Автоматика и телемеханика, № 2, 2019

© 2019 г. М.В. ХЛЕБНИКОВ, д-р физ.-мат. наук (khlebnik@ipu.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

ОПТИМИЗАЦИЯ БИЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ПРИ ВНЕШНИХ ВОЗМУЩЕНИЯХ: I. ЗАДАЧА АНАЛИЗА[1]

Рассмотрены результаты, связанные с задачей анализа для билинейной системы при произвольных ограниченных внешних возмущениях. Поставлены и решены задачи конструктивного построения эллипсоида стабилизируемости и области стабилизируемости квадратичной динамической системы в непрерывном и дискретном времени. Главным инструментом при этом является техника линейных матричных неравенств.

Простой и универсальный подход имеет большой потенциал и возможности для обобщений; в частности, он распространим на разнообразные робастные постановки задачи.

Ключевые слова: билинейная система, внешние возмущения, квадратичная функция Ляпунова, линейная обратная связь, эллипсоид стабилизируемости, область стабилизируемости, линейные матричные неравенства.

DOI: 10.1134/S000523101902003X

1. Введение

Задачам, связанным с вопросами устойчивости, стабилизации и синтеза управления для билинейных систем, традиционно уделяется достаточно большое внимание в публикациях, начиная с появления монографии [1]; при этом предлагаются как самые различные постановки задач, так и подходы к их решению, см. [2–15] и др.; в частности, в некоторых публикациях [6] предпринимаются попытки эллипсоидального подхода к рассматриваемой проблематике.

В [16, 17] был предложен подход к описанию области стабилизируемости билинейной системы. На основе техники линейных матричных неравенств и квадратичных функций Ляпунова конструктивно строился так называемый эллипсоид стабилизируемости такой, что траектории замкнутой системы, начинаясь внутри эллипсоида, асимптотически стремятся к нулю. Это позволило эффективно строить невыпуклые аппроксимации областей стабилизируемости билинейных систем управления. Среди наиболее идейно близких публикаций отметим [18, 19], которые также посвящены построению квадратичных функций Ляпунова для задач стабилизации билинейных систем при помощи аппарата линейных матричных неравенств.

[1] Исследование выполнено при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-08-00140).

Однако настоящая статья существенно отличается от всех указанных публикаций: в ней рассматривается билинейная система, подверженная воздействию внешних возмущений. Эта тематика (применительно к линейным системам) восходит к работам Б.В. Булгакова, см. [20–22], который занимался так называемой *проблемой о накоплении возмущений*. В статье решается задача конструктивного построения эллипсоида стабилизируемости нелинейной (квадратичной) динамической системы, подверженной воздействию внешних возмущений; кроме того, в ней ставится и решается новая задача построения области стабилизируемости системы.

Статья организована следующим образом: в разделе 2 изложен важный вспомогательный технический результат, являющийся обобщением так называемой леммы Питерсена; раздел 3 посвящен построению эллипсоида стабилизируемости, в разделе 4 рассматривается построение области стабилизируемости квадратичной системы, подверженной воздействию внешних возмущений; в разделе 5 полученные результаты распространяются на системы в дискретном времени; раздел 7 содержит заключительные комментарии.

Несмотря на то что в статье рассматриваются системы со скалярным управлением, предложенный подход в полной мере распространим и на системы с многомерным управлением. При этом выкладки становятся несколько более громоздкими, в то время как идейная сторона меняется мало.

Всюду далее $\|\cdot\|$ — евклидова норма вектора и спектральная норма матрицы, $^\top$ — символ транспонирования, I — единичная матрица соответствующих размеров, а все матричные неравенства понимаются в смысле знакоопределенности матриц.

2. Вспомогательный результат: лемма Питерсена

Так называемая *лемма Питерсена* [23] эффективно применяется в разнообразных робастных постановках задач стабилизации и управления. Приведем ее в следующей формулировке.

Лемма 1 (Питерсен). *Пусть $G = G^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$, а $M \in \mathbb{R}^{n\times p}$ и $N \in \mathbb{R}^{q\times n}$ — ненулевые матрицы. Неравенство*

$$G + M\Delta N + N^\top\Delta^\top M^\top \preccurlyeq 0$$

справедливо для всех $\Delta \in \mathbb{R}^{p\times q}$: $\|\Delta\| \leqslant 1$ тогда и только тогда, когда существует число ε такое, что

$$\begin{pmatrix} G + \varepsilon M M^\top & N^\top \\ N & -\varepsilon I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0.$$

Модификация леммы Питерсена, представленная в следующей лемме 2, охватывает случай векторной неопределенности, удовлетворяющей эллипсоидальному ограничению.

Лемма 2. Пусть $G = G^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $0 \prec P = P^\top \in \mathbb{R}^{q\times q}$, а $M \in \mathbb{R}^{n\times q}$ и $N \in \mathbb{R}^{1\times n}$ — ненулевые матрицы. Матричное неравенство

$$G + M\delta N + N^\top\delta^\top M^\top \preccurlyeq 0$$

справедливо для всех $\delta \in \mathbb{R}^q$: $\delta^\top P^{-1} \delta \leqslant 1$ *тогда и только тогда, когда существует число* ε *такое, что*

$$G + \varepsilon M P M^\top + \frac{1}{\varepsilon} N^\top N \preccurlyeq 0,$$

или, эквивалентно,

$$\begin{pmatrix} G & MP & N^\top \\ PM^\top & -\varepsilon P & 0 \\ N & 0 & -\dfrac{1}{\varepsilon} I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0.$$

В дальнейшем изложении этот результат будет использоваться самым существенным образом.

