

Нелинейные системы

© 2019 г. А.И. МАЛИКОВ, д-р физ.-мат. наук (a_i_malikov@mail.ru)
(Казанский национальный исследовательский технический

университет им. А.Н. Туполева – КАИ,
Институт механики и машиностроения – обособленное структурное
подразделение ФИЦ “Казанский научный центр” РАН)

ОЦЕНИВАНИЕ СОСТОЯНИЯ И СТАБИЛИЗАЦИЯ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ С НЕОПРЕДЕЛЕННЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ И ВОЗМУЩЕНИЯМИ¹

Рассматриваются неавтономные дискретные системы управления с неопределенными нелинейностями, подверженные воздействию ограниченных внешних возмущений. На основе метода матричных систем сравнения и техники разностных линейных матричных неравенств развивается подход к задачам оценивания состояния, ограниченности относительно заданных множеств, подавления начальных отклонений и неопределенных возмущений с помощью линейной обратной связи по состоянию. Предлагается способ синтеза управления с переменными коэффициентами, обеспечивающий гарантированный переход из одного заданного эллипсоида в другой при любых возмущениях, ограниченных по L_∞ норме.

Ключевые слова: неавтономные дискретные системы с липшицевыми нелинейностями, неопределенные возмущения, оценивание состояния, ограниченность на конечном интервале, синтез управления.

DOI: 10.1134/S0005231019110035

1. Введение

Для оценивания вектора фазового состояния динамических систем широко используются развитые в [1–6] методы эллипсоидов, которые дают локально-оптимальные или минимаксные гарантированные эллипсоидальные оценки множества процессов с учетом неопределенных начальных отклонений, внешних возмущений и параметрических изменений. Эти методы позволяют найти внешние или внутренние аппроксимирующие эллипсоиды, которые являются оптимальными относительно некоторого заданного критерия (след, объем, диаметр и т.д.). Применение этих методов позволяет решать задачи синтеза управления, обеспечивающего подавление произвольных ограниченных внешних возмущений, с использованием техники линейных матричных

¹ Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 18-08-01045а) (разделы 2–4) и Программы фундаментальных исследований РАН № 7 “Новые разработки в перспективных направлениях энергетики, механики и робототехники” (раздел 5, 6).

неравенств (ЛМН) [7]. Методом инвариантных эллипсоидов [7–9] синтез оптимального (или субоптимального) регулятора сводится к поиску наименьшего инвариантного эллипсоида замкнутой системы. Эти методы наиболее эффективны для линейных стационарных систем управления. В [10, 11] техника ЛМН использовалась уже в целях робастной стабилизации систем с неопределенной нелинейностью, однако без учета воздействия внешних возмущений. В [12, 13] этот подход применен для нахождения инвариантных эллипсоидов и синтеза линейных регуляторов (в том числе робастных) по состоянию для одного класса нелинейных автономных систем (с липшицевыми и квази-липшицевыми нелинейностями) при учете неопределенных ограниченных внешних возмущений. В [14–18] метод матричных систем сравнения (МСС), предложенный в [19] для анализа устойчивости регулируемых систем типа Лурье, развит для анализа динамики и оценивания состояния нелинейных регулируемых систем с неопределенными возмущениями, параметрическими и структурными изменениями. В [20] дано обоснование метода матричных систем сравнения для оценивания состояния дискретных моделей систем управления, доказывается теорема о матричных разностных неравенствах. Изучаются свойства матричных разностных уравнений с правой частью, монотонной относительно конуса неотрицательно определенных матриц. Предлагаются способы построения разностных матричных систем сравнения и процедуры получения эллипсоидальных оценок множества дискретных процессов.

Дискретные системы, представленные разностными уравнениями, не являются аналогами непрерывных систем и имеют свои особенности, которые вносят специфику в методы анализа и синтеза. Эти особенности отмечались рядом авторов. В частности, в [21] отмечено, что существование дискретного процесса в прямом времени не означает существование процесса в обратном времени, а определение сопряженной системы должно быть несколько модифицировано по сравнению с непрерывным случаем, чтобы установить дуальную связь между управляемостью и наблюдаемостью. В [22] говорится, что сразу же после открытия и доказательства принципа максимума Понтрягина были сделаны попытки нахождения “дискретной” версии принципа максимума по аналогии с непрерывным, которые, как оказалось, не давали в общем случае ни необходимых, ни достаточных условий оптимальности. В результате потребовалось уточнять и доказывать принцип максимума, а также обосновывать метод динамического программирования непосредственно для дискретных систем. Поэтому неудивительно, что несмотря на имеющиеся аналогии в публикациях разработка и обоснование методов анализа, оценивания состояния и синтеза управления, производятся как для непрерывных, так и для дискретных систем.

Для стабилизации неавтономных дискретных систем обычно используются законы управления с изменяющимися во времени коэффициентами. В публикациях имеются примеры использования законов управления с зависимыми от времени коэффициентами для линейных автономных систем, например линейный квадратичный регулятор на конечном интервале времени [23, 24]. Для определения коэффициентов регулятора на основе метода динамического программирования требуется численное решение матричного разностного

уравнения Риккати в обратном времени [23], что представляет определенные трудности, в частности предполагает наличие информации о параметрах модели в будущем времени. Предпринимались попытки найти способы синтеза регуляторов, коэффициенты которого определяются на основе численного решения матричного уравнения в прямом времени. В [25] был предложен метод эвристического динамического программирования на основе последовательного приближения функции Беллмана для решения задачи оптимального управления дискретных систем в прямом времени. В дальнейшем в ряде публикаций [26–28 и др.] для аппроксимации функции Беллмана использовались нейронные сети с итерационным обучением и улучшением управления в реальном времени даже без использования математической модели. В то же время в последние годы для линейных неавтономных систем активно развиваются методы анализа ограниченности на конечном интервале времени и синтеза управления, основанные на технике разностных линейных матричных уравнений и неравенств [29].

В данной статье на основе метода матричных систем сравнения [14–18, 20] и техники разностных линейных матричных неравенств (РЛМН) [29] предлагаются способы оценивания состояния, анализа устойчивости и ограниченности относительно заданных множеств на конечном интервале времени, нахождения инвариантных эллипсоидов и синтеза управления в виде обратной связи по состоянию (с зависимыми от времени коэффициентами) как для автономных, так и неавтономных нелинейных дискретных систем. Получены разностное матричное уравнение (РМУ) и РЛМН, решения которых определяют эволюционирующие во времени инвариантные эллипсоиды для процессов исходной системы при любых нелинейностях, удовлетворяющих заданному ограничению, и любых внешних возмущениях, ограниченных по норме. Условия устойчивости и ограниченности относительно заданных множеств, определяющих качество функционирования исходной системы, представляются в виде ограничений на частные решения РМУ или РЛМН на всем рассматриваемом интервале времени. Задача синтеза сводится к численному решению РЛМН с оптимизацией в каждый момент времени следа матрицы инвариантного эллипсоида, ограничивающего состояния или выход. Отметим, что аналогичные задачи для непрерывных неавтономных систем с липшицевыми нелинейностями и неопределенными возмущениями были рассмотрены в [30].

В автономном случае оценки предельного множества в виде инвариантного эллипсоида могут быть получены на основе численного решения РЛМН, численного итерирования РМУ или численного решения алгебраических матричных уравнений, являющихся уравнениями равновесия для РМУ. При этом от РЛМН можно перейти к алгебраическим ЛМН, которые оказываются аналогичными ЛМН, полученным для автономного случая методом инвариантных эллипсоидов [12]. На простом примере демонстрируются возможности и эффективность предлагаемого подхода для решения указанных задач.

Отметим, что задачи нахождения эллипсоида, ограничивающего при $t \rightarrow \infty$ состояния или выход автономной системы с липшицевыми и квазилипшицевыми нелинейностями и неопределенными возмущениями, были решены в [12, 13], где также предложены способы синтеза управления с посто-

янными коэффициентами из условия минимальности по критерию следа предельного (при $t \rightarrow \infty$) инвариантного эллипсоида. Однако эти методы имеют существенный недостаток, поскольку не могут обеспечить требуемое ограничение на управление при начальных отклонениях, выходящих за границу полученного предельного инвариантного эллипсоида.

Развиваемый в статье подход будет использовать квадратичную функцию Ляпунова с переменными параметрами, которая представляет в пространстве состояний последовательность эллипсоидов. В случае обратной связи по состоянию эти эллипсоиды также будут связаны с состоянием системы. Для каждого такого эллипсоида определяются коэффициенты усиления с учетом ограничения на управление. При любом состоянии системы из этого эллипсоида управление с коэффициентами усиления, определенными для этого эллипсоида, будет удовлетворять заданному ограничению. В результате появляется возможность планировать изменение коэффициентов усиления для обеспечения лучшего качества управления. Именно в этом и заключается особенность представляемого в статье подхода. При больших отклонениях вектора состояния требуются меньшие коэффициенты усиления управления, а при малых отклонениях можно использовать более высокие коэффициенты усиления. Следовательно, выбор коэффициента усиления будет зависеть от текущего состояния системы. Для этого из имеющейся последовательности определяется минимальный эллипсоид, содержащий вектор состояния системы, и будет выбираться управление, соответствующее этому эллипсоиду.

2. Системы с неопределенными нелинейностями и ограниченными возмущениями

Рассматривается динамическая система с дискретным временем, представленная следующей моделью в пространстве состояний:

$$(1) \quad \begin{aligned} x(t+1) &= A(t)x(t) + D(t)w(t) + \Phi(t)\varphi(t, x(t)), \\ z(t) &= C(t)x(t), \end{aligned}$$

где $t \in T$ – время, $x \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния, $w(t) \in W \subset \mathbb{R}^r$ – внешнее возмущение, $z \in \mathbb{R}^l$ – вектор управляемого выхода, $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $D(t) \in \mathbb{R}^{n \times r}$, $\Phi(t) \in \mathbb{R}^{n \times q}$, $C(t) \in \mathbb{R}^{q \times n}$ – известные матрицы с ограниченными элементами при всех $t \in T$. Интервал времени T может быть конечным $T = [t_0, t_0 + 1, \dots, t_1]$, t_1 – заданная константа, или бесконечным $T = [t_0, t_0 + 1, \dots, \infty)$.

