

Управление в технических системах

© 2019 г. Б.Т. ПОЛЯК, д-р техн. наук (boris@ipu.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва),
Л.А. ШАЛБИ (lina.khamis@gmail.com)
(Московский физико-технический институт)

СТАБИЛИЗАЦИЯ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА В ТОЧКАХ ЛАГРАНЖА С МИНИМАЛЬНЫМ РАСХОДОМ ТОПЛИВА¹

Рассматривается движение космического аппарата (КА), описываемое дифференциальными уравнениями задачи трех тел для системы Земля — Луна. Цель состоит в том, чтобы стабилизировать его в окрестности коллинеарных лагранжевых точек, которые являются неустойчивыми точками равновесия, с помощью управления с минимальным расходом топлива. Используемый метод — это l_1 -оптимизация для линеаризованных и дискретизированных уравнений с терминальными условиями, равными точке назначения. Таким образом, задача преобразуется в задачу линейного программирования, и ее решение определяет импульсные управления для исходных уравнений трех тел. После этого КА на некоторое время остается в неконтролируемом полете, пока его отклонение от лагранжевой точки не превысит некоторого порога. Затем коррекция повторяется, тем самым КА удерживается в небольшой окрестности неустойчивой точки равновесия.

Ключевые слова: ограниченная задача трех тел, лагранжевы точки, метод l_1 -минимизации, оптимальное управление, стабилизация, неустойчивая точка равновесия.

DOI: 10.1134/S0005231019120109

1. Введение

Ограниченная задача трех тел описывает движение тела малой массы, притягиваемого двумя массивными телами, вращающимися вокруг своего центра масс (барицентра) по круговым орбитам под действием их взаимного гравитационного притяжения. Ее изучение восходит к Пуанкаре; трудность задачи заключается в том, что аналитического решения в общем случае не существует, а частные решения бывают необычайно сложными и носят хаотический характер [1]. В дальнейшем проблема подвергалась многочисленным исследованиям, отметим среди них [2–8].

Хорошо известно, что в этой проблеме имеется пять точек равновесия системы, они называются *лагранжевы точки* или *точки либрации*. Три из них являются коллинеарными, лежащими на оси x , а две другие точки образуют равносторонний треугольник с двумя телами m_1 и m_2 ($m_1 > m_2$). Рисунок 1 показывает точки Лагранжа по отношению к m_1 и m_2 .

¹ Работа первого автора выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант 16-11-10015).

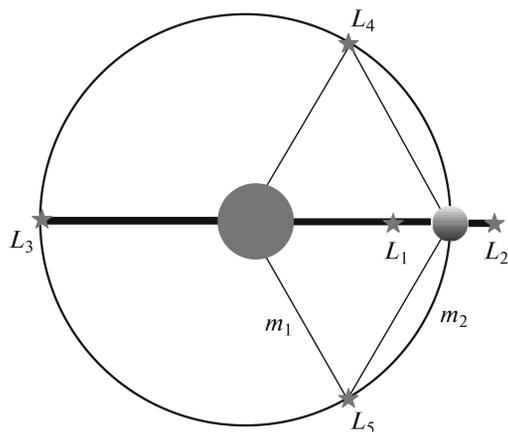


Рис. 1. Расположение лагранжевых точек.

Все эти точки равновесия являются неустойчивыми, между тем, во многих случаях полезно помещать космический аппарат (КА) в одну из этих точек для целей наблюдения и связи. Так, совсем недавно (в 2019 г.) китайские исследователи разместили КА в точке L_4 системы Земля – Луна для наблюдения за посадкой и движением лунохода, высаженного на обратной стороне Луны.

Настоящая работа посвящена методу стабилизации КА в точках Лагранжа системы Земля – Луна (хотя используемый подход применим и к другим задачам такого типа). При отклонении аппарата от точки равновесия на некоторую величину решается задача оптимального управления для его возвращения в эту точку при минимальном расходе топлива. Численное решение находится путем линеаризации и дискретизации уравнений движения с функционалом типа l_1 , отвечающим минимальному расходу топлива. Тем самым приходится решать задачу линейного программирования. Полученное импульсное управление применяется для исходной задачи; оно перемещает КА в точку, близкую к желаемой. После этого начинается неуправляемый полет КА, при возникновении существенного отклонения вновь включается коррекция. Таким образом, КА остается все время в небольшой окрестности точки равновесия ценой малого расхода топлива.

По сравнению с классическими численными методами для оптимального управления [9–12] используемый в работе метод учитывает специфическую форму негладкого минимизируемого функционала (l_1 -оптимизация). Ранее подобные методы применялись для расчета космических перелетов с минимальным расходом топлива [13–15], но не для стабилизации КА в точке равновесия.