3. Эллипсоид стабилизируемости

Рассмотрим билинейную систему управления

$$\dot{x} = Ax + Bxu + bu + Dw, \quad x(0) = x_0, \tag{1}$$

где $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $D \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $b \in \mathbb{R}^n$, с фазовым состоянием $x \in \mathbb{R}^n$, скалярным управлением $u \in \mathbb{R}$ и внешним возмущением $w \in \mathbb{R}^m$, измеримым по t и ограниченным в каждый момент времени:

$$\|w(t)\| \leqslant \gamma \quad \text{при всех} \quad t \geqslant 0. \tag{2}$$

Замкнув билинейную систему (1), (2) статической линейной обратной связью

$$u = k^\top x, \quad k \in \mathbb{R}^n,$$

приходим к квадратичной динамической системе

$$\dot{x} = \left(A_c + Bxk^\top\right) x + Dw,$$

где $A_c = A + bk^\top$. Динамические системы такого вида и исследуются в настоящей статье.

Итак, рассмотрим квадратичную динамическую систему вида

$$\dot{x} = \left(A + Bxh^\top\right) x + Dw, \tag{3}$$

где $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $D \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $h \in \mathbb{R}^n$, с фазовым состоянием $x \in \mathbb{R}^n$ и внешним возмущением (2). Отметим, что никаких других ограничений на возмущение $w(t)$ не накладывается; так, оно не предполагается ни случайным, ни гармоническим.

Таким образом, рассматриваются L_∞-ограниченные внешние возмущения. Класс таких возмущений будем называть *допустимым*.

Будем полагать, что матрица A гурвицева (действительные части ее собственных значений отрицательны).

Система (3) при отсутствии внешних возмущений ($D = 0$) исследовалась в [16, 17], где на основании техники линейных матричных неравенств и квадратичных функций Ляпунова был предложен регулярный подход к построению так называемого *эллипсоида стабилизируемости* билинейной системы — эллипсоида, обладающего следующим свойством: траектории системы, начинаясь внутри эллипсоида, асимптотически стремятся к нулю.

Цель данного раздела — построение эллипсоида стабилизируемости системы (3) при внешних возмущениях (2). В отличие от системы без возмущений теперь поведение траекторий системы будет иным — траектории системы будут входить в множество достижимости системы (либо будут стремиться к точке на его границе). Общим же является то, что траектория системы (3), исходящая из любой точки x_0 внутри эллипсоида стабилизируемости, остается в этом эллипсоиде — теперь уже при всех допустимых внешних возмущениях (2).

Следующая теорема 1 устанавливает достаточное условие, при котором эллипсоид

$$\mathcal{E} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \quad x^\top P^{-1} x \leqslant 1 \right\}, \quad P \succ 0, \tag{4}$$

является эллипсоидом стабилизируемости для рассматриваемой системы.

Теорема 1. *Эллипсоид* (4) *является эллипсоидом стабилизируемости для системы* (3), (2), *если его матрица P удовлетворяет матричным неравенствам*

$$\begin{pmatrix} AP + PA^\top + \alpha P + \varepsilon BPB^\top & Ph & \gamma D \\ h^\top P & -\varepsilon & 0 \\ \gamma D^\top & 0 & -\alpha I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0, \qquad P \succ 0, \tag{5}$$

при некоторых α и ε.

Доказательства этого и последующих утверждений помещены в Приложение.

Понятно, что не при любом размахе внешних возмущений γ эллипсоид стабилизируемости для системы (3), (2) будет существовать. Ответ на вопрос о максимально допустимом размахе γ дается следующим утверждением.

Теорема 2. *Максимальный размах $\widehat{\gamma}$ внешних возмущений* (2) *в системе* (3), *при котором эллипсоид стабилизируемости существует, дается решением задачи*

$$\max \gamma$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} AP + PA^\top + \alpha P + \varepsilon BPB^\top & Ph & \gamma D \\ h^\top P & -\varepsilon & 0 \\ \gamma D^\top & 0 & -\alpha I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0, \qquad P \succ 0,$$

где оптимизация проводится относительно матричной переменной $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$, *скалярной переменной* γ *и скалярных параметров* α *и* ε.

Далее, для $\gamma \leqslant \widehat{\gamma}$ естественно стремиться максимизировать эллипсоид стабилизируемости по некоторому критерию; в частности, максимизируя объем эллипсоида, получаем следствие теоремы 1.

Следствие 1. Пусть $\widehat{P}$ — *решение задачи выпуклой оптимизации*

$$\max \log \det P$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} AP + PA^\top + \alpha P + \varepsilon BPB^\top & Ph & \gamma D \\ h^\top P & -\varepsilon & 0 \\ \gamma D^\top & 0 & -\alpha I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0, \qquad P \succ 0,$$

относительно матричной переменной $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *и скалярных параметров* ε *и* α.

Тогда

$$\widehat{\mathcal{E}} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \quad x^\top \widehat{P}^{-1} x \leqslant 1 \right\}$$

является эллипсоидом стабилизируемости для системы (3), (2).

Обратим внимание, что и теорема 2, и следствие 1 предполагают осуществление процедуры двумерной оптимизации по α и по ε, поскольку каждый из этих параметров нелинейно входит в соответствующие ограничения.

Замечание. В рассматриваемых далее примерах (для упрощения вычислений) будем предполагать, что матрица B — единичная; это позволит избежать необходимости проведения оптимизации на двумерной сетке. Действительно, в этом случае первое из матричных неравенств (5) примет вид

$$\begin{pmatrix} AP + PA^\top + \alpha P + \varepsilon P & Ph & \gamma D \\ h^\top P & -\varepsilon & 0 \\ \gamma D^\top & 0 & -\alpha I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0.$$

Вводя новую скалярную переменную

$$\mu = \alpha + \varepsilon$$

и тем самым исключая ε, получаем матричное неравенство

$$\begin{pmatrix} AP + PA^\top + \mu P & Ph & \gamma D \\ h^\top P & \alpha - \mu & 0 \\ \gamma D^\top & 0 & -\alpha I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0,$$

линейное относительно матричной переменной $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$ и скалярной переменной α с одним скалярным параметром μ.