Нелинейная векторная функция $\varphi(t, x)$ удовлетворяет ограничению, заданному в виде

$$(2) \quad \|\varphi(t, x)\|^2 \leq \mu_0 + \mu_1 \|C_f(t)x\|^2 \quad \forall t \in T, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

где $C_f(t) \in \mathbb{R}^{q \times n}$ – известная матрица с ограниченными элементами при всех $t \in T$. Здесь и далее $\|\cdot\|$ означает евклидову норму вектора, $\mu_0, \mu_1 \geq 0$ – заданные константы.

Предположим, что неопределенные возмущения являются ограниченными в каждый момент времени:

$$(3) \quad W = \left\{ w(t) \in \mathbb{R}^r : \|w(t)\|^2 \leq 1 \quad \forall t \in T \right\}.$$

Отметим, что автономные системы вида (1) с неопределенными ограниченными возмущениями и нелинейностями, удовлетворяющими ограничению (2), при $C_f = I$ были рассмотрены в [12], где было сказано, что при $\mu_0 = 0$ ограничение (2) охватывает секторные нелинейности и локально-липшицевые, заданные так, что они равны нулю в начале координат.

3. Задача оценивания состояния

Пусть в начальный момент времени t_0 состояние $x(t_0) = x_0$ системы является неопределенным и известно, что оно принадлежит эллипсоиду

$$(4) \quad E(Q_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : x^T Q_0^{-1} x \leq 1\},$$

где Q_0 – заданная положительно определенная матрица.

Предполагается, что матрица $C(t)$ является матрицей полного ранга строк.

Требуется на заданном интервале времени T получить эллипсоидальную оценку множества состояний для процессов системы (1), начинающихся из заданного эллипсоида $E(Q_0)$ (4), при нелинейностях, удовлетворяющих (2), и неопределенных возмущениях из (3).

Оценка вектора состояния будет находиться в виде эволюционирующего эллипсоида, инвариантного для процессов системы (1).

Напомним, что инвариантным эллипсоидом для динамической системы называется эллипсоид

$$(5) \quad E(Q(t)) = \{x \in \mathbb{R}^n : x^T Q^{-1}(t) x \leq 1\}, \quad Q(t) > 0,$$

обладающий следующим свойством: любая траектория системы $x(t, t_0, x_0)$, исходящая из точки $x(t_0) = x_0 \in E(Q(t_0) = Q_0)$, в любой момент времени $t \in T$ принадлежит этому эллипсоиду, т.е. $x(t, t_0, x_0) \in E(Q(t))$.

Здесь положительно определенная матричная функция $Q(t)$ определяет последовательность эллипсоидов для моментов времени $t \in T$, которая в совокупности и представляет эволюционирующий эллипсоид.

Теорема 1. Эллипсоид $E(Q(t))$, где $Q(t) = Q(t, t_0, Q_0)$ есть положительно определенное решение разностного матричного уравнения

$$(6) \quad \begin{aligned} Q(t+1) = & A(t)Q(t) \left[\alpha Q(t) - \frac{\mu_1}{\beta} Q(t) C_f^T(t) C_f(t) Q(t) \right]^{-1} Q(t) A^T(t) + \\ & + \frac{1}{1 - \alpha - \frac{\mu_0}{\beta}} D(t) D^T(t) + \beta \Phi(t) \Phi^T(t) \end{aligned}$$

$$(7) \quad \begin{bmatrix} Q(t+1) - \beta \Phi(t) \Phi^T(t) & A(t)Q(t) & D(t) & 0 & 0 \\ Q(t)A^T(t) & \alpha Q(t) & 0 & Q(t)C_f^T(t) & 0 \\ D^T(t) & 0 & (1-\alpha)I & 0 & I \\ 0 & C_f(t)Q(t) & 0 & \frac{\beta}{\mu_1}I & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & \frac{\beta}{\mu_0}I \end{bmatrix} \geq 0,$$

является инвариантным для траекторий системы (1), стартующих из начального эллипсоида $E(Q_0)$.

Доказательство теоремы 1 дано в Приложении 1.

Из теоремы 1 следует, что положительно определенное решение $Q(t) = Q(t, t_0, Q_0)$, если оно существует при некоторых $\beta > 0$ и $0 < \alpha < 1$, будет определять инвариантный эллипсоид $E(Q(t))$, ограничивающий состояния исходной системы (1). Каждый такой эллипсоид будет являться приближением внешней оценки множества достижимости, т.е. множества, содержащего все траектории $x(t, t_0, x_0)$ системы (1) в момент времени $t \in T$ при всех $x_0 \in E(Q_0)$, неопределенных внешних возмущениях $w \in W$ и нелинейностях из (2). Как замечено в [3], более точным приближением внешней оценки множества достижимости будет являться пересечение совокупности эллипсоидов, полученных при различных значениях α и β .

Из доказательства теоремы 1 следует, что если при некоторых α и β найдется положительно определенное решение $Q(t) = Q(t, t_0, Q_0)$ уравнения (6), то оно также будет являться решением РЛМН (7) при тех же α и β . Существование в (6) обратной матрицы на каждой итерации можно обеспечить подходящим выбором значения параметра β .

Следует отметить, что в автономной линейной системе инвариантный эллипсоид с постоянной матрицей Q^* , определяемой на основе решения алгебраического уравнения Ляпунова (или разрешимости ЛМН) будет являться притягивающим, т.е. множеством, к которому будут стремиться все решения с любыми начальными данными и при внешних возмущениях, удовлетворяющих (3). В нелинейной автономной системе инвариантный эллипсоид будет притягивающим только для решений с начальными данными, принадлежащими области притяжения некоторого предельного множества, которое в свою очередь будет принадлежать указанному инвариантному эллипсоиду.

Для нахождения оценок множества состояний исходной нелинейной системы в текущие моменты времени для траекторий, стартующих из начального эллипсоида, и для построения оценок области притяжения в автономном случае будем использовать РМУ (6) и РЛМН (7).

Теорема 2. Пусть $Q(t) = Q(t, t_0, Q_0)$ – решение при $Q(t_0) = Q_0 > 0$ РМУ (6) (или РЛМН (7)) на интервале T . Тогда для решений исходной системы (1) с начальными данными $x(t_0) = x_0 \in E(Q_0)$, нелинейностями

из (2) и неопределенными возмущениями из (3) имеют место оценки при всех $t \in T$:

- 1) $x(t, t_0, x_0) \in E(Q(t));$
- 2) $x(t, t_0, x_0)x^T(t, t_0, x_0) \leq Q(t, t_0, Q_0)$ (неравенство относительно конуса неотрицательно определенных матриц);
- 3) $x^T(t, t_0, x_0)x(t, t_0, x_0) \leq \text{trace}(Q(t, t_0, Q_0));$
- 4) $x_i^2(t, t_0, x_0) \leq Q_{ii}(t, t_0, Q_0), \quad i = 1, \dots, n;$
- 5) $z^T(t)z(t) \leq \text{trace}(C^T Q(t, t_0, Q_0)C).$

Доказательство теоремы 2 приведено в Приложении.

Определение 1. Матричная функция $F(t, Q)$ называется неубывающей относительно Q , если для любых $Q_1, Q_2 \in R^{n \times n}$, таких что $Q_2 - Q_1 \geq 0$, следует, что $F(t, Q_2) - F(t, Q_1) \geq 0$ (или аналогично из условия $y^T(Q_2 - Q_1)y \geq 0$ следует $y^T[F(t, Q_2) - F(t, Q_1)]y \geq 0$ для всех $y \in R^n$ и $t \in T$).

Лемма 1. Система разностных уравнений (6) является матричной системой сравнения для системы (1).

Доказательство леммы 1 дано в Приложении.

В [21] доказана теорема о матричных разностных неравенствах и установлены следующие свойства матричных разностных уравнений с монотонно неубывающей правой частью: существование неотрицательно определенных решений, монотонность решений по начальным данным, инвариантность некоторых множеств. Для получения оценок множества решений в виде невырожденного эволюционирующего эллипсоида интерес представляет существование положительно определенного решения МСС (6).

Лемма 2. Предположим, что матрица A является неособой или матрица $\frac{1}{1-\alpha-\mu_0/\beta}D(t)D^T(t) + \beta\Phi(t)\Phi^T(t)$ – положительно определенная, и для любой положительно определенной матрицы Q , удовлетворяющей неравенству $0 < Q < \alpha I$, где $\alpha > 0$ – заданное число, найдется число $\beta > 0$, такое что имеет место неравенство $\frac{\mu_1}{\beta}C_f^T C_f \leq \frac{1}{\alpha}I$. Тогда если существует решение МСС (6) с начальным условием $0 < Q(t_0) = Q_0 < \alpha I$ на некотором интервале T , то для него будет выполнено неравенство $Q(t, t_0, Q_0) > 0$ для всех $t \in T$.

Доказательство леммы 2 дано в Приложении.

В дальнейшем будем находить минимальные (в некотором смысле) инвариантные эллипсоиды, содержащие траектории или выход $z(t)$ рассматриваемой системы.

На основе теоремы 1 задача получения верхней оценки множества траекторий системы (1), стартующих из начального эллипсоида, сводится к следующей задаче оптимизации $\text{trace}(Q(t_1)) \rightarrow \min$ при ограничениях $Q(t) > 0$, $Q(t_0) \geq Q_0$, $\beta > 0$, $0 < \alpha < 1$ и (7), записанных при $t_0 + 1, t_0 + 2, \dots, t_1$. При фиксированном α данная задача относительно совокупности матриц $Q(t_0 + 1), Q(t_0 + 2), \dots, Q(t_1)$ и параметра $\beta(t)$ относится к классу задач полуопределенного программирования, для которых имеются эффективные решатели.