2. Уравнения движения и лагранжевы точки

В данном исследовании рассматривается движение КА в системе Земля – Луна. Движение происходит за счет гравитационных сил Земли и Луны и реактивных двигателей КА. В безразмерных координатах (координата

тах x, y) уравнения движения будут представлять собой автономные нелинейные дифференциальные уравнения. Для безразмерной системы положим, что расстояние между m_1 и m_2 равно единице, $\mu = \frac{m_2}{m_1+m_2}$ ($0 \leq \mu \leq \frac{1}{2}$), а третье тело (КА) имеет пренебрежимо малую массу. Центром масс является начало координат, ось x соединяет точки m_1 и m_2 , а ось y перпендикулярна к ней, так что позиции m_1 и m_2 находятся в $(-\mu, 0, 0)$ и $(1 - \mu, 0, 0)$ соответственно. Масса Земли составляет $m_1 = 5,972 \times 10^{24}$ кг и масса Луны составляет $m_2 = 7,34767 \times 10^{22}$ кг, так что $\mu = 0,012155$, расстояние между Землей и Луной составляет 384400 км, а единица времени — 1 ч. При отсутствии тяги КА дифференциальные уравнения, описывающие его движение, хорошо известны (ограниченная задача трех тел) и в безразмерных координатах имеют вид

$$(1) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= u, & \dot{y} &= v, \\ \dot{u} &= 2v + x - (1 - \mu) \frac{x + \mu}{r_1^3} - \mu \frac{x + \mu - 1}{r_2^3}, \\ \dot{v} &= -2u + \left(1 - \frac{1 - \mu}{r_1^3} - \frac{\mu}{r_2^3} \right) y, \end{aligned}$$

где x, y — координаты КА, u, v — его горизонтальная и вертикальная скорости, а

$$r_1 = \sqrt{(x + \mu)^2 + y^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x + \mu - 1)^2 + y^2}$$

— его расстояния до Земли и Луны. В краткой записи уравнения движения имеют вид

$$(2) \quad \dot{X} = f(X),$$

где $X = [x, y, u, v]^T$.

Полная энергия системы (1) имеет следующий вид (см. [7, 10]):

$$E = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2} (x^2 + y^2) - \frac{1 - \mu}{r_1} - \frac{\mu}{r_2}.$$

При нулевом значении кинетической энергии оставшаяся часть E_0 полной энергии и константа Якоби C задаются формулой

$$(3) \quad E_0 = -\frac{1}{2} (x^2 + y^2) - \frac{1 - \mu}{r_1} - \frac{\mu}{r_2} = -\frac{C}{2}.$$

Контур и поверхность 3D-графика E_0 представлены на рис. 2,а и 2,б соответственно.

Точки равновесия для уравнений (1) являются лагранжевыми точками. В них все силы уравновешивают друг друга: $u = v = \dot{u} = \dot{v} = 0$. Первые три коллинеарные точки Лагранжа L_1, L_2 и L_3 определяются из этих уравнений

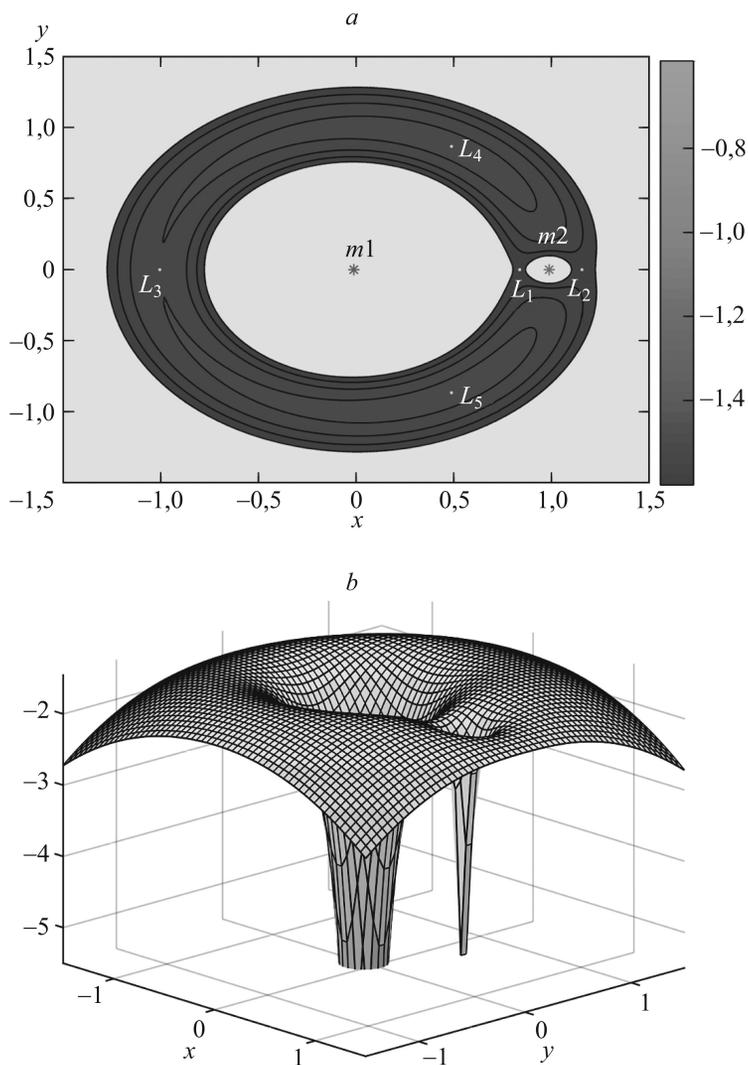


Рис. 2. a – Контурная диаграмма для E_0 вокруг лагранжевых точек; b – поверхность E_0 .