4. Область стабилизируемости

В разделе 3 был найден максимальный (по критерию объема) эллипсоид стабилизируемости $\mathcal{E}$ для системы (3), (2). Понятно, что существуют и иные эллипсоиды стабилизируемости, в том числе максимальные по тому или иному критерию. Рассмотрим множество, образованное объединением эллипсоидов стабилизируемости; будем называть его *областью стабилизируемости* системы (3), (2). Очевидно, что по построению область стабилизируемости будет обладать тем же свойством, что и каждый образующий ее эллипсоид стабилизируемости — траектория системы, исходящая из любой точки x_0 внутри этой области, остается в ней при всех допустимых внешних возмущениях (2).

Нетрудно видеть, что в рамках техники линейных матричных неравенств по произвольному вектору c можно эффективно построить точку, лежащую на границе области стабилизируемости системы по направлению c; более того, нахождение соответствующей точки сводится к решению задачи полуопределенного программирования.

Действительно, выберем направление, определяемое вектором c единичной длины, и будем требовать принадлежности точки γc эллипсоиду стабилизируемости, максимизируя параметр γ. Заметив, что условие принадлежности точки γc эллипсоиду стабилизируемости с матрицей P представимо по лемме Шура в линейном относительно P и γ виде

$$\begin{pmatrix} 1 & \gamma c^\top \\ \gamma c & P \end{pmatrix} \succcurlyeq 0,$$

приходим к следующему результату, устанавливающему простую характеризацию области стабилизируемости квадратичной динамической системы, подверженной воздействию внешних возмущений.

Теорема 3. *Пусть c — заданный вектор и пусть $\widehat{\gamma}$ — решение задачи полуопределенного программирования*

$$\max \gamma$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} AP + PA^\top + \alpha P + \varepsilon BPB^\top & Ph & \gamma D \\ h^\top P & -\varepsilon & 0 \\ \gamma D^\top & 0 & -\alpha I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \gamma c \\ \gamma c^\top & P \end{pmatrix} \succcurlyeq 0,$$

где оптимизация проводится по матричной переменной $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$, скалярной переменной γ и скалярным параметрам α и ε.

Тогда точка $\widehat{\gamma} c$ лежит на границе области стабилизируемости системы (3), (2) по направлению c.

5. Системы в дискретном времени

Рассмотрим билинейную систему управления в дискретном времени

$$x_{\ell+1} = Ax_\ell + Bx_\ell u_\ell + bu_\ell + Dw_\ell, \tag{6}$$

где $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $D \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $b \in \mathbb{R}^n$, с начальным состоянием x_0, фазовым состоянием $x_\ell \in \mathbb{R}^n$, скалярным управлением $u_\ell \in \mathbb{R}$ и внешним возмущением $w_\ell \in \mathbb{R}^m$, удовлетворяющим ограничению

$$\|w_\ell\| \leqslant \gamma \quad \text{при всех } \ell = 0, 1, 2, \ldots \tag{7}$$

Замкнув билинейную систему (6), (7) статической линейной обратной связью

$$u_\ell = k^\top x_\ell, \quad k \in \mathbb{R}^n,$$

приходим к дискретной квадратичной динамической системе

$$x_{\ell+1} = \left(A_c + Bx_\ell k^\top\right) x_\ell + Dw_\ell,$$

где $A_c = A + bk^\top$.

Итак, рассмотрим квадратичную динамическую систему вида

$$x_{\ell+1} = \left(A + Bx_\ell h^\top\right) x_\ell + Dw_\ell, \tag{8}$$

где $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $D \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $h \in \mathbb{R}^n$, с фазовым состоянием $x \in \mathbb{R}^n$ и внешним возмущением (7). Как и в непрерывном случае, никаких других ограничений на возмущение w_ℓ не накладывается; таким образом, рассматриваются l_∞-ограниченные внешние возмущения. Класс таких возмущений будем называть *допустимым*.

Будем полагать, что матрица A — шуровская (ее собственные значения лежат внутри единичного круга).

Цель данного раздела — построение эллипсоида стабилизируемости системы (8) при внешних возмущениях (7). Следующая теорема 4, являющаяся дискретным аналогом теоремы 1, устанавливает достаточное условие, при котором эллипсоид

$$\mathcal{E} = \left\{x \in \mathbb{R}^n\colon \quad x^\top P^{-1} x \leqslant 1\right\}, \quad P \succ 0, \tag{9}$$

является эллипсоидом стабилизируемости для рассматриваемой системы.

Теорема 4. *Эллипсоид* (9) *является эллипсоидом стабилизируемости для системы* (8), (7), *если его матрица* P *удовлетворяет матричным неравенствам*

$$\begin{pmatrix} -\alpha P & 0 & 0 & 0 & Ph & PA^\top \\ 0 & -P & 0 & BP & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(1-\alpha)I & 0 & 0 & \gamma D^\top \\ 0 & PB^\top & 0 & -\varepsilon P & 0 & PB^\top \\ h^\top P & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\varepsilon} I & 0 \\ AP & 0 & \gamma D & BP & 0 & -P \end{pmatrix} \preccurlyeq 0, \qquad P \succ 0,$$

при некоторых α *и* ε.

Как и ранее, эллипсоид стабилизируемости для системы (8), (7) существует не при любом размахе внешних возмущений γ. Ответ на вопрос о максимально допустимом размахе γ дается следующим дискретным аналогом теоремы 2.

Т е о р е м а 5. *Максимальный размах $\widehat{\gamma}$ внешних возмущений* (7) *в системе* (8), *при котором эллипсоид стабилизируемости существует, дается решением задачи*

$$\max \gamma$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} -\alpha P & 0 & 0 & 0 & Ph & PA^\top \\ 0 & -P & 0 & BP & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(1-\alpha)I & 0 & 0 & \gamma D^\top \\ 0 & PB^\top & 0 & -\varepsilon P & 0 & PB^\top \\ h^\top P & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\varepsilon}I & 0 \\ AP & 0 & \gamma D & BP & 0 & -P \end{pmatrix} \preccurlyeq 0, \qquad P \succ 0,$$

где оптимизация проводится относительно матричной переменной $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$, скалярной переменной γ и скалярных параметров α и ε.