Для автономной системы может быть получена верхняя оценка предельного множества в виде минимального инвариантного эллипсоида путем решения задачи оптимизации $\text{trace}(Q) \rightarrow \min$ при ограничениях $Q > 0$, $\beta > 0$, $0 < \alpha < 1$ и (7) относительно матрицы Q ($Q = Q(t) = Q(t+1)$), что соответствует случаю, рассмотренному в теореме 3 из [12].

Также может быть получена внутренняя оценка области начальных данных, из которой траектории системы (1) будут стремиться к заданному эллипсоиду $E(Q_T)$, где $Q_T > 0$ – известная матрица. Для этого следует решить задачу $\text{trace}(Q(t_0)) \rightarrow \max$ при ограничениях $Q(t_1) \leq Q_T$, $\beta > 0$, $0 < \alpha < 1$ и неравенствах (7), записанных при $t_0 + 1, t_0 + 2, \dots, t_1$. При фиксированном α данная задача относительно совокупности матриц $Q(t_0), Q(t_0 + 1), Q(t_0 + 2), \dots, Q(t_1)$ и параметра $\beta(t)$ также относится к классу задач полуопределенного программирования.

Для оценки области начальных данных в виде эллипсоида с максимальным расстоянием до его границы по заданному направлению в фазовом пространстве выбирается направление, определяемое вектором с единичной длины, и решается задача $\gamma \rightarrow \max$ при тех же ограничениях, как в предыдущей задаче, и дополнительно обеспечивая принадлежность точки γc начальному эллипсоиду:

$$\begin{pmatrix} 1 & \gamma c^T \\ \gamma c & Q(t_0) \end{pmatrix} \geq 0.$$

4. Задача об ограниченности (устойчивости) относительно заданных множеств

Пусть заданы в виде эллипсоидов $E(R_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : x^T R_0^{-1} x \leq 1\}$, $E(R(t)) = \{x \in \mathbb{R}^n : x^T R^{-1}(t) x \leq 1\}$, $(R_0, R(t))$ – известные симметрические положительно определенные матрицы) – соответственно множество начальных состояний и множество допустимых состояний в моменты времени $t \in T$.

Определение 2. Будем говорить, что система (1) обладает на T свойством ограниченности относительно заданных множеств $[E(R_0), E(R(t))]$ (при отсутствии неопределенных внешних возмущений – свойством устойчивости относительно заданных множеств $[E(R_0), E(R(t))]$), если для всех $x_0 \in E(R_0)$ существуют на T решения $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ системы (1) с начальными данными $x(t_0) = x_0$, для которых имеет место $x(t, t_0, x_0) \in E(R(t))$ при всех $t \in T$, всех нелинейностях из (2) и возмущениях из (3) (соответственно $x(t, t_0, x_0) \in E(R(t))$ при всех $t \in T$ и всех нелинейностях из (2), где $\mu_0 = 0$).

Отметим, что в данном здесь определении, в отличие от общепринятых определений абсолютной устойчивости и ограниченности, указываются конкретные множества начальных данных и множества, которым должны принадлежать траектории системы с этими начальными данными. В этом отношении определения аналогичны определениям устойчивости и ограниченности на конечном интервале времени, активно изучаемые в последние годы [21]. В рассматриваемом случае интервал времени может быть как конечным, так и бесконечным.

Теорема 3. Система (1) обладает на T свойством ограниченности относительно заданных множеств $[E(R_0), E(R(t))]$ (при отсутствии внешних возмущений и $\mu_0 = 0$ — свойством устойчивости относительно $[E(R_0), E(R(t))]$) если существует решение $Q(t) = Q(t, t_0, Q_0)$ РМУ (6) (или РЛМН (7)) с начальными данными $Q_0 \geq R_0$, удовлетворяющее неравенству $Q(t) \leq R(t)$ для всех $t \in T$.

Доказательство теоремы 3 представлено в Приложении.

5. Задача синтеза управления

Рассмотрим дискретную систему с управлением:

$$(8) \quad \begin{aligned} x(t+1) &= A(t)x + B(t)u + D(t)w + \Phi(t)\varphi(t, x, u), \quad x(t_0) = x_0, \\ z &= C(t)x, \end{aligned}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния, $w(t) \in W$ — внешнее возмущение, удовлетворяющее ограничению (3), $u \in \mathbb{R}^m$ — управление, $z \in \mathbb{R}^l$ — вектор управляемого выхода. Нелинейная векторная функция $\varphi(t, x, u) \in \mathbb{R}^q$ удовлетворяет ограничению

$$(9) \quad \|\varphi(t, x, u)\|^2 \leq \mu_0 + \mu_1 \|C_f(t)x(t) + B_f(t)u(t)\|^2 \quad \forall t \in T, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m,$$

где $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B(t) \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $D(t) \in \mathbb{R}^{n \times r}$, $\Phi(t) \in \mathbb{R}^{n \times q}$, $C(t) \in \mathbb{R}^{l \times n}$, $C_f(t) \in \mathbb{R}^{q \times n}$, $B_f(t) \in \mathbb{R}^{q \times m}$ — известные матрицы с ограниченными элементами при всех $t \in T$. Предполагается, что пара (A, B) управляема, пара (A, C) наблюдаема, а управление должно удовлетворять ограничению

$$(10) \quad u(t) \in \{u : u^T Z^{-1}(t)u \leq 1\}, \quad t \in T,$$

где $Z(t)$ — заданная симметрическая положительно определенная $(m \times m)$ -матрица.

Задача состоит в нахождении управления в виде обратной связи по состоянию

$$(11) \quad u = K(t)x :$$

1) стабилизирующего замкнутую систему и подавляющего воздействие начальных отклонений и внешних возмущений в смысле минимальности ограничивающего эллипсоида для выхода z ;

2) обеспечивающего ограниченность замкнутой системы.

Задача синтеза сводится к оптимизации критерия при ограничениях в виде разностных линейных матричных неравенств. В качестве критерия берется след матрицы, определяющий размер инвариантного ограничивающего состояния или выход эллипсоида [12].

Теорема 4. Решение $Q^*(t) = Q^*(t, t_0, Q_0) > 0$, $Y^*(t)$ задачи

$$\text{trace}[CQC^T] \rightarrow \min$$

при ограничениях

$$(12) \begin{bmatrix} Q(t+1) - \beta \Phi \Phi^T & AQ(t) + BY & D & 0 & 0 \\ Q(t)A^T + Y^T B^T & \alpha Q(t) & 0 & Q(t)C_f^T + Y^T B_f^T & 0 \\ D^T & 0 & (1 - \alpha)I & 0 & I \\ 0 & C_f Q(t) + B_f Y & 0 & \frac{\beta}{\mu_1} I & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & \frac{\beta}{\mu_0} I \end{bmatrix} \geq 0,$$

$$(13) \begin{bmatrix} Z & Y \\ Y^T & Q \end{bmatrix} \geq 0,$$

где минимизация проводится по матричным переменным $Q(t) = Q^T(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Y(t) \in \mathbb{R}^{m \times n}$, скалярной переменной $\beta > 0$ и скалярному параметру $0 < \alpha < 1$, определяет при каждом $t \in T$ матрицу $Q^*(t)$ ограничивающего эллипсоида для вектора состояния $x(t)$, матрицу CQ^*C^T ограничивающего эллипсоида для вектора выхода $z(t)$ системы (8) и зависящую от времени матрицу коэффициентов регулятора по состоянию $K^*(t) = Y^*(t)Q^{*-1}(t)$. Если, кроме того, матрица $Q^*(t)$ удовлетворяет дополнительно ограничениям $Q^*(t_0) \geq R_0$ и $Q^*(t) \leq R(t)$ для всех $t \in T$, где R_0 и $R(t)$ – заданные положительно определенные симметрические матрицы, то искомое управление (11) обеспечивает ограниченность замкнутой системы относительно множеств $[E(R_0), E(R(t))]$.

Доказательство теоремы 4 представлено в Приложении.

Замечание 1. В случае автономной системы в задаче оптимизации с ограничениями (12), (13) все матрицы могут быть постоянными, что соответствует применению метода инвариантных эллипсоидов (см. теорему 4 из [12]).

Замечание 2. Также к задаче оптимизации с ЛМН может быть сведен синтез управления из условия получения максимальной по критерию следа матрицы эллипсоида допустимых начальных отклонений или максимального по заданному направлению расстояния до его границы.

Численное решение задачи оптимизации на всем рассматриваемом интервале может производиться итерационно на каждом шаге. В результате решения задачи оптимизации на первом шаге находятся матрицы $Q(t_0) \geq R_0$, $Q(t_0 + 1) > 0$ и $Y(t_0)$, удовлетворяющие ограничениям (12), (13). Данная задача при каждом фиксированном α относится к классу задач полуопределенного программирования и может быть эффективно решена существующими методами. Решая последовательность задач оптимизации при варьировании параметра $0 < \alpha < 1$, выбирается значение α , при котором $\text{trace}[CQ(t_0 + 1)C^T]$ будет наименьшим. В качестве решения на первой итерации принимаются матрицы $Q_0 = Q(t_0)$ и $K_0 = Y(t_0)Q_0^{-1}$. Аналогичным образом на второй итерации находятся матрицы $Q_1 \geq Q(t_0 + 1)$, $K_1 = Y(t_1)Q_1^{-1}$ и матрица $Q(t_0 + 2) > 0$ с минимальным $\text{trace}[CQ(t_0 + 2)C^T]$. Итерации завершаются на шаге t_1 .

С целью определения коэффициентов регуляторов, обеспечивающих более эффективное подавление начальных отклонений и неопределенностей, следует при численном решении задачи оптимизации на всем интервале использовать многоступенчатые итерации.