при $y = 0$ и даются условиями

$$\begin{aligned}
 & x - \frac{1 - \mu}{(x + \mu)^2} - \frac{\mu}{(x + \mu - 1)^2} = 0 \quad \text{для } x > 1 - \mu, \\
 (4) \quad & x - \frac{1 - \mu}{(x + \mu)^2} + \frac{\mu}{(x + \mu - 1)^2} = 0 \quad \text{для } -\mu < x < 1 - \mu, \\
 & x + \frac{1 - \mu}{(x + \mu)^2} + \frac{\mu}{(x + \mu - 1)^2} = 0 \quad \text{для } x < -\mu,
 \end{aligned}$$

Таблица 1. Координаты лагранжевых точек и собственные значения якобианов

Лагранжевы точки	Собственные значения
$L_1 = (0,83689, 0)$	$\lambda_{1,2} = \pm 2,33441j$ $\lambda_{3,4} = \pm 2,93209$
$L_2 = (1,15569, 0)$	$\lambda_{1,2} = \pm 1,86282j$ $\lambda_{3,4} = \pm 2,15864$
$L_3 = (-1,00506, 0)$	$\lambda_{1,2} = \pm 1,01042j$ $\lambda_{3,4} = \pm 0,17790$
$L_{4,5} = (0,48784, \pm \frac{\sqrt{3}}{2})$	$\lambda_{1,2} = \pm 0,95448j$ $\lambda_{3,4} = \pm 0,29825j$

а $L_{4,5}$ соответствуют $y \neq 0$, так что $1 - \frac{1-\mu}{r_1^3} - \frac{\mu}{r_2^3} = 0$ и $r_1 = r_2 = 1$, поэтому $x^* = 0,5 - \mu$ и $y^* = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$, т.е. $L_{4,5} = (0,5 - \mu, \pm \frac{\sqrt{3}}{2})$. В каждой из этих точек можно вычислить собственные значения соответствующих якобианов

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \dot{u}_x & \dot{u}_y & 0 & 2 \\ \dot{v}_x & \dot{v}_y & -2 & 0 \end{pmatrix}, \text{ где выражения для } \dot{u}_x, \dot{u}_y, \dot{v}_x \text{ и } \dot{v}_y \text{ могут быть упрощены:}$$

- при $y^* = 0$, $\dot{u}_x = 1 + \frac{2(1-\mu)}{|x^*+\mu|^3} + \frac{2\mu}{|x^*+\mu-1|^3}$, $\dot{u}_y = 0$ и $\dot{v}_x = 0$, $\dot{v}_y = 1 - \frac{(1-\mu)}{|x^*+\mu|^3} - \frac{\mu}{|x^*+\mu-1|^3}$ для первых трех точек L_1 , L_2 и L_3 ;
- при $x^* = 0,5 - \mu$ и $y^* = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ получаем $\dot{u}_x = \frac{3}{4}$, $\dot{u}_y = \pm \frac{3\sqrt{3}}{4}(1 - 2\mu)$ и $\dot{v}_x = \pm \frac{3\sqrt{3}}{4}(1 - 2\mu)$, $\dot{v}_y = \frac{9}{4}$ для $L_{4,5}$. В этих точках якобианы имеют равные собственные значения и могут быть записаны в терминах μ в виде

$$\lambda_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{-\sqrt{27\mu^2 - 27\mu + 1} - 1}, \quad \lambda_{3,4} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{27\mu^2 - 27\mu + 1} - 1}.$$

Для системы Земля – Луна лагранжевы точки и их собственные значения представлены в табл. 1, здесь $j = \sqrt{-1}$.

Из табл. 1 видно, что все точки Лагранжа неустойчивы. Численная проверка подтверждает это. Система решается численно методом Рунге-Кутты при условии, что КА начинает двигаться с нулевой начальной скоростью из начальной точки, близкой к L_1 . Оказывается, что КА будет удаляться от точки равновесия — он будет вращаться либо вокруг Земли, либо вокруг Луны. Например, на рис. 3 показаны две траектории: для начального положения $(x_{L_1}^* - 0,001, 0,001)$ это будет движение вокруг Земли, а для $(x_{L_1}^* + 0,001, 0,001)$ — вокруг Луны. Рисунок 4,а — это более подробно показанная траектория космического аппарата, вращающегося вокруг Луны из начального положения $(x_{L_1}^* + 0,001, 0,001)$. Видно, что траектории хаотичны, т.е. они сильно зависят от начальных условий и трудно предсказуемы. С другой стороны, КА, который находится в позиции, близкой к L_2 , будет вращаться вокруг Земли и Луны, как на рис. 4,а и рис. 4,б, а из точки близкой к L_3 он будет двигаться как на рис. 4,с.

