Автоматика и телемеханика, № 11, 2019

Робастное, адаптивное и сетевое управление

© 2019 г. Р.П. АГАЕВ, д-р физ.-мат. наук (agaraf3@gmail.com)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

О РОЛИ СОБСТВЕННОГО ПРОЕКТОРА ЛАПЛАСОВСКОЙ МАТРИЦЫ В ЗАДАЧЕ ДОСТИЖЕНИЯ КОНСЕНСУСА В МНОГОАГЕНТНЫХ СИСТЕМАХ ВТОРОГО ПОРЯДКА[1]

Рассматривается проблема консенсуса в многоагентных системах второго порядка при отсутствии остовного исходящего дерева в орграфе зависимостей. Доказана теорема, согласно которой, асимптотическое поведение системы однозначно определяется собственным проектором лапласовской матрицы орграфа зависимостей. Обобщены результаты, ранее полученные автором, а также результаты, полученные в работах В. Рена и Э. Аткинс. Предложен метод регуляризации для случая, когда орграф зависимостей не содержит остовного исходящего дерева.

Ключевые слова: многоагентные системы второго порядка, консенсус, регуляризация, собственный проектор, лапласовская матрица орграфа.

DOI: 10.1134/S0005231019110072

1. Введение

Известно, что в многоагентных системах первого порядка с информационной связью консенсус достигается тогда и только тогда, когда ноль является простым собственным значением соответствующей лапласовской матрицы. Это условие эквивалентно наличию остовного исходящего дерева в орграфе зависимостей. Поскольку при нарушении данного условия консенсус не достигается, алгебраические свойства таких орграфов (в том числе соответствующие лапласовские матрицы) мало изучены. Изучение асимптотического свойства системы с орграфом зависимостей, не содержащим остовного дерева, с помощью собственного проектора лапласовской матрицы или ее спектра позволяет “сопоставить системе некий наиболее естественный консенсус, достигаемый при минимально возможном изменении” [1]. За последние годы была опубликована серия работ (см., например, [1–3]), где изучаются асимптотические свойства многоагентных систем с орграфами зависимостей, не содержащими остовного дерева. В этих работах наряду с алгебраическими свойствами системы также изучается подпространство начальных характеристик,

[1] Исследование асимптотики модели консенсуса второго порядка проведено при поддержке гранта Российского научного фонда № 19-19-00673, предоставленного ИПУ им. В.А. Трапезникова РАН. Выражение для динамики регуляризованной модели второго порядка получено при частичной поддержке программы президиума РАН №30 “Теория и технологии многоуровневого децентрализованного группового управления в условиях конфликта и кооперации”.

векторы которого приводят к консенсусу. В [1] доказано, что асимптотические свойства системы однозначно определяются собственным проектором лапласовской матрицы орграфа зависимостей. Собственные проекторы лапласовских матриц можно вычислить как итеративно за конечное число шагов меньше порядка самой матрицы, так и с помощью предела некоторых выражений. На сегодня задачи достижения консенсуса в многоагентных системах с орграфами зависимостей, не содержащими остовного дерева, в основном исследованы в работах автора данной статьи и его соавтора П.Ю. Чеботарева. Задача регуляризации для дискретных моделей достижения консенсуса тесно связана с задачей PageRank. Безусловно, итеративную регуляризацию для произвольной стохастической матрицы [4] также можно отнести к аналогичным задачам. Добавление “фоновых связей” не обязательно приводит к полному изменению исходной структуры. Также в задаче PageRank изменение исходной стохастической матрицы за счет добавления стохастической матрицы с одинаковыми весами физически не приводит к новым связям между хостами в Интернете, а всего лишь проводится на алгоритмическом уровне. Конечно, при этом в моделях достижения консенсуса добавление “фоновых связей” производится только для достижения консенсуса, которого до этого не было.

Заметим, что в задачах достижения консенсуса в многоагентной системе с *неориентированным графом* консенсус достигается тогда и только тогда, когда граф связный. Напомним, что граф называется связным, если любая пара его вершин соединена маршрутом. Система с несвязным графом разделяется на две непересекающиеся части. Например, для системы с графом зависимостей с множествами вершин $\{a,\, b,\, c,\, d\}$ и ребер $\{\{a,b\},\{c,d\}\}$ говорить о каком-либо консенсусе довольно трудно. Иначе обстоит дело для случая орграфа, который не содержит остовного дерева, но между любыми двумя вершинами всегда существует полупуть, т.е. маршрут без учета направления дуг, в котором все вершины различны.