В частности, на k -й двухшаговой итерации решается следующая задача оптимизации: $\text{trace}(Q(t_0 + 2k)) \rightarrow \min$ при ограничениях $Q(t_0 + 2k - 1) > 0$, $Q(t_0 + 2k) > 0$, $\beta_k > 0$, $0 < \alpha_k < 1$ и ЛМН (12), (13), записанных при $t_k = t_0 + 2k - 2$ и $t_{k1} = t_k + 1 = t_0 + 2k - 1$ ($k = 1, 2, \dots, t_1/2$):

$$\text{trace}[CQ(t_k + 2)C^T] \rightarrow \min \quad \text{при ограничениях} \\ Q_k \geq Q(t_k), \quad Q(t_k + 1) > 0, \quad Q(t_k + 2) > 0,$$

$$\begin{bmatrix} Q(t_k + 1) - \beta_k \Phi(t_k) \Phi^T(t_k) & A(t_k)Q_k + B(t_k)Y(t_k) & D(t_k) & 0 & 0 \\ Q_k A^T(t_k) + Y^T(t_k) B^T(t_k) & \alpha_k Q_k & 0 & Q_k C_f^T(t_k) + Y^T(t_k) B_f^T(t_k) & 0 \\ D^T(t_k) & 0 & (1 - \alpha_k)I & 0 & I \\ 0 & C_f(t_k)Q_k + B_f(t_k)Y(t_k) & 0 & \frac{\beta_k}{\mu_1} I & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & \frac{\beta_k}{\mu_0} I \end{bmatrix} \geq 0,$$

$$\begin{bmatrix} Q(t_k + 2) - \beta_k \Phi(t_{k1}) \Phi^T(t_{k1}) & A(t_{k1})Q(t_{k1}) + B(t_{k1})Y(t_{k1}) & D(t_{k1}) & 0 & 0 \\ Q(t_{k1})A^T(t_{k1}) + Y^T(t_{k1})B^T(t_{k1}) & \alpha_k Q(t_{k1}) & 0 & Q(t_{k1})C_f^T(t_{k1}) + Y^T(t_{k1})B_f^T(t_{k1}) & 0 \\ D^T(t_{k1}) & 0 & (1 - \alpha_k)I & 0 & I \\ 0 & C_f(t_{k1})Q(t_{k1}) + B_f(t_{k1})Y(t_{k1}) & 0 & \frac{\beta_k}{\mu_1} I & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & \frac{\beta_k}{\mu_0} I \end{bmatrix} \geq 0,$$

$$\begin{bmatrix} Z(t_k) & Y(t_k) \\ Y^T(t_k) & Q(t_k) \end{bmatrix} \geq 0, \quad \begin{bmatrix} Z(t_{k1}) & Y(t_{k1}) \\ Y^T(t_{k1}) & Q(t_{k1}) \end{bmatrix} \geq 0.$$

6. Обеспечение гарантированного перехода из заданной области начальных данных в другую

Применение метода инвариантных эллипсоидов [12] позволяет синтезировать регулятор из условия получения минимального предельного инвариантного эллипсоида, ограничивающего состояние или выход при $t \rightarrow \infty$, или регулятор из условия получения максимального инвариантного эллипсоида, ограничивающего область начальных данных, из которой процессы будут сходиться к некоторому предельному множеству, принадлежащему этому эллипсоиду. При учете нелинейностей и ограничений на управление (10) коэффициенты усиления этих регуляторов будут различными. При этом первый

регулятор сможет обеспечить оптимальное подавление неопределенностей из области начальных данных, меньшей, чем второй регулятор. В то же время минимальный предельный инвариантный эллипсоид системы со вторым регулятором может оказаться значительно бóльшим, чем у системы с первым регулятором. Дополнительный учет ограничения на область начальных данных при синтезе приводит к получению третьего регулятора с промежуточным между первым и вторым регулятором качеством. Таким образом, чтобы обеспечить (например, как с помощью первого регулятора) наибольшее подавление начальных отклонений и неопределенных возмущений из максимально возможной области начальных данных (как с помощью второго регулятора) потребуется организовать изменение коэффициентов регулятора для рассматриваемой автономной системы. Для этого будем использовать способ синтеза регулятора из теоремы 4.

Итак, пусть заданы в виде эллипсоидов $E(R_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : x^T R_0^{-1} x \leq 1\}$, $E(R_T) = \{x \in \mathbb{R}^n : x^T R_T^{-1} x \leq 1\}$ – область начальных данных и допустимая область для состояний в заданный момент времени $t = t_1$. Предполагается, что $E(R_T) \subseteq E(R_0)$. Требуется синтезировать регулятор с переменными коэффициентами усиления, который бы обеспечил гарантированный переход из начального множества $E(R_0)$ в заданное конечное множество $E(R_T)$.

Если найдется на интервале T решение $Q^*(t) > 0$, $Y^*(t)$ задачи оптимизации $\text{trace}[Q(t_1)] \rightarrow \min$ при ограничениях (12), (13) с граничными условиями $Q(t_0) \geq R_0$, $Q(t_1) \leq R_T$, то согласно теореме 4 регулятор (11) с переменными коэффициентами усиления $K^*(t) = Y^*(t)Q^{*-1}(t)$ обеспечит гарантированный переход состояния системы (8) из начального множества $E(R_0)$ в заданное конечное множество $E(R_T)$ при любых допустимых возмущениях из (2) и нелинейностях из (9). При этом переключение коэффициентов усиления следует производить в моменты, когда состояние системы переходит в эллипсоид $E(Q(t)) = \{x : x^T Q^{*-1}(t)x \leq 1\}$ с наименьшим значением $\text{trace}[Q(t)]$.

7. Пример

В качестве примера рассмотрим систему (1) с нелинейностью $\varphi(x)$, удовлетворяющей ограничениям (2) с $\mu_0 = 0$ и $\mu_1 = 20$. В качестве выхода системы выберем вектор $z = (x_1, x_2)^T$. Чтобы избежать больших значений управления, учитывается ограничение $u^2 \leq Z$, где $Z = 50$, и неопределенность в начальном состоянии системы, задаваемая матрицей Q_0 . При этом для данной системы определим матрицы в (1) следующим образом:

$$A = \begin{bmatrix} 1,6487 & 0,1494 \\ 0 & 1,35 \end{bmatrix}, \quad \Phi = \begin{bmatrix} 0 \\ -0,25 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C_f = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B_f = [0], \quad Q_0 = \begin{bmatrix} 0,34 & -3 \\ -3 & 27 \end{bmatrix}.$$

Так как коэффициенты системы не зависят от времени, то при применении теоремы 4 все матрицы берутся постоянными, что соответствует рассмотренному в [12] случаю автономных систем. Численное решение задач оптимизации с ЛМН проводилось в пакете Matlab с использованием программного

обеспечения CVX. Для исходной системы с учетом ограничения на управление при $\alpha = 0,51$, $\beta = 4,2073$ была найдена матрица

$$Q_{P1} = \begin{bmatrix} 0,1016 & -1,1116 \\ -1,1116 & 14,4634 \end{bmatrix}$$

минимального инвариантного эллипса и соответствующий регулятор с постоянными коэффициентами $K_1 = [-18,0355 \quad -2,9845]$, а при $\alpha = 0,51$, $\beta = 6,6171$ получена матрица максимального по критерию следа инвариантного эллипса

$$Q_{D11} = \begin{bmatrix} 0,1492 & -1,5778 \\ -1,5778 & 19,2332 \end{bmatrix}.$$

При $\alpha = 0,39$ и $\beta = 8,4506$ была найдена матрица

$$Q_{D12} = \begin{bmatrix} 0,1536 & -1,6504 \\ -1,6504 & 19,9506 \end{bmatrix}$$

максимального по критерию следа инвариантного эллипса. Этот эллипс представляет внутреннюю оценку множества начальных данных, из которой траектории исходной системы с регулятором K_1 гарантированно будут стремиться к предельному множеству, внешней оценкой которого является инвариантный эллипс с матрицей Q_{P1} . При этом будет выполняться заданное ограничение на управление. Отметим, что так как заданный начальный эллипс с матрицей Q_0 не является вложенным в эллипсы Q_{D11} , Q_{D12} , то для него не гарантируется выполнение ограничения на управление с K_1 .

Также в результате решения задачи $\text{trace}(Q) \rightarrow \max$ с ЛМН ограничениями при $\alpha = 0,68$ и $\beta = 32,4318$ получен регулятор с постоянными коэффициентами $K_2 = [-11,692 \quad -2,312]$, гарантирующий оценку области начальных данных в виде инвариантного эллипса с матрицей

$$Q_{D2} = \begin{bmatrix} 0,4829 & -3,7667 \\ -3,7667 & 35,1005 \end{bmatrix}.$$

Для системы с регулятором K_2 при $\alpha = 0,68$ и $\beta = 38,4023$ получена матрица минимального по критерию следа инвариантного эллипса

$$Q_{P21} = \begin{bmatrix} 0,4708 & -3,6157 \\ -3,6157 & 33,8214 \end{bmatrix},$$

а при $\alpha = 0,75$ и $\beta = 34,308$ получена матрица минимального по критерию следа инвариантного эллипса

$$Q_{P22} = \begin{bmatrix} 0,4259 & -3,2171 \\ -3,2171 & 30,8997 \end{bmatrix}.$$

На рис. 1 показаны инвариантные эллипсы с матрицами Q_{P1} , Q_{D11} , Q_{D12} , Q_{D2} , Q_{P21} , Q_{P22} .