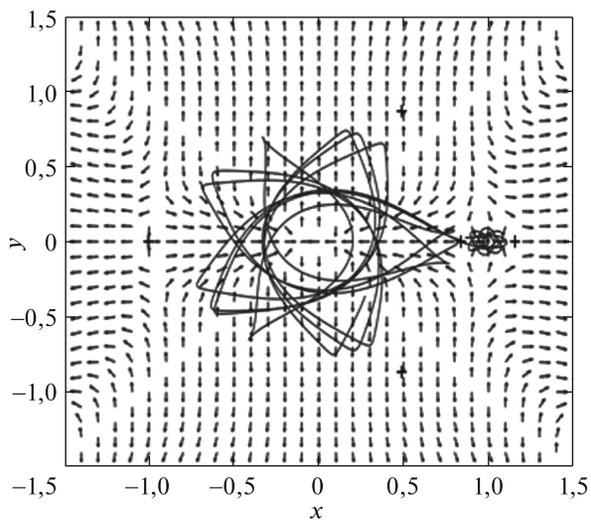


Рис. 3. Траектории космического аппарата в системе Земля – Луна из двух начальных точек, близких к L_1 .

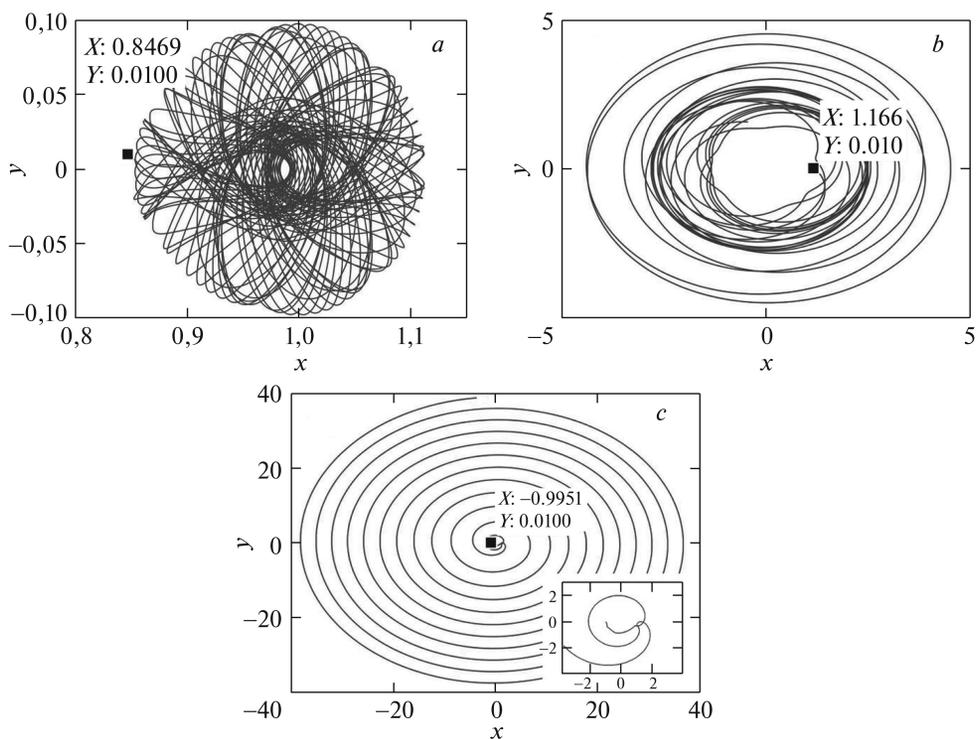


Рис. 4. *a* – Траектория для начальной точки, близкой к L_1 ; *b* – начальная точка близка к L_2 ; *c* – начальная точка близка к L_3 .

3. Оптимальное управление движением

Поскольку лагранжевы точки неустойчивы, для стабилизации КА в этих точках надо применять управление. Будем предполагать, что он оснащен реактивным двигателем с возможным изменением направления силы тяги. Горизонтальную направляющую силы тяги обозначим через U^1 , а вертикальную составляющую — через U^2 , тогда уравнения движения принимают вид

$$(5) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= u, & \dot{y} &= v, \\ \dot{u} &= 2v + x - (1 - \mu) \frac{x + \mu}{r_1^3} - \mu \frac{x + \mu - 1}{r_2^3} + U^1, \\ \dot{v} &= -2u + \left(1 - \frac{1 - \mu}{r_1^3} - \frac{\mu}{r_2^3} \right) y + U^2. \end{aligned}$$

Цель — из заданного начального условия вблизи точки равновесия (для конкретности L_1) вернуться к точке равновесия за фиксированное время T . Расход топлива за время управления пропорционален интегралу

$$(6) \quad J = \int_0^T (|U^1| + |U^2|) dt.$$

Таким образом, приходим к задаче оптимального управления — минимизировать функционал (6) на решениях дифференциального уравнения (5) при заданном начальном условии (вблизи L_1) и заданном терминальном условии (попадание в точку равновесия). Специфический негладкий вид функционала (6) приводит к тому, что оптимальным управлением в такого рода задачах являются импульсные управления (см. [16]). Это ограничивает возможности применения стандартных численных методов оптимального управления [9, 12]. Разрабатываемый здесь подход будет основываться на линеаризации и дискретизации уравнения и замене интеграла суммой модулей дискретизированных управлений. Тем самым численное решение сводится к задаче линейного программирования. Полученное кусочно-постоянное управление используется в исходной нелинейной системе (5).

Более подробно, схема алгоритма решения имеет следующий вид.