Максимизируя (для допустимого $\gamma \leqslant \widehat{\gamma}$) эллипсоид стабилизируемости по критерию объема, получаем следующий результат.

С л е д с т в и е 2. *Пусть $\widehat{P}$ — решение задачи выпуклой оптимизации*

$$\max \log\det P$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} -\alpha P & 0 & 0 & 0 & Ph & PA^\top \\ 0 & -P & 0 & BP & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(1-\alpha)I & 0 & 0 & \gamma D^\top \\ 0 & PB^\top & 0 & -\varepsilon P & 0 & PB^\top \\ h^\top P & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\varepsilon}I & 0 \\ AP & 0 & \gamma D & BP & 0 & -P \end{pmatrix} \preccurlyeq 0, \qquad P \succ 0,$$

относительно матричной переменной $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$ и скалярных параметров ε и α.

Тогда

$$\widehat{\mathcal{E}} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n\colon \quad x^\top \widehat{P}^{-1} x \leqslant 1 \right\}$$

является эллипсоидом стабилизируемости для системы (8), (7).

Наконец, следующий дискретный аналог теоремы 3 устанавливает простую характеризацию области стабилизируемости рассматриваемой системы.

Теорема 6. Пусть c — заданный вектор и пусть $\widehat{\gamma}$ — решение задачи полуопределенного программирования

$$\max \gamma$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} -\alpha P & 0 & 0 & 0 & Ph & PA^\top \\ 0 & -P & 0 & BP & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(1-\alpha)I & 0 & 0 & \gamma D^\top \\ 0 & PB^\top & 0 & -\varepsilon P & 0 & PB^\top \\ h^\top P & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\varepsilon}I & 0 \\ AP & 0 & \gamma D & BP & 0 & -P \end{pmatrix} \preccurlyeq 0,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \gamma c \\ \gamma c^\top & P \end{pmatrix} \succcurlyeq 0,$$

где оптимизация проводится по матричной переменной $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$, скалярной переменной γ и скалярным параметрам α и ε.

Тогда точка $\widehat{\gamma}c$ лежит на границе области стабилизируемости системы (8), (7) по направлению c.

6. Примеры

Ограничимся рассмотрением демонстрационных примеров; продолжение статьи, посвященное вопросам синтеза управления, будет сопровождаться примерами, проистекающими из реальных задач.

Пример 1. Рассмотрим систему вида (3) с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}, \qquad B = I, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad h = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Воспользовавшись теоремой 2 (с учетом замечания), находим максимально допустимый размах внешних возмущений:

$$\widehat{\gamma} = 0{,}0232.$$

Теорема 1 для $\gamma = 0{,}95\widehat{\gamma}$ дает матрицу

$$\widehat{P}_{0,95} = \begin{pmatrix} 0{,}0943 & -0{,}2271 \\ -0{,}2271 & 0{,}7150 \end{pmatrix}$$

эллипса стабилизируемости, для $\gamma = 0{,}75\widehat{\gamma}$ матрица эллипса стабилизируемости имеет вид

$$\widehat{P}_{0,75} = \begin{pmatrix} 0{,}1236 & -0{,}2928 \\ -0{,}2928 & 0{,}9447 \end{pmatrix},$$

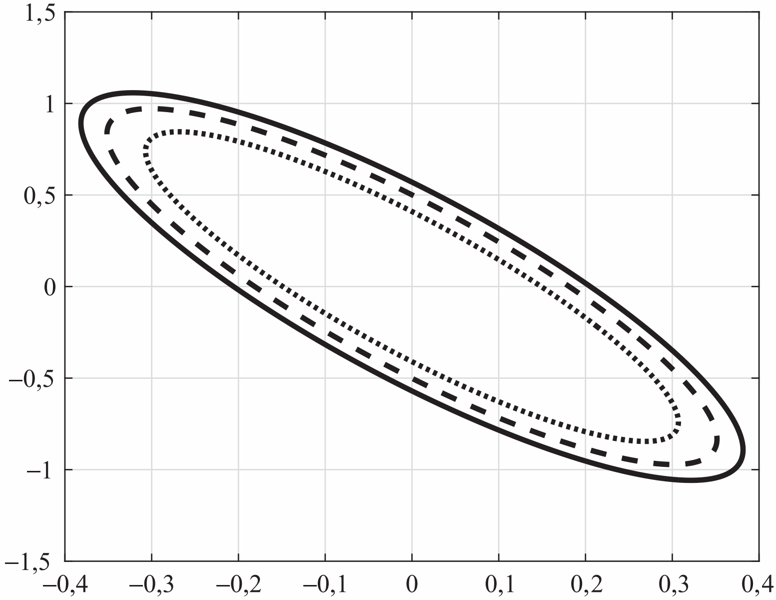

Рис. 1. Эллипсы стабилизируемости для разных уровней внешних возмущений из примера 1: сплошная линия — $\gamma = 0{,}5\widehat{\gamma}$; штриховая линия — $\gamma = 0{,}75\widehat{\gamma}$; точечная линия — $\gamma = 0{,}95\widehat{\gamma}$.