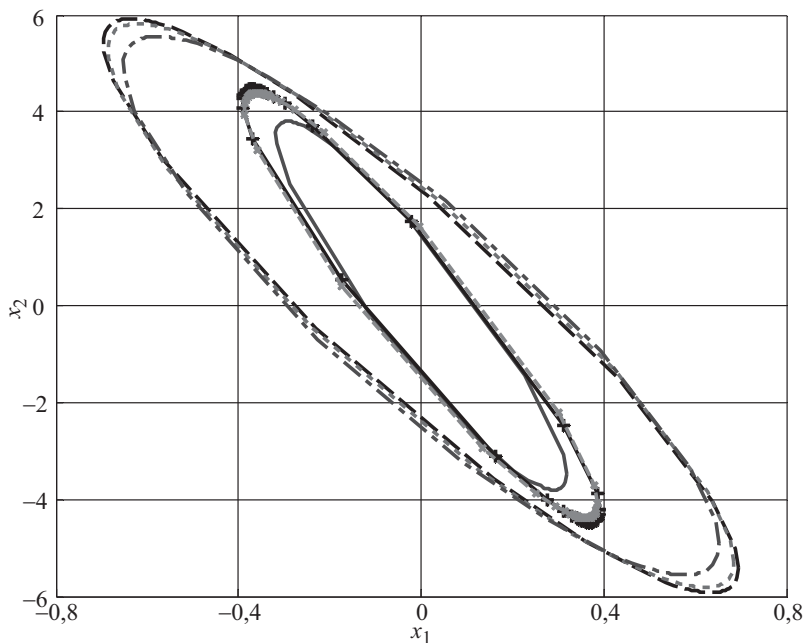


Рис. 1. Инвариантные эллипсы с матрицами Q_{P1} , Q_{D11} , Q_{D12} (показаны сплошной, сплошной с маркером + и сплошной с маркером $\times$ линиями соответственно) для системы с регулятором K_1 и инвариантные эллипсы с матрицами Q_{D2} , Q_{P21} , Q_{P22} (изображены штриховой, точечной и штрихпунктирной линиями соответственно) для системы с регулятором K_2 .

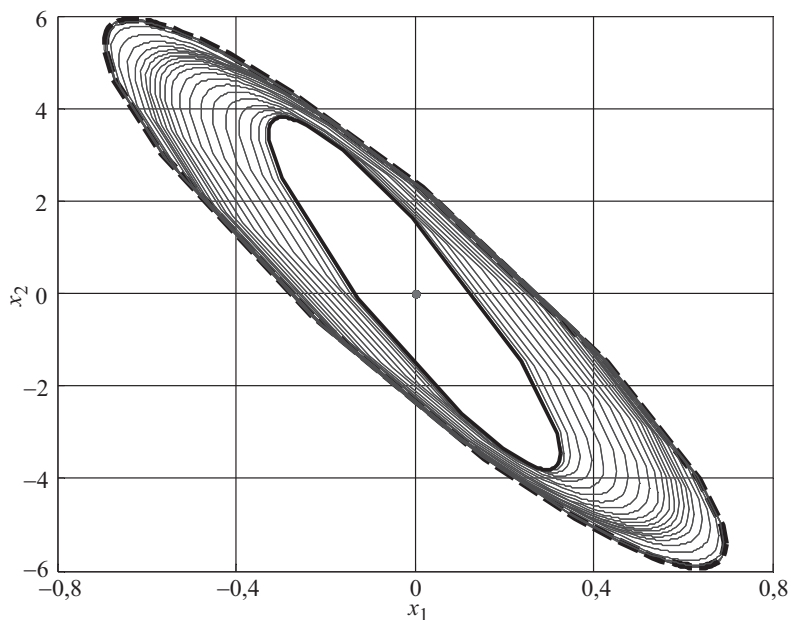


Рис. 2. Обеспечение перехода из эллипса начальных данных Q_{D2} (штриховая линия) в минимальный инвариантный эллипсоид с матрицей Q_{P1} (сплошная полужирная линия) для системы с регулятором с переменными коэффициентами, определяемых из решения задач оптимизации с РМН двухшаговыми итерациями.

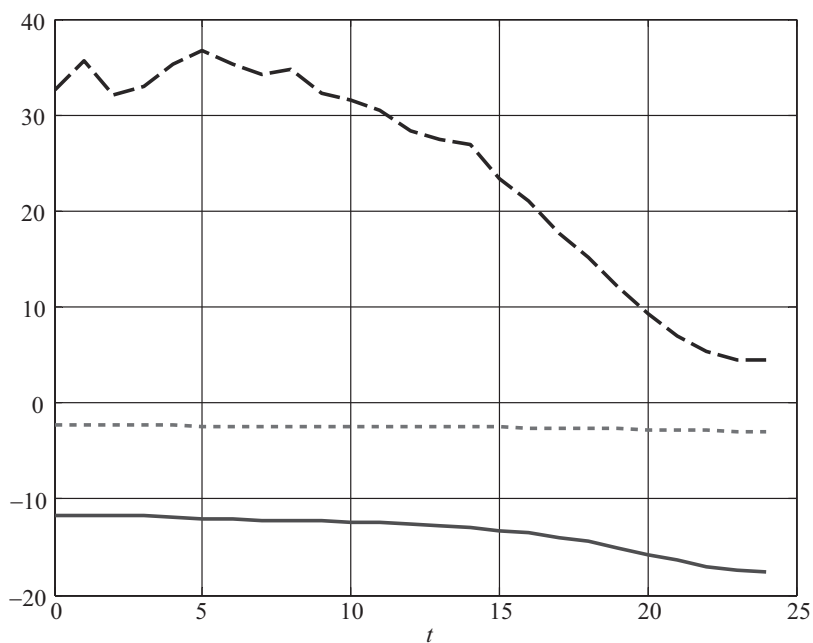


Рис. 3. Изменение параметра $\beta(t)$ (штриховая линия) и коэффициентов усиления регулятора $K_3(t) = (K_{31}(t) \ K_{32}(t))$ (сплошная и точечная линии соответственно).

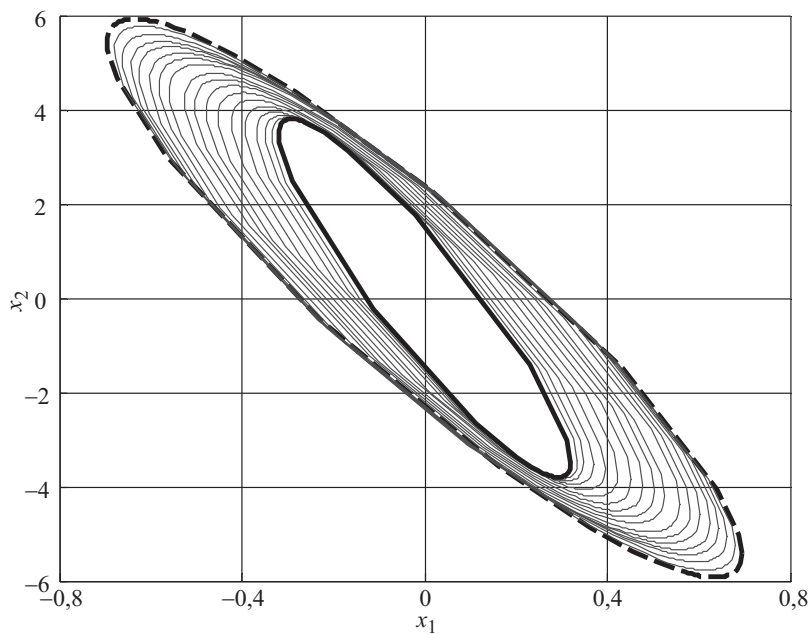


Рис. 4. Эллипсы, полученные в результате решения задачи оптимизации $\text{trace}[Q(16)] \rightarrow \min$ при ограничениях (12), (13) с граничными условиями $Q(0) \geq Q_{D2}$, $Q(16) \leq Q_{P1}$.

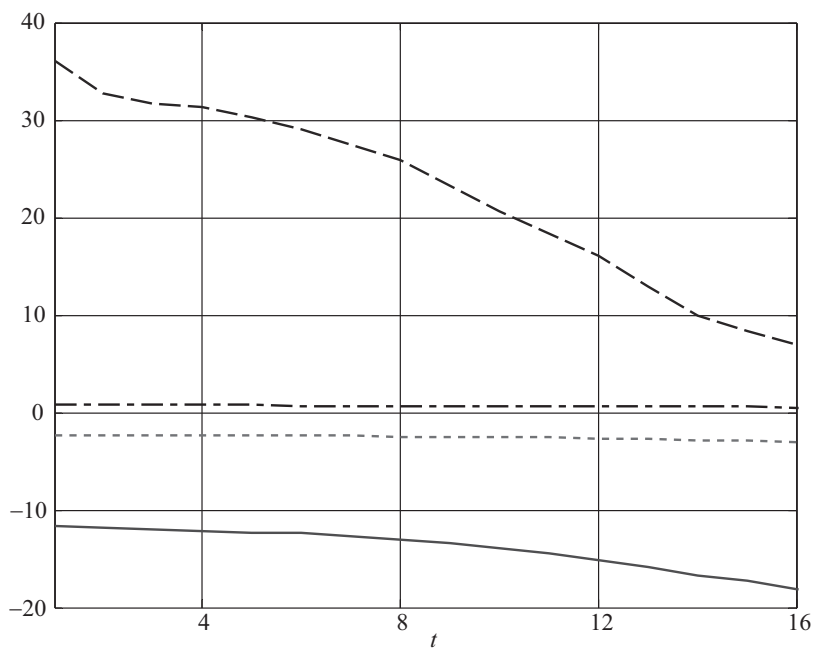


Рис. 5. Изменение параметров $\beta(t)$ (штриховая линия), $\alpha(t)$ (штрихпунктирная линия) и коэффициентов усиления регулятора $K_4(t) = (K_{41}(t) \ K_{42}(t))$ (сплошная и точечная линии соответственно).