В настоящей работе рассматриваются многоагентные системы второго порядка, которые впервые были изучены в [5, 6]. В таких системах единственность нулевого собственного значения лапласовской матрицы является необходимым, но не достаточным условием для консенсуса. Тем не менее в этих моделях при определенном ограничении на параметр γ (коэффициент пересчета (scaling factor)), входящий в протокол системы, консенсус также определяется единственным нормированным левым собственным вектором лапласовской матрицы. Здесь будем изучать более общий случай, когда ограничение на параметр γ удовлетворяет определенному условию, но кратность нулевого собственного значения лапласовской матрицы больше единицы. Выведено явное выражение, к которому асимптотически стремятся характеристики агентов. Полученный результат является обобщением леммы 4.1 из [5] и теоремы о лесах и консенсусе [3].

В [1] было рассмотрено несколько протоколов консенсуса в многоагентных системах с орграфом зависимостей, не содержащим остовного дерева. Эти протоколы позволяют регуляризировать модель таким образом, что при любом векторе начальных значений в системе может быть достигнут консенсус. В настоящей работе один из таких протоколов применим для многоагентной системы второго порядка и для достаточно большого значения времени t выведем выражение для асимптотического консенсуса. Согласно предложенному протоколу к исходному орграфу зависимостей добавляется полный граф с весами δ/n, а консенсус определяется пределом при δ, стремящимся к нулю.

Структура работы. В разделе 2 введены необходимые понятия и рассмотрены вспомогательные результаты. В частности, приведено предложение о регуляризации с помощью "фоновых связей" для систем первого порядка. Основные результаты изложены в разделе 3, где доказана теорема 1 об асимптотическом поведении системы второго порядка. Здесь также доказана теорема 2, обобщающая регуляризацию с помощью "фоновых связей" для системы второго порядка.

2. Необходимые понятия и вспомогательные результаты

Введем некоторые понятия из теории графов. Орграф называется сильносвязным или сильным, если любые две его вершины взаимно достижимы. Любой максимальный по включению сильный подграф данного орграфа называется его сильной компонентой или бикомпонентой. Базовой бикомпонентой называют такую бикомпоненту орграфа, в которую не входят дуги извне. Подграф ориентированного графа называют остовным, если множества вершин графа и подграфа совпадают. Исходящее дерево – это ориентированное корневое дерево, содержащее направленные пути из корня во все другие вершины. Легко показать, что из множества вершин всех базовых бикомпонент имеются пути во все вершины орграфа и что орграф содержит остовное дерево тогда и только тогда, когда он содержит единственную базовую бикомпоненту.

Рассмотрим дифференциальную модель первого порядка поиска консенсуса, описываемую системой уравнений

$$\dot{x}_i(t) = -\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(x_i(t) - x_j(t)\right), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

где $x_i(t)$ – характеристика i-го агента. $A = (a_{ij})$ – матрица влияния j-го агента на i-го. Приняв A за матрицу смежности орграфа зависимостей (влияний), последний можно назвать орграфом зависимостей многоагентной системы с лапласовской матрицей

$$L = \operatorname{diag}(A\mathbf{1}) - A,$$

где $\mathbf{1} = (1, \ldots, 1)^{\mathrm{T}}$.

Заметим, что систему (1) можно представить в матричном виде как

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = -L\,\boldsymbol{x}(t), \tag{2}$$

где $\boldsymbol{x}(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))^{\mathrm{T}}$.

Пусть $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – произвольная квадратная матрица, $\mathcal{R}(A)$ и $\mathcal{N}(A)$ – соответственно образ и ядро A. Пусть $\nu = \operatorname{ind} A$ – *индекс* A, то есть наименьшее $k \in \{0, \ldots n\}$, при котором $\operatorname{rank} A^{k+1} = \operatorname{rank} A^k$ ($A^0 \equiv I$, где I – единичная матрица порядка n).

Собственным проектором матрицы A, *соответствующим собственному значению* 0, (или просто *собственным проектором* A) называют такой проектор (идемпотентную матрицу) $A^{\vdash}$, что $\mathcal{R}(A^{\vdash}) = \mathcal{N}(A^{\nu})$ и $\mathcal{N}(A^{\vdash}) = \mathcal{R}(A^{\nu})$.

Асимптотическое поведение системы (2) при орграфе зависимостей, не содержащем остовного дерева описывается следующим предложением.

Предложение 1. *Если* $\boldsymbol{x}(t)$ *– решение системы* (2), *то*

$$\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{x}(t) = \lim_{t\to\infty} e^{-Lt}\boldsymbol{x}(0) = L^{\vdash}\boldsymbol{x}(0).$$

Отметим, что первое равенство следует из представления решения системы дифференциальных уравнений, а доказательство второго равенства непосредственно следует из теоремы о лесах и консенсусе (теорема 1 в [3]).