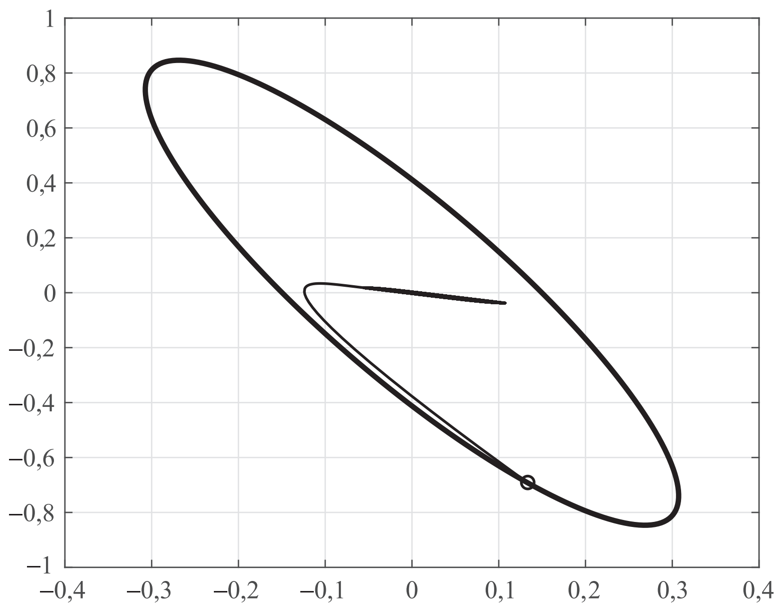

Рис. 2. Эллипс стабилизируемости и траектория системы из примера 1.

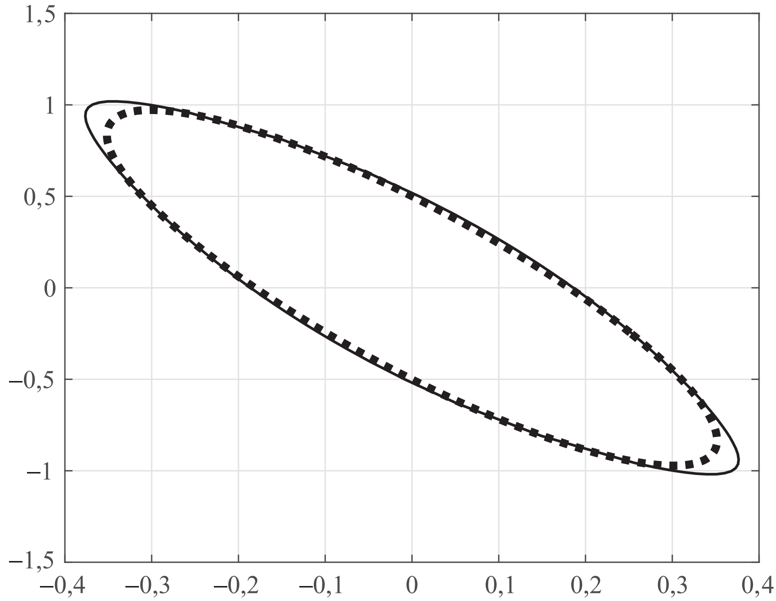

Рис. 3. Область стабилизируемости и эллипс стабилизируемости из примера 2.

а для $\gamma = 0{,}5\widehat{\gamma}$ имеем

$$\widehat{P}_{0,5} = \begin{pmatrix} 0{,}1456 & -0{,}3402 \\ -0{,}3402 & 1{,}1201 \end{pmatrix}.$$

На рис. 1 показаны найденные эллипсы стабилизируемости для системы (10).

На рис. 2 показана траектория системы (10) при некотором допустимом внешнем возмущении и соответствующий эллипс стабилизируемости при $\gamma = 0{,}95\widehat{\gamma}$.

Эти и последующие вычисления проводились в среде MATLAB с использованием программного пакета `cvx` [24].

Пример 2. Вновь обратившись к системе из примера 1 и воспользовавшись теоремой 3, находим область стабилизируемости системы (для $\gamma = 0{,}75\widehat{\gamma}$).

На рис. 3 сплошной линией показана найденная область стабилизируемости; для сравнения точечной линией показан найденный выше эллипс стабилизируемости, максимальный по критерию объема.

7. Заключение

В статье введены понятия эллипсоида стабилизируемости и области стабилизируемости квадратичной динамической системы с внешними возмущениями и предложен легко реализуемый с вычислительной точки зрения подход к их конструктивному построению. Полученные результаты обобщены на системы в дискретном времени. Дальнейшим естественным развитием полученных результатов будет служить их распространение на решение задачи синтеза управления билинейной системой, подверженной воздействию произвольных ограниченных внешних возмущений.

Более того, полученные результаты могут быть распространены на системы с многомерным управлением, а также на разнообразные робастные постановки задачи; в частности — со структурированной матричной неопределенностью в матрицах системы.

Автор признателен Б.Т. Поляку за интерес к работе, плодотворные обсуждения и полезные предложения.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Лемма П.1. Пусть $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $D \in \mathbb{R}^{n\times m}$ *— заданные матрицы,* $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $L(\cdot)$ *— матричнозначная функция матричного аргумента,* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. *Тогда множества*

$$\Omega_1 = \left\{(P,\alpha)\colon \quad L(P) + \alpha P + \frac{1}{\alpha} DD^\top \preccurlyeq 0, \quad \alpha > 0\right\}$$

и

$$\Omega_2 = \left\{(P,\alpha)\colon \quad L(P) + \alpha P + \frac{1}{\beta} DD^\top \preccurlyeq 0 \quad \textit{при некотором} \quad 0 < \beta \leqslant \alpha\right\}$$

совпадают.

Доказательство леммы П.1. Нетрудно видеть, что $\Omega_1 \subset \Omega_2$; покажем обратное включение.

Пусть $(P,\alpha) \in \Omega_2$, тогда существует $0 < \beta \leqslant \alpha$ такое, что

$$L(P) + \alpha P + \frac{1}{\beta} DD^\top \preccurlyeq 0.$$

При этом

$$L(P) + \alpha P + \frac{1}{\alpha} DD^\top = L(P) + \alpha P + \frac{1}{\beta} DD^\top + \underbrace{\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}\right)}_{\leqslant 0} DD^\top \preccurlyeq 0,$$

т.е. $(P,\alpha) \in \Omega_1$. Лемма П.1 доказана.