1. Заменяем переменные, чтобы задать начало координат в точке Лагранжа.
2. Линеаризуем уравнения в окрестности начала координат.
3. Дискретизируем линейную систему по времени.
4. Установим начальное условие (близкое положение к началу координат, например $Y_0 = [0,01 \ 0,01 \ 0 \ 0]^T$) и терминальное условие ($Y_N = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$).
5. Запишем целевую функцию в виде $J = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=1}^2 |U_n^k|$.
6. Возникающую задачу сведем к задаче линейного программирования; решим ее и найдем оптимальное решение $U_n, n = 1, \dots, N$.

7. Применим полученное управление как импульсное в исходной нелинейной системе (интегрируя ее более точным методом типа Рунге-Кутты), при этом получим близкое к нулю терминальное положение, и рассчитаем истинный расход топлива.

8. Продолжаем траекторию движения КА без управления начиная с полученного терминального значения и проверяем величину отклонения от точки L_1 . Если оно превышает значение r , переходим к п. 3.

Теперь опишем некоторые подробности. Вводим $y_1 = x - L_1$, $y_2 = y$, $y_3 = u$, $y_4 = v$. Тогда система (5) записывается как

$$(7) \quad \dot{Y} = f(Y) + BU,$$

где $Y = [y_1 \ y_2 \ y_3 \ y_4]^T$. Система (7) после линеаризации принимает вид

$$(8) \quad \dot{Y} = AY + BU,$$

где A — якобиева матрица системы (7) в начале координат. Затем линеаризованная система (8) дискретизируется с помощью прямого метода Эйлера с шагом δ и становится дискретной:

$$(9) \quad Y_{n+1} - Y_n = \delta(AY_n + BU_n).$$

Пусть $C = I + \delta A$, тогда

$$Y_{n+1} = CY_n + \delta BU_n = C^{n+1}Y_0 + \delta \sum_{i=0}^n C^i BU_{n-i}.$$

Конечномерная аппроксимация оптимизируемой функции J выглядит следующим образом:

$$(10) \quad J = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=1}^2 |U_n^k| \rightarrow \min.$$

Уравнение (9) вместе с граничными условиями записывается в виде

$$(11) \quad \sum_{i=0}^{N-1} C^{N-i-1} BU_i = \frac{Y_N - C^N Y_0}{\delta}.$$

Введем обозначения

$$D = [B \ CB \ \dots \ C^{N-1}B], \quad \bar{U} = [U_0 \ U_1 \ \dots \ U_{N-1}]^T, \quad E = \frac{Y_N - C^N Y_0}{\delta},$$

где $D \in \mathbb{R}^{4 \times 2(N-1)}$, $\bar{U} \in \mathbb{R}^{2 \times (N-1)}$ и $E \in \mathbb{R}^4$, тогда уравнение (11) может быть записано явно в виде

$$(12) \quad D\bar{U} = E.$$

Таким образом, получается задача минимизации функции (10) при ограничении типа равенств (12). Стандартные приемы (замена модуля разностью неотрицательных переменных) позволяют свести ее к задаче линейного программирования. Тем самым можно применить эффективный алгоритм LP в MatLab. Аналогичные методы для задач оптимального управления применялись в [14].

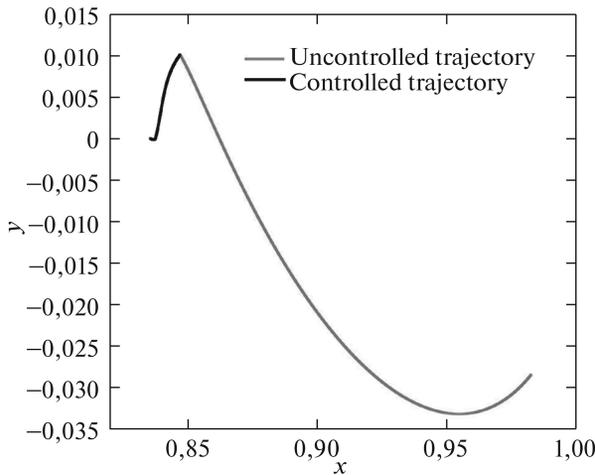


Рис. 5. Сравнение управляемой и неуправляемой траекторий.

При вычислениях бралось $T = 1$ и $N = 500$, $\delta = 1/500$ (т.е. $Y_{500} = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$). Начальное условие было взято $Y_0 = [0,01 \ 0,01 \ 0 \ 0]^T$ (напоминаем, что эти значения — в новых координатах, т.е. в отклонениях от лагранжевой точки и с нулевой начальной скоростью). Управление U имеет две компоненты U^1 и U^2 , в результате вычислений оказалось, что каждая из них имеет два ненулевых элемента:

$$U_0^1 = -13,85764, \quad U_{498}^1 = 3,02778, \quad U_0^2 = -5,89732, \quad U_{401}^2 = 4,73736$$

(все остальные равны нулю). Это согласуется с тем, что оптимальное решение должно иметь четыре ненулевых импульса (имеется четыре терминальных условия).