Рассмотрим протокол поиска консенсуса для непрерывной модели первого порядка, согласно которому к исходному орграфу зависимостей добавляется полный взвешенный орграф "фоновых связей" с весами $\frac{\delta}{n}$:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = -(L + \delta K)\,\boldsymbol{x}(t), \tag{3}$$

где $K = I - E$ – лапласовская матрица полного графа с весами $1/n$, $E = \frac{1}{n}(1\dots1)^{\mathrm{T}}(1\dots1)$ – матрица порядка n с элементами $1/n$.

Следующее утверждение следует из теоремы 3 в [1]:

Предложение 2. *Если* $x(t)$ *– решение системы* (3), *то*

$$\lim_{\delta\to0+}\lim_{t\to\infty} x(t) = EL^{\vdash}x(0).$$

Согласно предложению 2 при добавлении слабых "фоновых связей" и устремлении силы связей к нулю консенсус всегда достигается и его значение определяется произведением $EL^{\vdash}$. Формально для получения консенсуса нужно вычислить скалярное произведение вектора начальных значений с вектором средних значений столбцов собственного проектора лапласовской матрицы, которая совпадает с нормированной матрицей *максимальных исходящих лесов* (более подробно, см. лемму 1 в [1]).

3. Модели второго порядка

Рассмотрим дифференциальную модель второго порядка [5]

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_i &= \zeta_i,\\ \dot{\zeta}_i &= u_i,\end{aligned}$$

где ξ_i и ζ_i – состояние и скорость i-го агента, а u_i – управление, определяемое протоколом

$$u_i = -\sum_{j=1}^{n} a_{ij}[(\xi_i - \xi_j) + \gamma(\zeta_i - \zeta_j)],$$

γ – коэффициент пересчета (scaling factor).

В матричной форме данный протокол имеет следующее представление:

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\zeta} \end{bmatrix} = \Gamma \begin{bmatrix} \xi \\ \zeta \end{bmatrix}, \tag{4}$$

где

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n\times n} & I_n \\ -L & -\gamma L \end{bmatrix}.$$

Цель протокола (4) – при $t \to \infty$ обеспечить $|\xi_i - \xi_j| \to 0$ и $|\zeta_i - \zeta_j| \to 0$.

Доказательство следующей вспомогательной леммы приведено в [7] (см. предложение 7).

Лемма 1. *Если $L^{\vdash}$ – собственный проектор матрицы L, то линейная оболочка столбцов матрицы $L^{\vdash}$ совпадает с ядром матрицы L, а линейная оболочка строк $L^{\vdash}$ – с левым собственным подпространством нулевого значения матрицы L.*

Предположим, что γ удовлетворяет условию

$$\gamma^2 > \max_{\mu_i \neq 0} \frac{1}{\operatorname{Re}(\mu_i)} \frac{\operatorname{Im}^2(\mu_i)}{\operatorname{Im}^2(\mu_i) + \operatorname{Re}^2(\mu_i)}, \tag{5}$$

где μ_i – ненулевое собственное значение соответствующей лапласовской матрицы L.

Условие (5) в той или иной форме приведено в некоторых работах (например, [8, 9]) и является необходимым и достаточным условием достижения консенсуса при равенстве единице кратности нулевого собственного значения лапласовской матрицы.

Теорема 1. *Пусть для γ выполняется условие* (5), *а кратность нулевого собственного значения лапласовской матрицы L равна m. Если $[\xi^{\mathrm{T}}, \zeta^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ – решение системы* (4), *то для достаточно большого значения t имеет место*

$$\begin{bmatrix} \xi(t) \\ \zeta(t) \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes L^{\vdash} \begin{bmatrix} \xi(0) \\ \zeta(0) \end{bmatrix}, \tag{6}$$

где $L^{\vdash}$ – собственный проектор для L, $\otimes$ – знак произведения Кронекера.

Доказательство приведено в Приложении.

Теорема была доказана конструктивно и заодно было установлено, что геометрическая кратность нулевого собственного значения матрицы Γ равна алгебраической кратности нулевого собственного значения лапласовской матрицы L. Поскольку число нулевых собственных значений Γ равно $2m$ (см. (8) в [5]), а каждой паре нулевых собственных значений матрицы Γ соответствует жорданова клетка размерности не меньше двух, очевидно, что у матрицы Γ нет нулевого блока размерности больше двух (иначе кратность нуля для Γ была бы больше $2m$). Таким образом, из доказанной теоремы, в частности, следует, что индекс матрицы Γ равен 2.

Согласно лемме 4.1 из [5] асимптотический консенсус не достигается для любого вектора начальных значений $x(0)$, если кратность нуля матрицы Γ больше 2. Проведем регуляризацию [1], добавив к исходному орграфу зависимостей полный граф "фоновых связей" с весами δ/n.