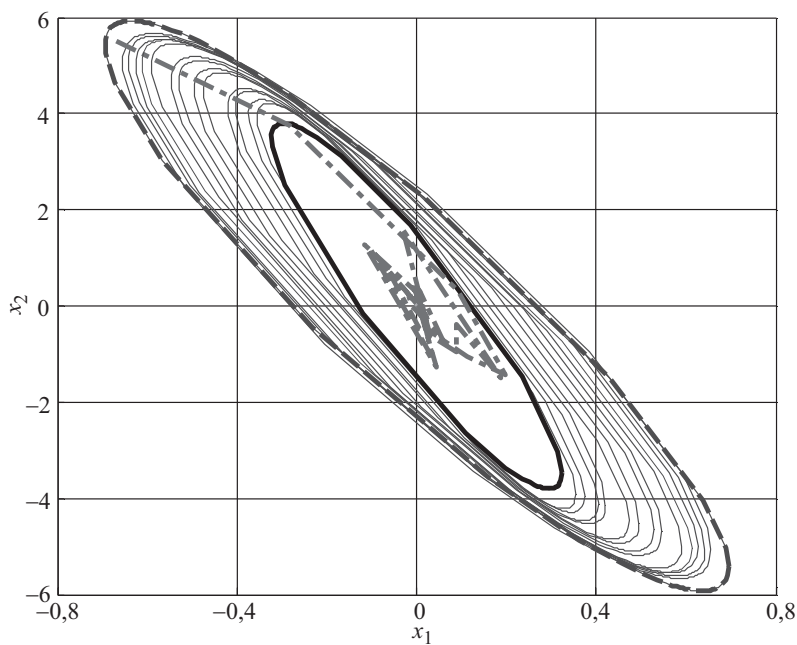


Рис. 6. Инвариантные эллипсы, полученные при численном решении МСС (6) для исходной системы с регулятором с переменными коэффициентами усиления, и траектория системы с начальными данными $x_0 = (-0,67 \ 5,5)^T$.

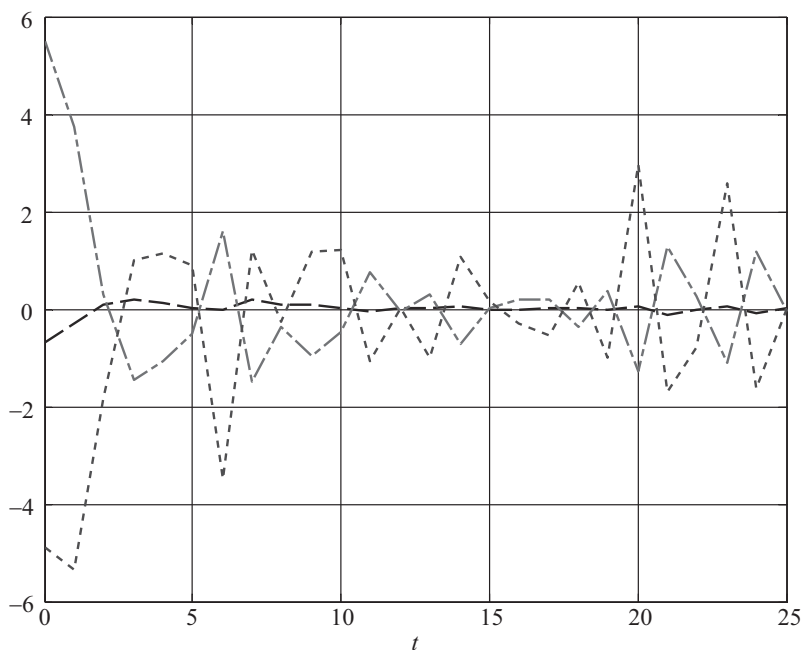


Рис. 7. Изменение координат состояния $x_1(t)$, $x_2(t)$ (показаны штриховой и штрихпунктирной линиями соответственно) и управляющего воздействия $u(t)$ (показано точечной линией) в системе с регулятором $K_4(t) = (K_{41}(t) \ K_{42}(t))$.

Теперь эллипс с матрицей Q_0 принадлежит эллипсу с матрицей Q_{D2} (так как $Q_{D2} - Q_0 > 0$), поэтому для него гарантируется выполнение ограничения на управление с K_2 . Однако при этом управлении получены предельные инвариантные эллипсы Q_{P21}, Q_{P22} , значительно большими, чем при управлении с K_1 .

Из рис. 1 следует, что регулятор с коэффициентами K_1 обеспечивает более сильное подавление неопределенностей, чем регулятор с коэффициентами K_2 , при котором, однако, обеспечивается наибольшая оценка области начальных отклонений. Таким образом, чтобы обеспечить (например, как с помощью регулятора K_1) наибольшее подавление начальных отклонений и неопределенных возмущений из максимально возможной области начальных данных (как с регулятором K_2), требуется организовать изменение коэффициентов регулятора для рассматриваемой автономной системы.

В результате решения на интервале $[0, 24]$ задачи оптимизации двухшаговыми итерациями получен регулятор с переменными коэффициентами, который обеспечивает переход из заданного матрицей Q_{D2} эллипса (показан штриховой линией на рис. 2) в минимальный инвариантный эллипс, заданный матрицей Q_{P1} (показан сплошной полужирной линией). Тонкими сплошными линиями показаны эллипсы, полученные на промежуточных итерациях. Матрица каждого такого эллипса определяет, какие коэффициенты усиления должен иметь регулятор при попадании в него траектории системы, чтобы затем перейти в следующий вложенный в него эллипс. На рис. 3 пока-

заны графики изменения параметра β и коэффициентов усиления регулятора $K_3(t) = (K_{31}(t) \ K_{32}(t))$.

Кроме того, на интервале $[0, 16]$ было найдено решение $Q^*(t) > 0$, $Y^*(t)$, $(t = 0, 1, \dots, 16)$ задачи оптимизации $\text{trace}[Q(16)] \rightarrow \min$ при ограничениях (12), (13) с граничными условиями $Q(0) \geq Q_{D2}$ и $Q(16) \leq Q_{P1}$. На рис. 4 представлены эллипсы с матрицами $Q(0) = Q_{D2}$ (показан штриховой линией), $Q^*(1)$, $Q^*(2)$, $\dots$, $Q^*(15)$ (отмечены тонкими сплошными линиями) и $Q^*(16)$ (полужирная сплошная линия). На рис. 5 представлены графики изменения параметров $\beta(t)$, $\alpha(t)$ и коэффициентов усиления регулятора $K_4(t) = (K_{41}(t) \ K_{42}(t))$. Аналогичные эллипсы получены при численном решении МСС (6) для исходной системы, замкнутой регулятором с переменными коэффициентами усиления. Они представлены на рис. 6, где штриховой линией показан начальный эллипс и сплошной линией – эллипс, полученный при $t = 16$. Штрихпунктирной линией выделена траектория системы с полученным регулятором с начальными данными $x_0 = (-0,67 \ 5,5)^T$, нелинейностью $\varphi(x) = 20 \sin(x_2)$ и возмущением $w(t) = 2a \sin(3t - 1) \cos(t/2)$, где амплитуда a задавалась из диапазона $[-0,5 \ 0,5]$ с помощью датчика случайных чисел. Изменения координат состояния системы с регулятором с переменными коэффициентами показаны на рис. 7.

Таким образом, полученный регулятор обеспечивает эффективное подавление внешних ограниченных возмущений и гарантированный переход из области начальных отклонений в виде эллипса с матрицей $Q(0) = Q_{D2} \geq Q_0$ в заданную эллипсом с матрицей Q_{P1} область. Отметим, что управление с постоянными коэффициентами усиления, полученными методом инвариантных или притягивающих эллипсоидов из [12, 13] при учете ограничения на управление, может быть использовано только для начальных отклонений из области, принадлежащей предельному инвариантному эллипсоиду.

8. Заключение

Методы матричных систем сравнения и матричных разностных неравенств применяются для решения задач оценивания состояния, анализа устойчивости и ограниченности относительно заданных множеств начальных данных и множества, ограничивающего состояния или выход, и задачи подавления начальных отклонений и внешних возмущений для одного класса нелинейных неавтономных дискретных систем с ограниченными внешними возмущениями. Задачи оценивания состояния и анализа ограниченности относительно заданных множеств сведены к численному решению разностного матричного уравнения или разностных линейных матричных неравенств и проверки условий, представленных линейными матричными неравенствами. Синтез регуляторов в виде линейной обратной связи по состоянию сведен к задачам поиска решений разностных линейных матричных неравенств или к задачам полуопределенного программирования. Предлагаемый подход распространяет на неавтономные системы подход, основанный на методе инвариантных эллипсоидов и технике линейных матричных неравенств, применительно к нелинейным системам с ограниченными внешними возмущениями. В частности, рассмотрена задача подавления начальных отклонений и

внешних возмущений с помощью переменной по времени, линейной обратной связи по состоянию, минимизирующей размер инвариантных (или ограничивающих) эллипсоидов динамической системы. По сравнению с методом инвариантных и притягивающих эллипсоидов [12, 13] предложенный способ синтеза управления позволяет решать задачу гарантированного перехода из одной области начальных данных в заданную область путем последовательного изменения коэффициентов усиления в зависимости от текущего состояния системы. Эффективность предлагаемого подхода для решения указанных задач продемонстрирована на примере дискретной системы второго порядка.