Теперь полученное управление U_n с ненулевыми импульсами в моменты $n = 0, 401, 498$ подставляется в исходную непрерывную систему, которая интегрируется методом Рунге-Кутты. При этом затраты топлива оказываются равными 27,520867. На рис. 5 сравниваются управляемые и неуправляемые траектории на плоскости x, y , которые стартуют из одной начальной позиции близкой к L_1 . Видно, что неуправляемая траектория удаляется далеко от L_1 , а управляемая траектория возвращается к L_1 .

После того как скорректируем траекторию и попадаем в точку, очень близкую к L_1 с малым расходом топлива, КА продолжит свое движение без управления. В результате он удаляется от точки равновесия. Когда это удаление превосходит некоторый порог (конкретно бралось значение $r = 0,01$), коррекция повторяется, применяется управление таким же образом, чтобы держать КА в окрестности L_1 . Для трехкратного цикла коррекций в табл. 2 представлены значения начальных и конечных условий, импульсные значения управления U_n и расход топлива. Тактом обозначен интервал времени, равный 0,002 (цикл управления — 500 тактов).

На рис. 6 и 7 видно поведение корректируемых и неуправляемых участков траектории для шести коррекций. После второй коррекции траектория имеет повторяющуюся форму с очень небольшими отличиями.

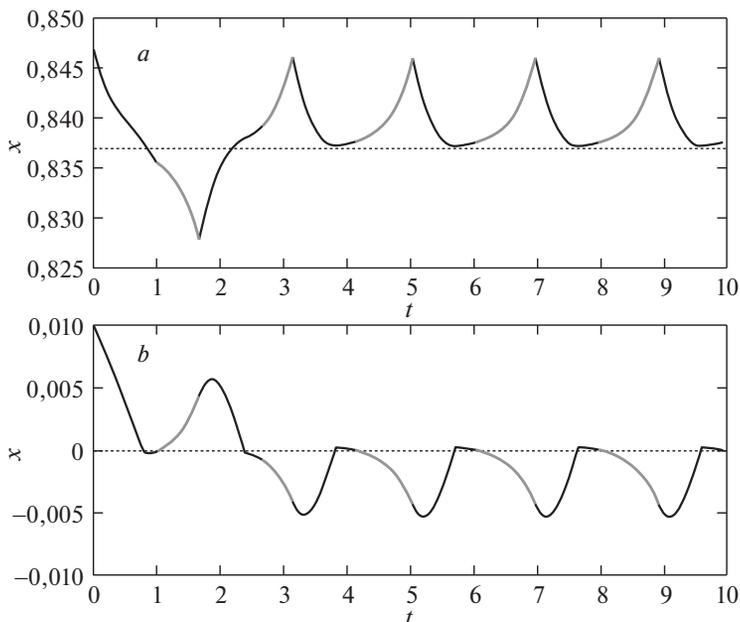


Рис. 6. Изменение x и y во времени на $[0, 10]$.

В размерных величинах точка L_1 находится на расстоянии 321703 км от барицентра. Исходное положение $x = 325547$ км и $y = 3844$ км. После первой коррекции космический аппарат оказывается на расстоянии 321491 км от барицентра (около 212 км) от L_1 .

Аналогичные вычисления были проделаны для стабилизации КА в точках L_2 и к L_3 за время $[0, 10]$. Рисунки 8 и 9 показывают коррекцию траек-

Таблица 2. Начальные и конечные условия, управления и расход топлива для трех коррекций траектории

	Y_0	Y_N	$U_n^{(1)}$	$U_n^{(2)}$	Расход топлива
Первая коррекция	$\begin{bmatrix} 0,84689 \\ 0,01 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,835539 \\ -0,00007 \\ -0,00417 \\ 0,00227 \end{bmatrix}$	$U_0^{(1)} = -13,85764$ $U_{498}^{(1)} = 3,02778$	$U_0^{(2)} = -5,89732$ $U_{401}^{(2)} = 4,73736$	27,52086
Неуправляемый полет 333 тактов					
Вторая коррекция	$\begin{bmatrix} 0,82786 \\ 0,00436 \\ -0,02523 \\ 0,01373 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,83917 \\ -0,00077 \\ 0,00676 \\ -0,00327 \end{bmatrix}$	$U_0^{(1)} = 28,13806$ $U_{498}^{(1)} = 0,145938$	$U_0^{(2)} = 5,82087$ $U_{401}^{(2)} = 2,43383$	36,53279
Неуправляемый полет 237 тактов					
Третья коррекция	$\begin{bmatrix} 0,84607 \\ -0,00407 \\ 0,02734 \\ -0,01263 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,83762 \\ 0,00001 \\ 0,00196 \\ -0,00124 \end{bmatrix}$	$U_0^{(1)} = -29,60898$ $U_{499}^{(1)} = -0,01489$	$U_{340}^{(2)} = -1,78599$ $U_{341}^{(2)} = -6,22046$ $U_{499}^{(2)} = -0,01489$	37,64523
Неуправляемый полет 446 тактов					

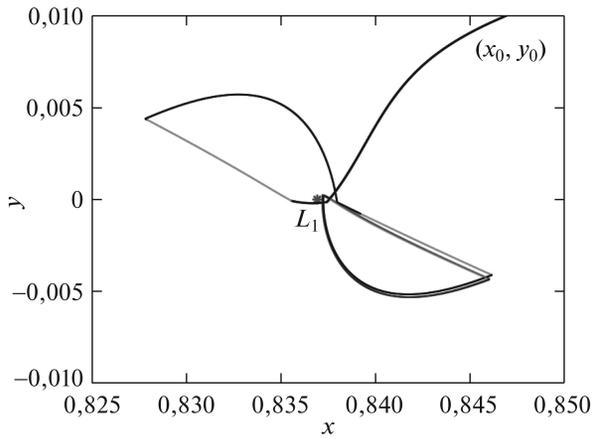


Рис. 7. Траектория на плоскости x, y .