Важно отметить, что в отличие от моделей первого порядка матрица $\lim_{t\to\infty} e^{t\Gamma}$ не является собственным проектором для Γ. Однако собственный проектор для матрицы Γ согласно теореме 3.1 из [10] можно определить как $(I - t\Gamma^2)^{-1}$ для достаточно большого значения t и можно доказать (например, непосредственной проверкой определения собственного проектора для Γ^2), что собственный проектор $\Gamma^{\vdash}$ для Γ равен

$$\Gamma^{\vdash} = \begin{bmatrix} L^{\vdash} & \mathbf{0}_{n\times n} \\ \mathbf{0}_{n\times n} & L^{\vdash} \end{bmatrix}.$$

Многоагентную систему второго порядка с добавленными фоновыми связями представим как

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\zeta} \end{bmatrix} = \Gamma_K \begin{bmatrix} \xi \\ \zeta \end{bmatrix}, \tag{7}$$

где

$$\Gamma_K = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n\times n} & I_n \\ -(L+\delta K) & -\gamma(L+\delta K) \end{bmatrix}.$$

Теорема 2. Пусть для γ выполняется условие (5)*, а кратность нулевого собственного значения лапласовской матрицы L равна m. Если $[\xi^{\mathrm{T}}, \zeta^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ – решение системы* (7)*, то для достаточно большого значения t и $\delta \to 0$ имеет место*

$$\begin{bmatrix} \xi(t) \\ \zeta(t) \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes EL^{\vdash} \begin{bmatrix} \xi(0) \\ \zeta(0) \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Выражение (8) можно считать обобщением системы (2), полученной для многоагентной системы первого порядка.

Замечание. Лемма 4.1 из [5] является частным случаем теоремы 1. Согласно этой лемме в многоагентной системе второго порядка с протоколом (4) асимптотический консенсус достигается тогда и только тогда, когда кратность нулевого собственного значения матрицы Γ равна двум, а действительные части остальных собственных значений отрицательны.

Пример. Рассмотрим систему из шести агентов с орграфом зависимостей, представленным на рис. 1, с двумя базовыми бикомпонентами $\{1,\ 2,\ 3\}$ и $\{4,\ 5\}$.

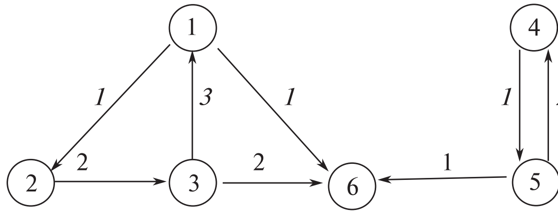

Рис. 1. Орграф зависимостей.

Данному орграфу соответствуют лапласовская матрица L и матрица Г:

$$L = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \Gamma = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n\times n} & I_n \\ -L & -\gamma L \end{bmatrix}.$$

По спектру матрицы L с условием (5) определяем пороговое значение γ, обеспечивающее отрицательность действительных частей ненулевых собственных значений матрицы Г: $\gamma > 0{,}2462$.

Определим собственный проектор матрицы L:

$$L^{\vdash} = \begin{bmatrix} 0{,}1818 & 0{,}5455 & 0{,}2727 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}1818 & 0{,}5455 & 0{,}2727 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}1818 & 0{,}5455 & 0{,}2727 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}3333 & 0{,}6667 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}3333 & 0{,}6667 & 0 \\ 0{,}1364 & 0{,}4091 & 0{,}2045 & 0{,}0833 & 0{,}1667 & 0 \end{bmatrix}.$$

Согласно теореме 1 определяем правые собственные и присоединенные векторы нулевого собственного значения матрицы Г:

$$w_1 = [1,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0{,}75,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0]^{\mathrm{T}};$$
$$w_2 = [0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0{,}75]^{\mathrm{T}};$$
$$w_3 = [0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 0{,}25,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0]^{\mathrm{T}};$$
$$w_4 = [0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 0{,}25]^{\mathrm{T}}.$$

Аналогичным образом определяем левые собственные v_2, v_4 и присоединенные векторы v_1, v_3 нулевого собственного значения матрицы Г:

$$v_1 = [0{,}1818,\ 0{,}5455,\ 0{,}2727,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0]^{\mathrm{T}};$$
$$v_2 = [0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0{,}1818,\ 0{,}5455,\ 0{,}2727,\ 0,\ 0,\ 0]^{\mathrm{T}};$$
$$v_3 = [0,\ 0,\ 0,\ 0{,}3333,\ 0{,}6667,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0]^{\mathrm{T}};$$
$$v_4 = [0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0{,}3333,\ 0{,}6667,\ 0]^{\mathrm{T}}.$$

