму) и применения элементарного неравенства $2ab \leqslant a^2/c + cb^2$, справедливого при произвольном $c > 0$ для любых чисел a и b, (П.6) оценивается как

$$(\text{П.7})\qquad J_T(U^*) - J_T(U) \leqslant \tilde c_1 \delta_T^3 \|X_T^*\|^2 - 2\int\limits_0^T x_t'\Pi_t G_t dw_t$$

при некоторой константе $\tilde c_1 > 0$. Переходя к математическому ожиданию (П.7), получаем

$$(\text{П.8})\qquad \mathrm{E}J_T(U^*) \leqslant \mathrm{E}J_T(U) + \tilde c_1 \delta_T^3 \mathrm{E}\|X_T^*\|^2.$$

Так как матрица $A_t - B_t R_t^{-1} B_t'\Pi_t$ в уравнении (9) является $\tilde\delta_t$-суперэкспоненциально устойчивой, то

$$(\text{П.9})\qquad \begin{gathered}\delta_T^3 \mathrm{E}\|X_T^*\|^2 \leqslant \\ \leqslant c\delta_T^3\left(\exp\left\{-\int\limits_0^T 2\tilde\delta_v\,dv\right\}\|x\|^2 + \int\limits_0^T \exp\left\{-\int\limits_t^T 2\tilde\delta_v\,dv\right\}\|G_t\|^2\,dt\right).\end{gathered}$$

Необходимо отметить, что следствием условия $\dot\delta_t/\delta_t^2 \to 0$, $t \to \infty$, из предположения $\mathcal{A}$ является сходимость

$$\delta_T^3 \exp\left\{-\int\limits_0^T 2\tilde\delta_v\,dv\right\} \to 0 \quad \text{при} \quad T \to \infty.$$

Второе слагаемое в (П.9) можно переписать как

$$L_T = \delta_T^3 \int\limits_0^T \exp\left\{-\int\limits_t^T 2\tilde\delta_v\,dv\right\}\|G_t\|^2 dt = \int\limits_0^T \exp\left\{-\int\limits_t^T 2\bar\delta_v\,dv\right\}\|\bar G_t\|^2\,dt,$$
$$\bar\delta_t = \tilde\delta_t + (3/2)(\dot\delta_t/\delta_t), \quad \bar G_t = \delta_t^{3/2} G_t.$$

Используя правило Лопиталя, нетрудно показать, что условие $\|G_T\|\delta_T \to 0$, $T \to \infty$, будет достаточным для $L_T \to 0$ при $T \to \infty$, а выполнение предположения $\mathcal{G}$ гарантирует $L_T/\left(\int_0^T \delta_t\|G_t\|^2\,dt\right) \to 0$ при $T \to \infty$. Принимая во внимание проведенные рассуждения, приходим к опережающей оптимальности в среднем для U^*, если $\|G_T\|\delta_T \to 0$, $T \to \infty$, или же к оптимальности в среднем на бесконечном интервале времени по критерию с нормировкой $\int_0^T \delta_t\|G_t\|^2\,dt$:

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{\mathrm{E}J_T(U^*)}{\int\limits_0^T \delta_t\|G_t\|^2\,dt} \leqslant \limsup_{T\to\infty} \frac{\mathrm{E}J_T(U)}{\int\limits_0^T \delta_t\|G_t\|^2\,dt}.$$

Ожидаемое значение целевого функционала на оптимальном управлении вычисляется по формуле $\mathrm{E}J_T(U^*) = x'\Pi_0 x - \mathrm{E}[(X_T^*)'\Pi_T X_T^*] + \int_0^T \mathrm{tr}(G_t'\Pi_t G_t)\,dt$. Так как $\mathrm{E}[(X_T^*)'\Pi_T X_T^*] \leqslant c\delta_T \mathrm{E}\|X_T^*\|^2$ и $\delta_T \mathrm{E}\|X_T^*\|^2/\left(\int_0^T \delta_t\|G_t\|^2\,dt\right) \to 0$, $T\to\infty$, а $\int_0^T \mathrm{tr}(G_t'\Pi_t G_t)\,dt \geqslant c_1\int_0^T \delta_t\|G_t\|^2\,dt$ (см. лемму), то предельная величина

$$0 < J^* = \limsup_{T\to\infty} \frac{\mathrm{E}J_T(U^*)}{\int\limits_0^T \delta_t\|G_t\|^2\,dt} = \frac{x'\Pi_0 x}{\int\limits_0^\infty \delta_t\|G_t\|^2\,dt} + \limsup_{T\to\infty} \frac{\int\limits_0^T \mathrm{tr}(G_t'\Pi_t G_t)\,dt}{\int\limits_0^T \delta_t\|G_t\|^2\,dt} < \infty.$$