Доказательство теоремы 1. Введем в рассмотрение квадратичную форму

$$V(x) = x^\top Q x, \quad Q \succ 0.$$

Для того чтобы траектории $x(t)$ системы (3) не выходили за границу эллипсоида

$$\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R}^n\colon \quad V(x) \leqslant 1\},$$

достаточно потребовать выполнения следующего условия:

$$\dot V(x) \leqslant 0 \quad \text{при} \quad V(x,w) \geqslant 1 \ \text{ и всех допустимых } \|w\| \leqslant \gamma.$$

С учетом того, что производная функции $V(x)$ в силу системы (3) имеет вид

$$\begin{gathered}\dot V(x) = \dot x^\top Q x + x^\top Q \dot x = \\ = \left(Ax + Bxh^\top x + Dw\right)^\top Qx + x^\top Q\left(Ax + Bxh^\top x + Dw\right) = \\ = x^\top\left(A^\top Q + QA + QBxh^\top + hx^\top B^\top Q\right)x + w^\top D^\top Qx + x^\top QDw,\end{gathered}$$

это условие запишем как

$$\begin{gathered}x^\top\left(A^\top Q + QA + QBxh^\top + hx^\top B^\top Q\right)x + w^\top D^\top Qx + x^\top QDw \leqslant 0 \\ \text{при} \quad x^\top Qx \geqslant 1 \quad \text{и} \quad w^\top w \leqslant \gamma^2\end{gathered}$$

или, введя составной вектор

$$s = \begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+m},$$

в виде

$$\begin{gathered}s^\top \begin{pmatrix} A^\top Q + QA + QBxh^\top + hx^\top B^\top Q & QD \\ D^\top Q & 0 \end{pmatrix} s \leqslant 0 \\ \text{при} \quad s^\top \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} s \geqslant 1 \quad \text{и} \quad s^\top \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \gamma^{-2} I \end{pmatrix} s \leqslant 1.\end{gathered}$$

Воспользовавшись S-процедурой в ее достаточной части, приходим к условию

$$\begin{pmatrix} A^\top Q + QA + QBxh^\top + hx^\top B^\top Q & QD \\ D^\top Q & 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \beta \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \gamma^{-2} I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0$$

при некоторых $\alpha \geqslant \beta \geqslant 0$, т.е.

$$\begin{pmatrix} A^\top Q + QA + \alpha Q + QBxh^\top + hx^\top B^\top Q & QD \\ D^\top Q & -\beta\gamma^{-2} I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0.$$

Воспользовавшись леммой Шура и домножив получившееся соотношение слева и справа на матрицу $P = Q^{-1} \succ 0$, получим

$$AP + PA^\top + \alpha P + Bxh^\top P + Phx^\top B^\top + \frac{1}{\beta}\gamma^2 DD^\top \preccurlyeq 0. \tag{П.1}$$

Потребуем, чтобы матричное неравенство (П.1) выполнялось при всех x из эллипсоида

$$\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R}^n: \quad V(x) \leqslant 1\} = \left\{x \in \mathbb{R}^n: \quad x^\top P^{-1} x \leqslant 1\right\}.$$

Воспользовавшись леммой 2, приходим к эквивалентному матричному неравенству

$$AP + PA^\top + \alpha P + \frac{1}{\beta}\gamma^2 DD^\top + \varepsilon BPB^\top + \frac{1}{\varepsilon} Phh^\top P \preccurlyeq 0,$$

в котором фигурируют два числовых параметра $0 \leqslant \beta \leqslant \alpha$. Однако от одного них можно избавиться с помощью леммы П.1, положив $\beta = \alpha$ (см. подробнее [25, 26]).

Дважды воспользовавшись леммой Шура, окончательно получаем соотношение (5). Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 4. Введем в рассмотрение квадратичную форму

$$V(x) = x^\top Q x, \quad Q \succ 0.$$

Для того чтобы траектории $x(t)$ системы (8) не выходили за границу эллипсоида

$$\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R}^n: \quad V(x) \leqslant 1\},$$

достаточно потребовать выполнения следующего условия:

$$V(x_{\ell+1}) \leqslant 1 \quad \text{при} \quad V(x_\ell) \leqslant 1 \ \text{ и всех допустимых } \|w_\ell\| \leqslant \gamma.$$

С учетом того, что

$$\begin{gathered}
V(x_{\ell+1}) = x_{\ell+1}^\top Q x_{\ell+1} = \\
= \left(Ax_\ell + Bx_\ell h^\top x_\ell + Dw_\ell\right)^\top Q \left(Ax_\ell + Bx_\ell h^\top x_\ell + Dw_\ell\right) = \\
= x_\ell^\top A^\top Q A x_\ell + x_\ell^\top h x_\ell^\top B^\top Q A x_\ell + w_\ell^\top D^\top Q A x_\ell + x_\ell^\top A^\top Q B x_\ell h^\top x_\ell + \\
+ x_\ell^\top h x_\ell^\top B^\top Q B x_\ell h^\top x_\ell + w_\ell^\top D^\top Q B x_\ell h^\top x_\ell + x_\ell^\top A^\top Q D w_\ell + \\
+ x_\ell^\top h x_\ell^\top B^\top Q D w_\ell + w_\ell^\top D^\top Q D w_\ell = \\
= x_\ell^\top \left(A^\top Q A + A^\top Q B x_\ell h^\top + h x_\ell^\top B^\top Q A + h x_\ell^\top B^\top Q B x_\ell h^\top\right) x_\ell + \\
+ w_\ell^\top \left(D^\top Q A + D^\top Q B x_\ell h^\top\right) x_\ell + \\
+ x_\ell^\top \left(A^\top Q D + h x_\ell^\top B^\top Q D\right) w_\ell + w_\ell^\top D^\top Q D w_\ell,
\end{gathered}$$