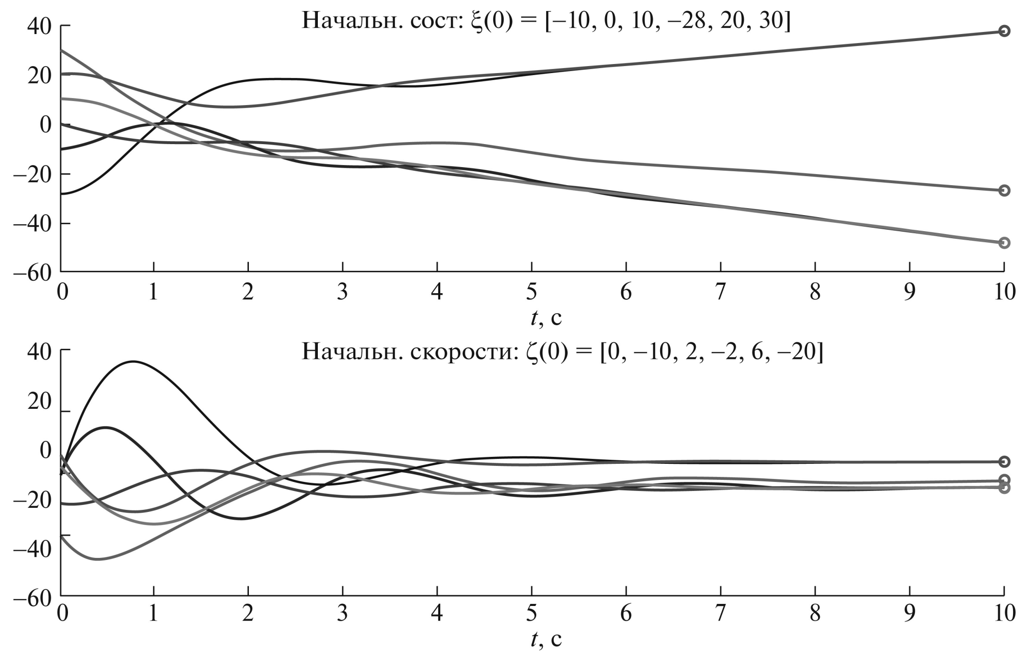

Рис. 2. Состояния и скорости агентов до добавления фоновых связей: $\gamma = 0{,}5$; $T = 10$ с.

Согласно условию (П.2) матрица $e^{\Gamma t}$ для $t = 100$ определяется выражением

$$
e^{100\Gamma} \approx [w_1, w_2, w_3, w_4] \begin{bmatrix} 1 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^{\mathrm{T}} \\ v_2^{\mathrm{T}} \\ v_3^{\mathrm{T}} \\ v_4^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} =
$$

$$
= \begin{bmatrix}
0{,}1818 & 0{,}5455 & 0{,}2727 & 0 & 0 & 0 & 18{,}182 & 54{,}545 & 27{,}273 & 0 & 0 & 0 \\
0{,}1818 & 0{,}5455 & 0{,}2727 & 0 & 0 & 0 & 18{,}182 & 54{,}545 & 27{,}273 & 0 & 0 & 0 \\
0{,}1818 & 0{,}5455 & 0{,}2727 & 0 & 0 & 0 & 18{,}182 & 54{,}545 & 27{,}273 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0{,}3333 & 0{,}6667 & 0 & 0 & 0 & 0 & 33{,}333 & 66{,}667 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0{,}3333 & 0{,}6667 & 0 & 0 & 0 & 0 & 33{,}333 & 66{,}667 & 0 \\
0{,}1364 & 0{,}4091 & 0{,}2046 & 0{,}0833 & 0{,}1667 & 0 & 13{,}636 & 40{,}909 & 20{,}455 & 8{,}333 & 16{,}667 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}1818 & 0{,}5455 & 0{,}2727 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}1818 & 0{,}5455 & 0{,}2727 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}1818 & 0{,}5455 & 0{,}2727 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}3333 & 0{,}6667 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}3333 & 0{,}6667 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}1364 & 0{,}4091 & 0{,}2045 & 0{,}0833 & 0{,}1667 & 0
\end{bmatrix}.
$$