Полученные результаты могут быть применены для решения аналогичных задач в робастной постановке, связанных с оцениванием состояния, анализом ограниченности и синтезом управления, обеспечивающего гарантированный переход из одного заданного множества в другое при неопределенных внешних возмущениях и параметрических изменениях.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. Доказательство во многом аналогично доказательству теоремы 3 из [12]. Определим функцию $v(t, x) = x^T Q^{-1}(t)x$, $Q(t) = Q^T(t) > 0$, $Q(t_0) = Q_0$. Для любого $x_0 \in E(Q_0)$ имеет место $v(t_0, x_0) = x_0^T Q_0^{-1} x_0 \leq 1$. Для того чтобы траектории $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ исходной системы не покидали эллипсоид $E(Q(t)) = \{x \in \mathbb{R}^n : v(t, x) \leq 1\}$, достаточно потребовать, чтобы при $v(t, x) = 1$ при всех допустимых внешних возмущениях из (3) и при нелинейностях $\varphi(t, x)$ из (2) выполнялось

$$(П.1) \quad v(t+1, x(t+1), w, \varphi) \leq 1.$$

Опуская зависимость от t , вычислим

$$(П.2) \quad \begin{aligned} v(t+1, x(t+1), w, \varphi) &= x^T(t+1)Q^{-1}(t+1)x(t+1) = \\ &= [Ax + Dw + \Phi\varphi(t, x)]^T Q^{-1}(t+1)[Ax + Dw + \Phi\varphi(t, x)] = \\ &= \begin{bmatrix} x \\ w \\ \varphi \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A^T Q^{-1}(t+1)A & A^T Q^{-1}(t+1)D & A^T Q^{-1}(t+1)\Phi \\ D^T Q^{-1}(t+1)A & D^T Q^{-1}(t+1)D & D^T Q^{-1}(t+1)\Phi \\ \Phi^T Q^{-1}(t+1)A & \Phi^T Q^{-1}(t+1)D & \Phi^T Q^{-1}(t+1)\Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \\ \varphi \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

С использованием S-процедуры в части достаточности для (П.1) с учетом (П.2), предположения $v(t, x) = 1$, ограничений на внешние возмущения (3) и нелинейности $\varphi(t, x)$ (2) получаем: существуют $\alpha, \delta, \gamma \geq 0$ такие, что

$$(П.3) \quad \begin{aligned} &\begin{bmatrix} x \\ w \\ \varphi \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A^T Q^{-1}(t+1)A & A^T Q^{-1}(t+1)D & A^T Q^{-1}(t+1)\Phi \\ D^T Q^{-1}(t+1)A & D^T Q^{-1}(t+1)D & D^T Q^{-1}(t+1)\Phi \\ \Phi^T Q^{-1}(t+1)A & \Phi^T Q^{-1}(t+1)D & \Phi^T Q^{-1}(t+1)\Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \\ \varphi \end{bmatrix} + \\ &+ \alpha(1 - x^T Q^{-1}(t)x) + \delta(1 - w^T w) + \gamma(\mu_0 + \mu_1 x^T C_f^T C_f x - \varphi^T \varphi) - 1 \leq 0. \end{aligned}$$

Перепишем (П.3) в виде

$$\begin{bmatrix} x \\ w \\ \varphi \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A^T Q^{-1}(t+1)A + \gamma\mu_1 C_f^T C_f - \alpha Q^{-1}(t) & A^T Q^{-1}(t+1)D & A^T Q^{-1}(t+1)\Phi \\ D^T Q^{-1}(t+1)A & D^T Q^{-1}(t+1)D - \delta I & D^T Q^{-1}(t+1)\Phi \\ \Phi^T Q^{-1}(t+1)A & \Phi^T Q^{-1}(t+1)D & \Phi^T Q^{-1}(t+1)\Phi - \gamma I \end{bmatrix} \times \\ \times \begin{bmatrix} x \\ w \\ \varphi \end{bmatrix} + \alpha + \delta + \gamma\mu_0 - 1 \leq 0.$$

Таким образом, чтобы выполнялось (П.1) при учете указанных ограничений достаточно, чтобы существовали $\alpha, \delta, \gamma \geq 0$, такие что $\alpha + \delta + \gamma\mu_0 \leq 1$, и имело место матричное неравенство

$$(П.4) \quad \begin{bmatrix} A^T Q^{-1}(t+1)A + \gamma\mu_1 C_f^T C_f - \alpha Q^{-1}(t) & A^T Q^{-1}(t+1)D & A^T Q^{-1}(t+1)\Phi \\ D^T Q^{-1}(t+1)A & D^T Q^{-1}(t+1)D - \delta I & D^T Q^{-1}(t+1)\Phi \\ \Phi^T Q^{-1}(t+1)A & \Phi^T Q^{-1}(t+1)D & \Phi^T Q^{-1}(t+1)\Phi - \gamma I \end{bmatrix} \leq 0.$$

Неравенство (П.4) представимо в виде

$$\begin{bmatrix} \alpha Q^{-1}(t) - \gamma\mu_1 C_f^T C_f & 0 & 0 \\ 0 & \delta I & 0 \\ 0 & 0 & \gamma I \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} A^T \\ D^T \\ \Phi^T \end{bmatrix} Q^{-1}(t+1) \begin{bmatrix} A & D & \Phi \end{bmatrix},$$

откуда по лемме дополнения Шура получаем:

$$\begin{bmatrix} Q(t+1) & A & D & \Phi \\ A^T & \alpha Q^{-1}(t) - \gamma\mu_1 C_f^T C_f & 0 & 0 \\ D^T & 0 & \delta I & 0 \\ \Phi^T & 0 & 0 & \gamma I \end{bmatrix} \geq 0.$$

Дважды применив лемму дополнения Шура, имеем:

$$\begin{bmatrix} Q(t+1) - \frac{1}{\gamma} \Phi \Phi^T - \frac{1}{\delta} D D^T & A \\ A^T & \alpha Q^{-1}(t) - \gamma\mu_1 C_f^T C_f \end{bmatrix} \geq 0.$$

Далее, умножая слева и справа на матрицу $\text{diag}\{I \quad Q(t)\}$, полагая $\delta = \delta_{\max} = 1 - \alpha - \gamma\mu_0$ и обозначив $\beta = 1/\gamma$, приходим к матричному неравенству:

$$(П.5) \quad \begin{bmatrix} Q(t+1) - \beta \Phi \Phi^T - \frac{1}{1 - \alpha - \mu_0/\beta} D D^T & A Q(t) \\ Q(t) A^T & \alpha Q(t) - Q(t) C_f^T C_f Q(t) \mu_1 / \beta \end{bmatrix} \geq 0.$$

Неравенство (П.5) будет выполнено, если определять матрицу $Q(t+1)$ при каждом $t \in T$ из уравнения (6), где выбором значения параметра β можно обеспечить на каждой итерации существование обратной матрицы.

С другой стороны, по лемме дополнения Шура неравенство (П.5) эквивалентно неравенству

$$\begin{bmatrix} Q(t+1) - \beta\Phi\Phi^T & AQ(t) & D \\ Q(t)A^T & \alpha Q(t) - Q(t)C_f^T C_f Q(t)\mu_1/\beta & 0 \\ D^T & 0 & (1 - \alpha - \mu_0/\beta)I \end{bmatrix} \geq 0,$$

и, еще дважды применяя к нему лемму дополнения Шура, приходим к РЛМН (7). Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть для заданной матрицы $Q_0 > 0$ на интервале T существует положительно определенное решение $Q(t) = Q(t, t_0, Q_0)$ РМУ (6) или РЛМН (7). Согласно теореме 1 это решение определяет в каждый момент времени невырожденный эллипсоид $E(Q(t))$, являющийся инвариантным для решений исходной системы (1) с начальными данными $x(t_0) = x_0 \in E(Q_0)$. Поэтому справедлива оценка п. 1.

Пусть справедлива оценка п. 1. Тогда для решений $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ имеет место неравенство $0 \leq 1 - x^T(t)Q^{-1}(t)x(t)$. По лемме дополнения Шура данное неравенство эквивалентно матричному неравенству для всех $t \in T$

$$\begin{bmatrix} 1 & x^T(t) \\ x(t) & Q(t) \end{bmatrix} \geq 0.$$

Отсюда следует, что $Q(t) - x(t)x^T(t) \geq 0$ для всех $t \in T$. Поэтому оценка п. 2 имеет место.

Оценки пп. 3–5 непосредственно следуют из оценки п. 2. Теорема 2 доказана.

Доказательство леммы 1. Из теоремы 2 следует, что частное решение $Q(t) = Q(t, t_0, Q_0)$ системы (6) мажорирует поведение матричной функции сравнения $V(t, x(t)) = x(t)x^T(t)$ на решениях исходной системы (1). Кроме того, правая часть уравнения (6) является монотонной матричной функцией относительно Q . Действительно, пусть даны матрицы Q'_0, Q''_0 , такие что $Q''_0 \geq Q'_0 > 0$, и существует β такое, что матрицы $(Q''_0)^{-1} - \frac{\mu_1}{\beta}C_f^T C_f$ и $(Q'_0)^{-1} - \frac{\mu_1}{\beta}C_f^T C_f$ – не особые. Так как матрицы Q'_0, Q''_0 положительно определенные и упорядоченные, то имеет место неравенство $(Q''_0)^{-1} - \frac{\mu_1}{\beta}C_f^T C_f \leq (Q'_0)^{-1} - \frac{\mu_1}{\beta}C_f^T C_f$. При обращении левой и правой части отсюда получаем неравенство $[(Q''_0)^{-1} - \frac{\mu_1}{\beta}C_f^T C_f]^{-1} \geq [(Q'_0)^{-1} - \frac{\mu_1}{\beta}C_f^T C_f]^{-1}$, которое при имеющихся предположениях эквивалентно неравенству

$$Q''_0 \left(Q''_0 - \frac{\mu_1}{\beta} Q''_0 C_f^T C_f Q''_0 \right)^{-1} Q''_0 \geq Q'_0 \left(Q'_0 - \frac{\mu_1}{\beta} Q'_0 C_f^T C_f Q'_0 \right)^{-1} Q'_0.$$

Поскольку другие члены правой части РМУ (6) не зависят от Q , то последнее неравенство и доказывает монотонность правой части РМУ (6). Согласно лемме 3 из [21] РМУ(6) является матричной системой сравнения для (1). Лемма 1 доказана.

Доказательство леммы 2. Из неравенства $0 < Q_0 < \alpha I$ следует неравенство $0 < \frac{1}{\alpha}I < Q_0^{-1}$. Учитывая предположение $\frac{\mu_1}{\beta}C_f^T C_f \leq \frac{1}{\alpha}I$, получаем, что матрица $Q_0^{-1} - \frac{\mu_1}{\beta}C_f^T C_f > 0$. Тогда существует обратная матрица, ко-

торая также является положительно определенной. Далее с учетом сделанного предположения правая часть МСС (6) будет положительно определенной матрицей, что и доказывает $Q(t_0 + 1) > 0$. По индукции аналогичными рассуждениями доказывается положительная определенность $Q(t_0 + k, t_0, Q_0)$ для любых k , при которых решение существует. Лемма 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Пусть $Q(t) = Q(t, t_0, Q_0) > 0$ – решение РМУ (6) (или РЛМН (7)) с начальными данными $Q_0 \geq R_0 > 0$. Так как $Q_0 \geq R_0$, то $E(R_0) \subseteq E(Q_0)$, т.е. эллипсоид $E(R_0)$ содержится в эллипсоиде $E(Q_0)$. Кроме того, так как $Q(t) \leq R(t)$, то $E(Q(t)) \subseteq E(R(t))$, т.е. эллипсоид $E(Q(t))$ принадлежит эллипсоиду $E(R(t))$. По теореме 1 эллипсоид $E(Q(t))$ содержит при $t \in T$ все решения исходной системы, начинающиеся из заданного эллипсоида $E(Q_0)$. Поэтому выполнены все условия определения 2 и имеет место свойство ограниченности относительно заданных множеств $[E(R_0), E(R(t))]$.