это условие запишем как

$$\begin{gathered}
x_\ell^\top \left(A^\top Q A + A^\top Q B x_\ell h^\top + h x_\ell^\top B^\top Q A + h x_\ell^\top B^\top Q B x_\ell h^\top\right) x_\ell + \\
+ w_\ell^\top \left(D^\top Q A + D^\top Q B x_\ell h^\top\right) x_\ell + x_\ell^\top \left(A^\top Q D + h x_\ell^\top B^\top Q D\right) w_\ell + \\
+ w_\ell^\top D^\top Q D w_\ell \leqslant 1 \quad \text{при} \quad x_\ell^\top Q x_\ell \leqslant 1 \quad \text{и} \quad w_\ell^\top w_\ell \leqslant \gamma^2
\end{gathered}$$

или, введя составной вектор

$$s_\ell = \begin{pmatrix} x_\ell \\ w_\ell \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+m},$$

в виде

$$s^\top \begin{pmatrix} A^\top QA + A^\top QBx_\ell h^\top + hx_\ell^\top B^\top QA + hx_\ell^\top B^\top QBx_\ell h^\top & A^\top QD + hx_\ell^\top B^\top QD \\ D^\top QA + D^\top QBx_\ell h^\top & D^\top QD \end{pmatrix} s \leqslant 1$$

$$\text{при} \quad s^\top \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} s \leqslant 1 \quad \text{и} \quad s^\top \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \gamma^{-2} I \end{pmatrix} s \leqslant 1.$$

Воспользовавшись S-процедурой в ее достаточной части, приходим к условию

$$\begin{pmatrix} A^\top QA + A^\top QBx_\ell h^\top + hx_\ell^\top B^\top QA + hx_\ell^\top B^\top QBx_\ell h^\top & A^\top QD + hx_\ell^\top B^\top QD \\ D^\top QA + D^\top QBx_\ell h^\top & D^\top QD \end{pmatrix} -$$

$$- \alpha \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \beta \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \gamma^{-2} I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0$$

или

$$\begin{pmatrix} A^\top QA - \alpha Q + A^\top QBx_\ell h^\top + hx_\ell^\top B^\top QA + hx_\ell^\top B^\top QBx_\ell h^\top & A^\top QD + hx_\ell^\top B^\top QD \\ D^\top QA + D^\top QBx_\ell h^\top & D^\top QD - \beta\gamma^{-2} I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0$$

при некоторых $\alpha, \beta \geqslant 0$ таких, что $\alpha + \beta \leqslant 0$.

Полученное условие представим в виде

$$\begin{pmatrix} A^\top QA - \alpha Q + A^\top QBx_\ell h^\top + hx_\ell^\top B^\top QA & hx_\ell^\top B^\top Q & A^\top QD + hx_\ell^\top B^\top QD \\ QBx_\ell h^\top & -Q & 0 \\ D^\top QA + D^\top QBx_\ell h^\top & 0 & D^\top QD - \beta\gamma^{-2} I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0$$

или

$$\begin{pmatrix} A^\top QA - \alpha Q & 0 & A^\top QD \\ 0 & -Q & 0 \\ D^\top QA & 0 & D^\top QD - \beta\gamma^{-2} I \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} A^\top QB \\ QB \\ D^\top QB \end{pmatrix} x_\ell \begin{pmatrix} h^\top & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_\ell^\top \begin{pmatrix} B^\top QA & B^\top Q & B^\top QD \end{pmatrix} \preccurlyeq 0. \tag{П.2}$$

Потребуем, чтобы матричное неравенство (П.2) выполнялось при всех x_ℓ из эллипсоида

$$\mathcal{E} = \{x_\ell \in \mathbb{R}^n : \quad V(x_\ell) \leq 1\} = \left\{x_\ell \in \mathbb{R}^n : \quad x_\ell^\top Q x_\ell \leq 1\right\}.$$

Воспользовавшись леммой 2 и леммой Шура [27], приходим к эквивалентному матричному неравенству

$$\begin{pmatrix} A^\top QA-\alpha Q & 0 & A^\top QD & A^\top QB & h \\ 0 & -Q & 0 & QB & 0 \\ D^\top QA & 0 & D^\top QD-\beta\gamma^{-2}I & D^\top QB & 0 \\ B^\top QA & B^\top Q & B^\top QD & -\varepsilon Q & 0 \\ h^\top & 0 & 0 & 0 & -\dfrac{1}{\varepsilon}I \end{pmatrix} \preccurlyeq 0,$$

представимому в виде

$$\begin{pmatrix} -\alpha Q & 0 & 0 & 0 & h \\ 0 & -Q & 0 & QB & 0 \\ 0 & 0 & -\beta\gamma^{-2}I & 0 & 0 \\ 0 & B^\top Q & 0 & -\varepsilon Q & 0 \\ h^\top & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\varepsilon}I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A^\top \\ 0 \\ D^\top \\ B^\top \\ 0 \end{pmatrix} Q \begin{pmatrix} A & 0 & D & B & 0 \end{pmatrix} \preccurlyeq 0,$$

откуда по лемме Шура имеем, что

$$\begin{pmatrix} -\alpha Q & 0 & 0 & 0 & h & A^\top \\ 0 & -Q & 0 & QB & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta\gamma^{-2}I & 0 & 0 & D^\top \\ 0 & B^\top Q & 0 & -\varepsilon Q & 0 & B^\top \\ h^\top & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\varepsilon}I & 0 \\ A & 0 & D & B & 0 & -Q^{-1} \end{pmatrix} \preccurlyeq 0.$$

Обозначив $P = Q^{-1}$ и умножив полученное матричное неравенство слева и справа на матрицу

$$\begin{pmatrix} P & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix},$$

приходим к соотношению

$$\begin{pmatrix} -\alpha P & 0 & 0 & 0 & Ph & PA^\top \\ 0 & -P & 0 & BP & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta I & 0 & 0 & \gamma D^\top \\ 0 & PB^\top & 0 & -\varepsilon P & 0 & PB^\top \\ h^\top P & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\varepsilon}I & 0 \\ AP & 0 & \gamma D & BP & 0 & -P \end{pmatrix} \preccurlyeq 0.$$