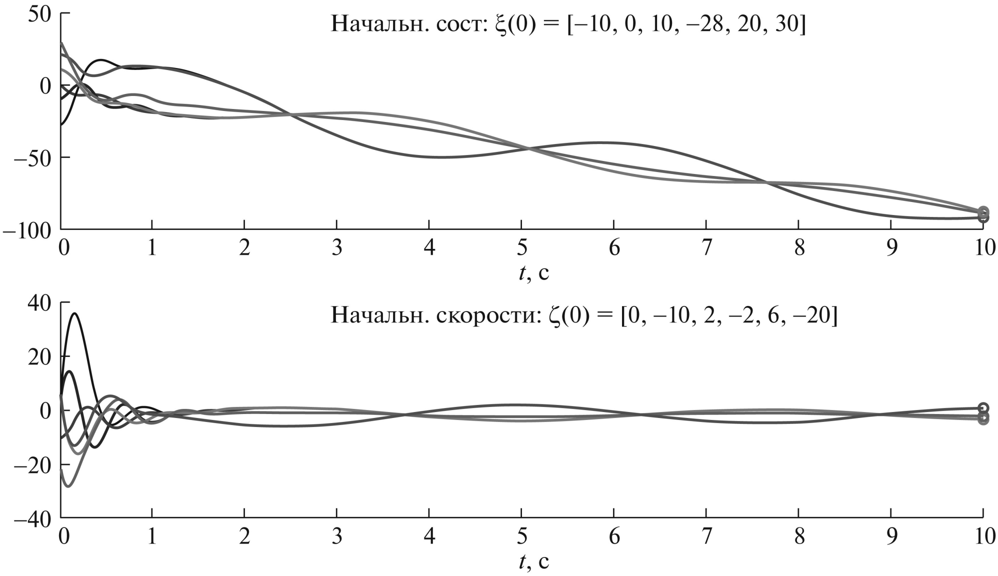

Рис. 3. Состояния и скорости агентов после добавления фоновых связей: $\delta/6 = 0{,}01$; $\gamma = 0{,}5$; $T = 50$ с.

На рис. 2 приведены состояния и скорости системы, орграф зависимостей которой приведен на рис. 1. Заметим, что до добавления "фоновых связей" при начальном состоянии $\xi(t) = [-10,\ 0,\ 10,\ -28,\ 20,\ 30]^{\mathrm{T}}$, начальной скорости $\zeta(t) = [0,\ -10,\ 2,\ -2,\ 6,\ -20]^{\mathrm{T}}$ и $\gamma = 0{,}5$ в системе консенсус не достигается.

Для $t = 200$ значения состояний и скоростей агентов сильно отличаются:

$$[\xi(t)^{\mathrm{T}}, \zeta(t)^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} = \\ = [-981,\ -981,\ -981,\ 671,\ 671,\ -568,\ -4{,}9,\ -4{,}9,\ -4{,}9,\ 3{,}3,\ 3{,}3,\ -2{,}8]^{\mathrm{T}}.$$

Аналогичные зависимости после добавления "фоновых связей", обеспечивающих достижение консенсуса, приведены на рис. 3 для $t = 50$, $\gamma = 0{,}5$, $\delta = 6/100$.

Для $t = 200$, $\delta = 6/100$ (итоговый вес 0,01) приближенный консенсус задается следующим вектором:

$$[\xi(t)^{\mathrm{T}}, \zeta(t)^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} = \\ = [-362,\ -362,\ -362,\ -363,\ -363,\ -362,\ -1{,}9,\ -1{,}9,\ -1{,}9,\ -1{,}7,\ -1{,}7,\ -1{,}8,]^{\mathrm{T}}.$$

4. Заключение

В многоагентных системах, как обычно, под достижением консенсуса имеется в виду асимптотическое совпадение характеристик *для любого* вектора начальных значений. Однако если усилить это условие, т.е. потребовать, чтобы консенсус достигался для векторов начальных значений только из определенной области, то наличие остовного дерева не будет необходимым условием для согласия. Такая задача может быть решена только с помощью собственного проектора лапласовской матрицы. С другой стороны, если достижение консенсуса подразумевает сходимость при любом векторе начальных значений, то "фоновая связь" может быть вложена в протокол системы: если орграф зависимостей содержит дерево, то добавление "фоновых связей" ничего не меняет и консенсус однозначно определится собственным проектором; а при отсутствии остовного дерева консенсус определится произведением $EL^{\vdash}$.

В работе доказано, что в многоагентных системах второго порядка асимптотическое поведение системы при некотором ограничении на параметр γ однозначно определяется собственным проектором лапласовской матрицы и вектором начальных характеристик. Полученный результат, во-первых, обобщает ранее полученный результат В. Рена и Э. Аткинс; во-вторых, позволяет применить методы регуляризации, разработанные для многоагентных систем первого порядка с орграфом зависимостей, не содержащим остовного дерева.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. Согласно лемме 1 линейно независимые столбцы $p_1, \ldots, p_m$ матрицы $L^{\vdash}$ составляют базис ядра матрицы L. Поэтому каждый вектор $w_{2i-1} = [p_i^{\mathrm{T}},\ \mathbf{0}_{1\times n}]^{\mathrm{T}}$, $i = 1, \ldots, m$, является собственным вектором нулевого собственного значения для матрицы Γ.