При отсутствии внешних возмущений и $\mu_0 = 0$ в ограничении (2) РМУ (6) принимает вид

$$(П.6) \quad Q(t+1) = AQ(t) \left[Q(t) - \frac{\mu_1}{\beta} Q(t) C_f^T C_f Q(t) \right]^{-1} Q(t) A^T + \beta \Phi \Phi^T.$$

Если $Q(t) = Q(t, t_0, Q_0)$ – решение (П.6), удовлетворяющее условиям теоремы 3, то будут выполнены все условия определения 2 и имеет место свойство устойчивости относительно заданных множеств $[E(R_0), E(R(t))]$. Теорема 3 доказана.

Доказательство теоремы 4. Подставим (11) в (8). Применим теорему 1 для поиска инвариантного эллипсоида $E(Q(t))$ с матрицей $Q(t)$, удовлетворяющей РЛМН (7), принимающему для замкнутой системы вид:

$$(П.7) \quad \begin{bmatrix} Q(t+1) - \beta \Phi \Phi^T & AQ(t) + BKQ(t) & D & 0 & 0 \\ Q(t)A^T + Q(t)K^T B^T & \alpha Q(t) & 0 & Q(t)C_f^T + Q(t)K^T B_f^T & 0 \\ D^T & 0 & (1-\alpha)I & 0 & I \\ 0 & C_f Q(t) + B_f K Q(t) & 0 & \frac{\beta}{\mu_1} I & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & \frac{\beta}{\mu_0} I \end{bmatrix} \geq 0$$

при всех $t \in T$ и некоторых $\beta > 0$, $0 < \alpha < 1$.

В (П.7) переменные Q и K входят нелинейным образом. Введем матричную переменную $Y = KQ$, $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Тогда неравенство (П.7) примет линейный (по P и Y) вид (12). Далее, с учетом введенной переменной Y поиск минимального по критерию следа, ограничивающего выход $z(t)$ эллипсоида, приводит к задаче

$$\text{trace}[CQC^T] \rightarrow \min$$

при ограничении (12) и $t \in T$. Ограничение на управление (10) после подстановки (11) принимает вид $x^T K^T Z^{-1} K x \leq 1$. По лемме дополнения Шура оно эквивалентно матричному неравенству $K x x^T K^T \leq Z$. Учитывая оценку п. 2 из теоремы 2, последнее неравенство будет иметь место при условии

$KQK^T \leq Z$. Это неравенство с учетом замены $Y = KQ$ представляется в виде $Z - YQ^{-1}Y^T \geq 0$, а по лемме дополнения Шура записывается в виде (13).

Пусть матрицы $Q^*(t)$, $Y^*(t)$ – решение рассматриваемой задачи оптимизации с РЛМН (12) и ЛМН (13) при $t \in T$. Тогда матрица коэффициентов усиления регулятора определится как $K^*(t) = Y^*(t)Q^{*-1}(t)$. Если матрица $Q^*(t)$ удовлетворяет дополнительно ограничениям $Q^*(t_0) \geq R_0$ и $Q^*(t) \leq R(t)$ для всех $t \in T$, где R_0 и $R(t)$ – заданные положительно определенные симметрические матрицы, то согласно теореме 3 управление (11) обеспечивает ограниченность замкнутой системы относительно множеств $[E(R_0), E(R(t))]$, что завершает доказательство теоремы 4.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Schweppe F.C.* Uncertain Dynamic Systems. N.J.: Prentice Hall, 1973.
2. *Чернуоусько Ф.Л.* Оценивание фазового состояния динамических систем. Метод эллипсоидов. М.: Наука, 1988.
3. *Kurzhanskii A.B., Valyi I.* Ellipsoidal Calculus for Estimation and Control. Boston: Birkhauser, 1997.
4. *Pronzato L., Walter E.* Minimal volume ellipsoids // Int. J Adaptat. Control Signal Process. 1994. V. 8 (1). P. 15–30.
5. Bounding Approaches to System Identification / Eds Milanese M., Norton J., Piet-Lahanier H., Walter E. N.Y.: Springer Science+Business Media, 1994.
6. *Durieu C., Walter E., Polyak B.* Multi-Input Multi-Output Ellipsoidal State Bounding // J. Optim. Theory Appl. 2001. V. 111. No. 2. P. 273–303.
7. *Boyd S., El Ghaoui L., Feron E., Balakrishnan V.* Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. Philadelphia: SIAM, 1994.
8. *Баладин Д.В., Коган М.М.* Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. М.: Физматлит, 2007.
9. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С.* Управление линейными системами при внешних возмущениях. М.: ЛЕНАНД, 2014.
10. *Šiljak D.D., Stipanović D.M.* Robust Stabilization of Nonlinear Systems: the LMI Approach // Math. Probl. Engineer. 2000. V. 6. P. 461–493.
11. *Zečević A.I., Šiljak D.D.* Control of Complex Systems. Structural Constraints and Uncertainty. Ser. Communications and Control Engineering / Eds Sontag E.D., Thoma M., Isidori A., van Schuppen J.H. N.Y.: Springer Science+Business Media, LLC 2010.
12. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С.* Нелинейные системы с ограниченными или мультипликативными возмущениями // Проблемы устойчивости и управления. Сб. науч. статей, посв. 80-летию акад. В.М. Матросова. М.: Физматлит, 2013. С. 270–299.
13. *Poznyak A., Polyakov A., Azhmyakov V.* Attractive Ellipsoids in Robust Control. Switzerland: Springer Int. Publishing, 2014.
14. *Маликов А.И., Благов А.Е.* Динамический анализ систем автоматического управления с помощью матричных систем сравнения // Вестн. КГТУ им. А.Н. Туполева. 1996. № 4. С. 71–75.
15. *Маликов А.И., Благов А.Е.* Анализ динамики многосвязных систем автоматического регулирования с помощью матричных систем сравнения // Вестн. КГТУ им. А.Н. Туполева. 1998. № 2. С. 37–43.

16. *Маликов А.И.* Матричные системы сравнения в анализе динамики систем управления со структурными изменениями // Изв. РАН. ТиСУ. 1999. № 3. С. 11–21.
17. *Маликов А.И.* Матричные системы дифференциальных уравнений с условием квазимонотонности // Изв. ВУЗов. Математика. 2000. № 8. С. 35–45.
18. *Маликов А.И.* Метод матричных систем сравнения в анализе и синтезе систем управления с неопределенностями // Аналитическая механика, устойчивость и управление: Тр. X Междунар. Четаевской конф. Т. 2. Секц. 2. Устойчивость. Казань, 12–16 июня 2012 г. Казань: Изд-во Казан. гос. техн. ун-та, 2012. С. 360–370.
19. *Постников Н.С., Сабаев Е.Ф.* Матричные системы сравнения и их приложения к задачам автоматического регулирования // АиТ. 1980. № 4. С. 24–34.
Postnikov N.S., Sabaev E.F. Matrix Comparison Systems and Their Applications to Automatic Control Problems // Autom. Remote Control. 1980. No. 4. P. 455–465.
20. *Маликов А.И.* Эллипсоидальное оценивание состояния дискретных систем управления с помощью матричных систем сравнения // Изв. ВУЗов. Математика. 2004. № 1. С. 53–69.
21. *Куо Б.* Теория и проектирование цифровых систем управления. М.: Машиностроение, 1986.
Kuo B.C. Digital Control Systems. Oxford Univ. Press, 1995.
22. *Болтянский В.Г.* Оптимальное управление дискретными системами. М.: Наука, 1973.
23. *Lewis F.L., Vrabie D.L., Syrmos V.* Optimal Control. 2nd ed. N.Y.: Wiley, 1995.
24. *Квакернаак Х., Сиван Р.* Линейные оптимальные системы управления. М.: Мир, 1977.
25. *Werbos P.J.* Approximate Dynamic Programming for Real-Time Control and Neural Modeling // Handbook of Intelligent Control: Neural, Fuzzy, and Adaptive Approaches. V. 15. N.Y.: Nostrand, 1992. P. 493–525.
26. *Al-Tamimi A., Lewis F.L., Abu-Khalaf M.* Discrete-Time Nonlinear HJB Solution Using Approximate Dynamic Programming: Convergence Proof // IEEE Trans. Syst., Man Cyb. 2008. V. 38. No. 4. P. 943–949.
27. *Yu H., Jiang Z-P.* Robust Adaptive Dynamic Programming. N.J.: Wiley-IEEE Press, 2017.
28. *Kamalapurkar R., Walters P., Rosenfeld J., Dixon W.* Reinforcement Learning for Optimal Feedback Control. A Lyapunov-Based Approach. Springer, 2018.
29. *Amato F., Ambrosino R., Ariola M., Cosentino C., De Tommasi G.* Finite Time Stability and Control. Lecture Notes in Control and Information Science. London: Springer-Verlag, 2014.
30. *Маликов А.И.* Оценивание состояния и стабилизация непрерывных систем с неопределенными нелинейностями и возмущениями // АиТ. 2016. № 5. С. 19–36.
Malikov A.I. State Estimation and Stabilization of Continuous Systems with Uncertain Nonlinearities and Disturbances // Autom. Remote Control. 2016. V. 77. No. 5. P. 764–778.

Статья представлена к публикации членом редколлегии М.В. Хлебниковым.

Поступила в редакцию 05.10.2018

После доработки 02.03.2019

Принята к публикации 25.04.2019