Остается заметить, что аналогично непрерывному случаю (см. также [26]) можем положить $\beta = \beta_{\max} = 1 - \alpha$. Теорема 4 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Mohler R.R.* Bilinear Control Processes. N.Y.: Academic Press, 1973.
2. *Ryan E., Buckingham N.* On Asymptotically Stabilizing Feedback Control of Bilinear Systems // IEEE Trans. Automatic Control. 1983. V. 28. No. 8. P. 863–864.
3. *Chen L.K., Yang X., Mohler R.R.* Stability Analysis of Bilinear Systems // IEEE Trans. Automatic Control. 1991. V. 36. No. 11. P. 1310–1315.
4. *Čelikovský S.* On the Global Linearization of Bilinear Systems // Syst. Control Lett. 1990. V. 15. No. 5. P. 433-439.
5. *Čelikovský S.* On the Stabilization of the Homogeneous Bilinear Systems // Syst. Control Lett. 1993. V. 21. No. 6. P. 503–510.
6. *Tibken B., Hofer E.P., Sigmund A.* The Ellipsoid Method for Systematic Bilinear Observer Design // Proc. 13th IFAC World Congress. San Francisco, USA, June 30–July 5, 1996. P. 377–382.
7. *Коровин С.К., Фомичев В.В.* Асимптотические наблюдатели для некоторых классов билинейных систем с линейным входом // ДАН. Теория управления. 2004. Т. 398. № 1. С. 38–43.
8. *Belozyorov V.Y.* Design of Linear Feedback for Bilinear Control Systems // Int. J. Appl. Math. Comput. Sci. 2002. V. 11. No. 2. P. 493–511.
9. *Belozyorov V.Y.* On Stability Cones for Quadratic Systems of Differential Equations // J. Dyn. Control Syst. 2005. V. 11. No. 3. P. 329–351.
10. *Andrieu V., Tarbouriech S.* Global Asymptotic Stabilization for a Class of Bilinear Systems by Hybrid Output Feedback // IEEE Trans. Automatic Control. 2013. V. 58. No. 6. P. 1602–1608.
11. *Coutinho D., de Souza C.E.* Nonlinear State Feedback Design with a Guaranteed Stability Domain for Locally Stabilizable Unstable Quadratic Systems // IEEE Trans. Circuits Syst. I. Regular Papers. 2012. V. 59. No. 2. P. 360–370.
12. *Omran H., Hetel L., Richard J.-P., et al.* Stability Analysis of Bilinear Systems under Aperiodic Sampled-Data Control // Automatica. 2014. V. 50. No. 4. P. 1288–1295.
13. *Kung C.-C., Chen T.-H., Chen W.-C., et al.* Quasi-Sliding Mode Control for a Class of Multivariable Discrete Time Bilinear Systems // Proc. IEEE Int. Conf. on Systems, Man, and Cybernetics (SMC). Seoul, Korea. October 2012. P. 1878–1883.
14. *Athanasopoulos N., Bitsoris G.* Constrained Stabilization of Bilinear Discrete-Time Systems Using Polyhedral Lyapunov Functions // Proc. 17th IFAC World Congress. Seoul, Korea, July 6–11, 2008. P. 2502–2507.
15. *Athanasopoulos N., Bitsoris G.* Stability Analysis and Control of Bilinear Discrete-Time Systems: A Dual Approach // Proc. 18th IFAC World Congress. Milano, Italy, August 28–September 2, 2011. P. 6443–6448.
16. *Khlebnikov M.V.* Quadratic Stabilization of Bilinear Control Systems // 14th European Control Conf. (ECC'15). Linz, Austria, July 15–17, 2015. IEEE Catalog Number(USB): CFP1590U-USB. P. 160–164.
17. *Хлебников М.В.* Квадратичная стабилизация билинейной системы управления // АиТ. 2016. № 6. С. 47–60.

   Khlebnikov M.V. Quadratic Stabilization of Bilinear Control Systems // Autom. Remote Control. 2016. V. 77. No. 6. P. 980–991.

18. *Tarbouriech S., Queinnec I., Calliero T.R., et al.* Control Design for Bilinear Systems with a Guaranteed Region of Stability: An LMI-Based Approach // Proc. 17th Mediterranean Conf. on Control & Automation (MED'09). Thessaloniki, Greece. June 2009.
19. *Amato F., Cosentino C., Merola A.* Stabilization of Bilinear Systems via Linear State Feedback Control // IEEE Trans. Circuits Syst. II. Express Briefs. 2009. V. 56. No. 1. P. 76–80.
20. *Булгаков Б.В.* О накоплении возмущений в линейных колебательных системах с постоянными параметрами // ДАН СССР. 1946. Т. 5. Вып. 5. С. 339–342.
21. *Гноенский Л.С.* Задача Булгакова о накоплении возмущений / Задача Булгакова о максимальном отклонении и ее применение. Под ред. В.В. Александрова. М.: Изд-во МГУ им. М.В. Ломоносова, 1993.
22. *Жермоленко В.Н.* Максимальное отклонение колебательной системы второго порядка с внешним и параметрическим возмущениями // Изв. РАН. ТиСУ. 2007. № 3. С. 75–80.
23. *Petersen I.R.* A Stabilization Algorithm for a Class of Uncertain Linear Systems // Syst. Control Lett. 1987. V. 8. P. 351–357.
24. *Grant M., Boyd S.* CVX: Matlab software for disciplined convex programming, version 1.21. `http://stanford.edu/~boyd/cvx`
25. *Boyd S., El Ghaoui L., Feron E., et al.* Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. Philadelphia: SIAM, 1994.
26. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С.* Управление линейными системами при внешних возмущениях: Техника линейных матричных неравенств. М.: ЛЕНАНД, 2014.
27. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. М.: Мир, 1989.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Б.Т. Поляком.

Поступила в редакцию 07.08.2018

После доработки 27.09.2018

Принята к публикации 08.11.2018