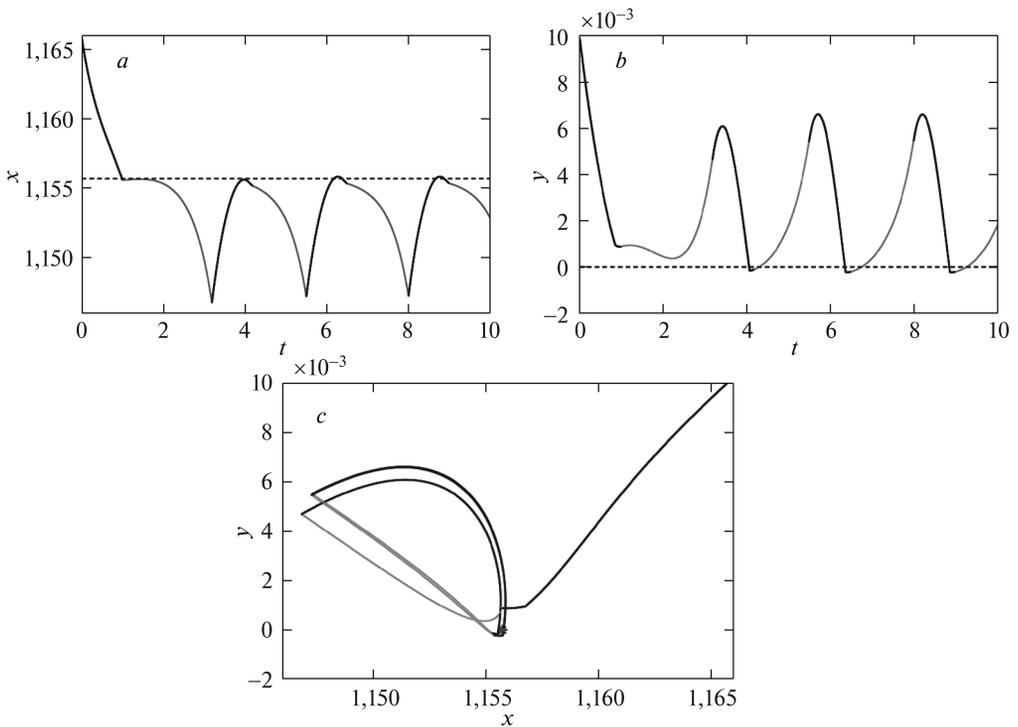


Рис. 8. Начальное положение близко к L_2 : a – изменение x во времени; b – изменение y во времени; c – траектория на плоскости x, y для четырех коррекций.

торией с начальными условиями $(L_2 + 0,01, 0,01, 0, 0)$ и $(L_3 + 0,01, 0,01, 0, 0)$ соответственно. В близкой позиции к L_2 управление является более точным, чем для L_1 и L_3 . За то же время $t \in [0, 10]$ достаточно всего четырех коррекций, чтобы держаться ближе к L_2 и L_3 . Управление в окрестности L_3 имеет необычную форму, затем оно повторяется, как показано на рис. 9, c .