С другой стороны, из

$$\Gamma^2 = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n\times n} & I_n \\ -L & -\gamma L \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} -L & -\gamma L \\ \gamma L^2 & -L+\gamma^2 L^2 \end{bmatrix}$$

следует, что $w_{2i} = (\ \mathbf{0}_{1\times n},\ p_i^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$, $i = 1, \ldots, m$, является присоединенным вектором для данного нулевого собственного значения матрицы Γ, т.е. $\Gamma w_{2i} = w_{2i-1}$.

Векторы $w_1, w_2, \ldots, w_{2n}$ нормируем так, чтобы их компоненты, соответствующие базовым бикомпонентам, были равными единице. Напомним, что *базовая бикомпонента* орграфа – это максимальный по включению сильный подграф, в который не входят дуги извне.

Аналогичным образом составляем левые собственные $v_2^{\mathrm{T}}, v_4^{\mathrm{T}}, \ldots, v_{2m}^{\mathrm{T}}$ и присоединенные $v_1^{\mathrm{T}}, v_3^{\mathrm{T}}, \ldots, v_{2m-1}^{\mathrm{T}}$ векторы нулевого собственного значения матрицы Γ. Пусть $q_1, \ldots, q_m$ — линейно независимые строки матрицы $L^{\vdash}$. Согласно лемме 1 эти векторы составляют базис ядра L как левые собственные векторы. Тогда каждый вектор $v_{2i} = (\mathbf{0}_{1\times n},\ q_i^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$, $i = 1, \ldots, m$, будет левым собственным вектором, а векторы $v_{2i-1} = (q_i^{\mathrm{T}},\ \mathbf{0}_{1\times n})^{\mathrm{T}}$, $i = 1, \ldots, m$, — присоединенными для матрицы Γ.

Предположим, что определены все собственные и присоединенные векторы $(w_1, w_2, \ldots, w_{2n})$ и $(v_1, v_2, \ldots, v_{2n})$ для матрицы Γ. Тогда матрицу Γ можно представить через ее жорданову форму следующим образом:

$$\Gamma = [w_1, w_2, \ldots, w_{2n}] \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & \mathbf{0}_{1\times(2n-2m)} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \mathbf{0}_{1\times(2n-2m)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & \mathbf{0}_{1\times(2n-2m)} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \mathbf{0}_{1\times(2n-2m)} \\ \mathbf{0}_{(2n-2m)\times1} & \mathbf{0}_{(2n-2m)\times1} & \ldots & \mathbf{0}_{(2n-2m)\times1} & \mathbf{0}_{(2n-2m)\times1} & C \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} v_1^{\mathrm{T}} \\ v_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ v_{2n}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix},$$

где матрица C – жордановые блоки для ненулевых собственных значений матрицы Γ.

Как следует из решения 1, асимптотическое поведение системы однозначно определяется

$$\lim_{t\to\infty} \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \zeta(t) \end{bmatrix} = \lim_{t\to\infty} e^{\Gamma t} \begin{bmatrix} \xi(0) \\ \zeta(0) \end{bmatrix}.$$

С другой стороны, согласно условию теоремы действительные части всех собственных значений матрицы C (ее диагональные элементы) отрицательны. Поэтому при $t \to \infty$ имеет место $e^{Ct} \to \mathbf{0}_{(2n-2m)\times(2n-2m)}$ и для достаточно большого значения t можно положить $e^{Ct} \approx \mathbf{0}_{(2n-2m)\times(2n-2m)}$. Итак, для достаточно большого значения t получим

$$e^{\Gamma t} \approx [w_1, w_2, \ldots, w_{2n}]\times \tag{П.1}$$

$$\times \begin{bmatrix} 1 & t & \ldots & 0 & 0 & \mathbf{0}_{1\times(2n-2m)} \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & \mathbf{0}_{1\times(2n-2m)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & t & \mathbf{0}_{1\times(2n-2m)} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & \mathbf{0}_{1\times(2n-2m)} \\ \mathbf{0}_{(2n-2m)\times1} & \mathbf{0}_{(2n-2m)\times1} & \ldots & \mathbf{0}_{(2n-2m)\times1} & \mathbf{0}_{(2n-2m)\times1} & \mathbf{0}_{(2n-2m)\times(2n-2m)} \end{bmatrix} \times$$

$$\begin{bmatrix} v_1^{\mathrm{T}} \\ v_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ v_{2n}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}.$$

Заметим, что последнее выражение не зависит от векторов $w_{2m+1}, \ldots, w_{2n}$ и $v_{2m+1}, \ldots, v_{2n}$. Поэтому (П.1) можно записать как

$$
e^{\Gamma t} \approx [w_1, w_2, \ldots, w_{2m}] \begin{bmatrix} 1 & t & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & t \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^{\mathrm{T}} \\ v_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ v_{2m}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}. \tag{П.2}
$$