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Anderson B.D.O., Ilchmann A., Wirth F.R.* Stabilizability of Linear Time-Varying Systems // Syst. Control Lett. 2013. V. 62. No. 9. P. 747–755.
2. *Bacciotti A., Rosier L.* Liapunov functions and stability in control theory. N.Y.: Springer, 2006.
3. *Dragan V., Halanay A.* Stabilization of linear systems. Boston: Birkhauser, 1999.
4. *Dragan V., Morozan T., Stoica A.M.* Mathematical methods in robust control of linear stochastic systems. N.Y.: Springer, 2006.
5. *Fomichev V.V., Mal'tseva A.V., Shuping W.* Stabilization Algorithm for Linear Time-Varying Systems // Differ. Equat. 2017. V. 53. No. 11. P. 1495–1500.
6. *Phat V.N.* Global Stabilization for Linear Continuous Time-Varying Systems // Appl. Math. Comput. 2006. V. 175. No. 2. P. 1730–1743.
7. *Terrell W.J.* Stability and stabilization: An Introduction. Princeton: Princeton Univer. Press, 2009.
8. *Квакернаак Х., Сиван Р.* Линейные оптимальные системы управления. М.: Наука, 1977.
9. *Wu M.-Y., Sherif A.* On the Commutative Class of Linear Time-Varying Systems // Int. J. Control. 1976. V. 23. No. 3. P. 433–444.
10. *Jetto L., Orsini V., Romagnoli R.* BMI-based Stabilization of Linear Uncertain Plants with Polynomially Time Varying Parameters // IEEE Trans. Automat. Control. 2015. V. 60. No. 8. P. 2283–2288.
11. *Jones J.J.* Modelling and Simulation of Large Scale Multiparameter Dynamical System // Proc. IEEE 1989 National Aerospace and Electronics Conf. NAECON 1989. N.Y.: IEEE, 1989. P. 415–425.
12. *Levine J., Zhu G.* Observers with Asymptotic Gain for a Class of Linear Time-Varying Systems with Singularity // IFAC Proc. Volumes. 1993. V. 26. No. 2. P. 145–148.

13. *Karafyllis I., Tsinias J.* Non-uniform in Time Stabilization for Linear Systems and Tracking Control for Non-holonomic Systems in Chained Form // Int. J. Control. 2003. V. 76. No. 15. P. 1536–1546.

14. *Caraballo T.* On the Decay Rate of Solutions of Non-autonomous Differential Systems // Electron. J. Differ. Equat. 2001. V. 2001. No. 5. P. 1–17.

15. *Inoue M., Wada T., Asai T., Ikeda M.* Non-exponential Stabilization of Linear Time-invariant Systems by Linear Time-varying Controllers // Proc. 50th IEEE Conf. on Decision and Control and European Control Conf. N.Y., 2011. P. 4090–4095.

16. *Palamarchuk E.S.* On the Generalization of Logarithmic Upper Function for Solution of a Linear Stochastic Differential Equation with a Nonexponentially Stable Matrix // Differ. Equat. 2018. V. 54. No. 2. P. 193–200.

17. *Abou-Kandil H., Freiling G., Ionescu V., Jank G.* Matrix Riccati equations in control and systems theory. Basel: Birkhauser, 2012.

18. *Turnovsky S.J.* Macroeconomic analysis and stabilization policy. Cambrigde: Cambridge Univer. Press, 1977.

19. *Паламарчук Е.С.* Оптимизация суперустойчивой линейной стохастической системы в приложении к модели со сверхнетерпеливыми агентами // АиТ. 2018. № 3. С. 61–75.

    Palamarchuk E.S. Optimization of the Superstable Linear Stochastic System Applied to the Model with Extremely Impatient Agents // Autom. Remote Control. 2018. No. 3. P. 440–451.

20. *Белкина Т.А., Паламарчук Е.С.* О стохастической оптимальности для линейного регулятора с затухающими возмущениями // АиТ. 2013. № 4. С. 110–128.

    Belkina T.A., Palamarchuk E.S. On Stochastic Optimality for a Linear Controller with Attenuating Disturbances // Autom. Remote Control. 2013. V. 74. No. 4. P. 628–641.

21. *Паламарчук Е.С.* Анализ асимптотического поведения решения линейного стохастического дифференциального уравнения с субэкспоненциально устойчивой матрицей и его приложение к задаче управления // Теор. вероятностей и ее применения. 2017. Т. 62. Вып. 4. С. 654–669.

    Palamarchuk E.S. Analysis of the Asymptotic Behavior of the Solution to a Linear Stochastic Differential Equation with Subexponentially Stable Matrix and Its Application to a Control Problem // Theory of Probability & Its Applications. 2018. V. 62. No. 4. P. 522–533.

22. *Fischer J.* Optimal sequence-based control of networked linear systems. Karlsruhe: KIT Scientific Publishing, 2015.

23. *Aeyels D., Lamnabhi-Lagarrigue F., van der Schaft A.* (*Eds.*) Stability and stabilization of nonlinear systems. Berlin: Springer, 2008.

24. *Chen G., Yang Y.* New Stability Conditions for a Class of Linear Time-Varying Systems // Automatica. 2016. V. 71. P. 342–347.

25. *Паламарчук Е.С.* Стабилизация линейных стохастических систем с дисконтированием: моделирование долгосрочных эффектов применения оптимальных стратегий управления // Математич. моделирование. 2015. Т. 27. № 1. С. 3–15.

    Palamarchuk E.S. Stabilization of Linear Stochastic Systems with a Discount: Modeling and Estimation of the Long-Term Effects from the Application of Optimal Control Strategies // Math. Models Comput. Simul. 2015. V. 7. No. 4. P. 381–388.

26. *Паламарчук Е.С.* Анализ критериев долговременного среднего в задаче стохастического линейного регулятора // АиТ. 2016. № 10. С. 78–92.

Palamarchuk E.S. Analysis of Criteria for Long-run Average in the Problem of Stochastic Linear Regulator // Autom. Remote Control. 2016. V. 77. No. 10. P. 1756–1767.

27. *Khasminskii R.* Stochastic stability of differential equations. 2nd ed. N.Y.: Springer, 2012.
28. *Mao X.* Stochastic differential equations and applications. 2nd ed. Cambridge, UK: Woodhead Publishing, 2007.
29. *Паламарчук Е.С.* Оценка риска в линейных экономических системах при отрицательных временных предпочтениях // Экономика и мат. методы. 2013. Т. 49. № 3. С. 99–116.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Б.М. Миллером.

Поступила в редакцию 28.02.2018

После доработки 09.08.2018

Принята к публикации 08.11.2018