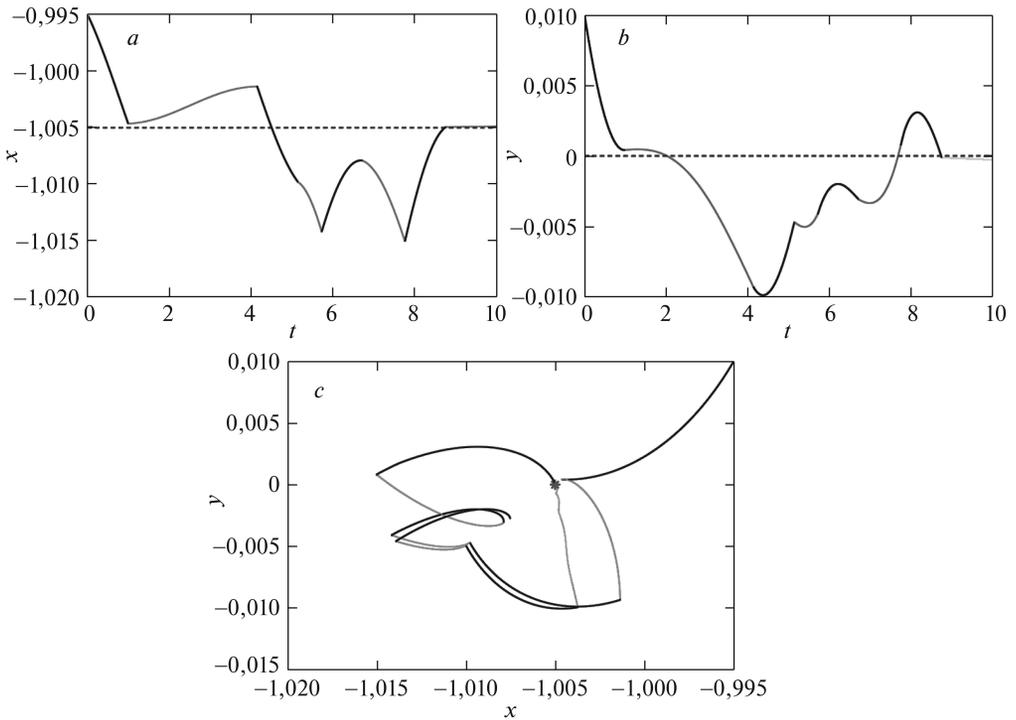


Рис. 9. Начальное положение близко к L_3 : a – изменение x во времени; b – изменение y во времени; c – траектория на плоскости x, y для шести коррекций.

Расход топлива для первых шести коррекций, нужных чтобы удержать КА в небольшой окрестности L_2 составляет $\{23,84050, 29,79414, 29,34968, 29,31751, 29,25641, 29,28363\}$ и $\{18,68749, 16,85702, 16,42808, 19,67782, 14,68712, 16,88330\}$ для L_3 . Видно, что стабилизация в L_1 более затратна, чем в L_2 и L_3 , эта разница обусловлена преодолением сил, действующих на КА. В окрестности L_1 сильнее сказывается эффект гравитации Земли и Луны, а гравитационные силы меньше в L_2 и еще меньше в L_3 . Поэтому в L_3 – наименьший необходимый расход топлива для стабилизации.

Расход топлива при принятой стратегии коррекции сравнивался с другой стратегией, когда вместо l_1 критерия $J = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=1}^2 |U_n^k|$ применялся более привычный l_2 критерий $J = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=1}^2 |U_n^k|^2$. При этом решение оказывалось неимпульсного вида (реактивный двигатель все время включен на этапе коррекции), а расход топлива оказывался на 15–20% выше.

4. Вывод

В работе для стабилизации космического аппарата в точках либрации предлагается стратегия управления, основанная на чередовании этапов коррекции и неуправляемого полета. При этом для коррекции с минимальным расходом топлива используется метод l_1 -минимизации. Решение соответствующей задачи оптимального управления основывается на ее линейризации

и дискретизации с последующим сведением к задаче линейного программирования. Проведенные вычисления для системы Земля – Луна и трех лагранжевых точек L_1 , L_2 и L_3 показали высокую эффективность предлагаемой методики и малый суммарный расход топлива на стабилизацию.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Poincaré H.* The Three-Body Problem and the Equations of Dynamics / Poincaré's Foundational Work on Dynamical Systems Theory. N.Y.: Springer, 2017.
2. *Маркеев А.П.* Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978.
3. *Маршалл К.* Задача трех тел. Ижевск: РХД, 2004.
4. *Пуанкаре А.* Лекции по небесной механике. М.: Наука, 1965.
5. *Broucke R. A.* Periodic orbits in the restricted three body problem with earth-moon masses. NASA, Technical Report 82-1168, 1968.
6. *Murray C. D.* Dynamical effects of drag in the circular restricted three-body problem: I. Location and stability of Lagrangian equilibrium points // *Icarus*. 1994. V. 112. No. 2. P. 465–484.
7. *Szebehely V.* Theory of Orbit: The Restricted Problem of Three Bodies. Elsevier, 2012.
8. *Valtonen M., Karttunen H.* The Three-Body Problem. Cambridge University Press, 2006.
9. *Федоренко Р.П.* Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука, 1978.
10. *Pini G., Seidelmann K.P.* Celestial Mechanics and Astrodynamics: Theory and Practice. Berlin: Springer, 2016.
11. *Miele A.* Flight mechanics. V.1: Theory of Flight Paths; V. 2: Theory of Optimal Flight Paths. Addison-Wesley, 1962.
12. *Мухарлямов Р.Г.* Моделирование процессов управления, устойчивость и стабилизация систем с программными связями // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2015. № 1. С. 15–28.
13. *Alesova I., Babadzanjanz K., Pototskaya I., et al.* Fuel optimal control of non-linear oscillations of a satellite on elliptical orbit // Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conf.), Int. Conf. IEEE, 2016.
14. *Tabak D., Kuo B.C.* Optimal Control by Mathematical Programming. SRL Publishing Company, 1971.
15. *Serra R., Arzelier D., Brehard M., et al.* Fuel-optimal impulsive fixed-time trajectories in the linearized circular restricted 3-body-problem // IAF Astrodynamics Symposium in 69th Int. Astronautical Congr., 2018. P. 1–9.
16. *Миллер Б.М., Рубинович Е.Я.* Оптимизация динамических систем с импульсными управлениями. М.: Наука, 2005.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Л.Б. Рапопортом.

Поступила в редакцию 06.03.2019

После доработки 24.06.2019

Принята к публикации 18.07.2019