Из определений векторов w_i и v_i, $i = 1, \ldots, m$, для достаточного большого t получаем

$$
e^{\Gamma t} \approx \begin{bmatrix} L^{\vdash} & L^{\vdash} t \\ \mathbf{0}_{n\times n} & L^{\vdash} \end{bmatrix}.
$$

Следующая эквивалентная запись полученной формулы завершает доказательство теоремы:

$$
\begin{bmatrix} L^{\vdash} & L^{\vdash} t \\ \mathbf{0}_{n\times n} & L^{\vdash} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes L^{\vdash}.
$$

Доказательство теоремы 2. В утверждении теоремы предполагается выполнение условия (5) для матрицы L. Однако если это условие выполняется для L, то оно выполнится и для матрицы $L + \delta K$ при любом $\delta \geqslant 0$. Действительно, пусть μ – собственное значение матрицы L, а x – соответствующий ему собственный вектор. Очевидно, что $Lx = L(x + c) = \mu x$, где c – вектор с одинаковыми компонентами. Тогда

$$
\begin{aligned}
(L + \delta K)x = (L + \delta I - \delta E)x = Lx + \delta x - \delta E x = \mu x + \delta x - \bar{x} = \\
= (\mu + \delta)x + \bar{x} = (\mu + \delta)(x + \bar{x}_o) = (L + \delta K)(x + \bar{x}_o),
\end{aligned} \tag{П.3}
$$

где $\bar{x}_o = \bar{x}\frac{1}{\mu+\delta}$ – вектор с одинаковыми компонентами.

Из (П.3) непосредственно следует, что $(\mu + \delta)$ – собственное значение матрицы $L + \delta K$. Поэтому если условие (5) выполняется для матрицы L, то для достаточно маленького значения δ это же условие будет выполняться для $L + \delta K$.

Доказательство (8) следует из теоремы 1 и предложения 2. Действительно,

$$
\begin{bmatrix} EL^{\vdash} & EL^{\vdash} t \\ \mathbf{0}_{n\times n} & EL^{\vdash} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes EL^{\vdash}.
$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Агаев Р.П., Чеботарев П.Ю.* Модели латентного консенсуса // АиТ. 2017. № 1. С. 106–120.

   Agaev R.P., Chebotarev P.Yu. Models of Latent Consensus // Autom. Remote Control. 2017. V. 78. No. 1. P. 88–99.

2. *Агаев Р.П., Чеботарев П.Ю.* О методе проекции для непрерывной модели консенсуса // АиТ. 2015. № 8. С. 140–152.

   Agaev R.P., Chebotarev P.Yu. The Projection Method for Continuous-time Consensus Seeking // Autom. Remote Control. 2015. V. 76. No. 8. P. 1436–1445.
3. *Chebotarev P., Agaev R.* The Forest Consensus Theorem // IEEE Transact. Autom. Control. 2014. V. 59. No. 9. P. 2475–2479.
4. *Поляк Б.Т., Тремба А.А.* Решение задачи PageRank для больших матриц с помощью регуляризации // АиТ. 2012. № 11. С. 144–166.

   Polyak B.T., Tremba A.A. Regularization-based Solution of the PageRank Problem for Large Matrices // Autom. Remote Control. 2012. V. 73. No. 11. P. 1877–1894.
5. *Ren W., Atkins E.* Distributed multi-vehicle coordinated control via local information exchange // Int. J. Robust Nonlinear Control. 2007. V. 17. No. 10–11. P. 1002–1033.
6. *Olfati-Saber R.* Flocking for multi-agent dynamic systems: Algorithms and theory // IEEE Transactions on Automatic Control. 2006. V. 51. No. 3. P. 401–420.
7. *Чеботарев П.Ю., Агаев Р.П.* Согласование характеристик в многоагентных системах и спектры лапласовских матриц орграфов // АиТ. 2009. № 3. С. 136–151.

   Chebotarev P.Yu., Agaev R.P. Coordination in Multiagent Systems and Laplacian Spectra of Digraphs // Autom. Remote Control. 2009. V. 70. No. 3. P. 469–483.
8. *Yu W., Chen G., Cao M.* Some Necessary and Sufficient Conditions for Second-order Consensus in Multi-agent Dynamical Systems // Automatica. 2010. V. 46. No. 6. P. 1089–1095.
9. *Liu H., Xie G., Wang L.* Necessary and Sufficient Conditions for Solving Consensus Problems of Double-integrator Dynamics via Sampled Control //Int. J. Robust Nonlinear Control. 2010. V. 20. No. 15. P. 1706–1722.
10. *Meyer C.D.* Limits and the Index of a Square Matrix // SIAM J. App. Math. 1974. V. 26. P. 469–478.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.Л. Фрадковым.

Поступила в редакцию 27.07.2018

После доработки 16.04.2019

Принята к публикации 18.07.2019