Автоматика и телемеханика, № 10, 2019

Тематический выпуск[1]

© 2019 г. **Н.О. АМЕЛИНА, канд. физ.-мат. наук (natalia_amelina@mail.ru), О.Н. ГРАНИЧИН, д-р физ.-мат. наук (o.granichin@spbu.ru), А.Л. ФРАДКОВ, д-р техн. наук (fradkov@mail.ru) (Санкт-Петербургский государственный университет; Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург)**

МЕТОД УСРЕДНЕННЫХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ ДИСКРЕТНЫХ АДАПТИВНЫХ СИСТЕМ[2]

Динамические процессы в природе и технике часто описываются непрерывными или дискретными динамическими моделями, которые имеют форму нелинейных стохастических дифференциальных или разностных уравнений. Это определяет актуальность разработки эффективных методов упрощения описания динамических систем. Основным требованием к методам упрощения является сохранение определенных свойств изучаемого процесса. Среди таких — методы непрерывных или дискретных усредненных моделей, обзор которых дается в этой статье. Также представлены новые результаты для стохастических сетевых систем и показано, что метод усредненных моделей позволяет уменьшить сложность анализа стохастической замкнутой системы. Получены соответствующие верхние оценки среднеквадратичного отклонения состояний исходной стохастической системы от ее приближенной усредненной модели.

Ключевые слова: динамические системы, нелинейные стохастические уравнения, адаптивные системы, методы упрощения описания, приближенные усредненные модели.

DOI: 10.1134/S0005231019100015

1. Введение

Едва ли можно найти в прикладной математике, физике или технике задачи, при решении которых математическая модель исследуемого процесса не подвергалась бы каким-либо упрощениям. В современной теории управления замена исходного описания системы более простым широко применяется в задачах управления большими системами, стохастическими объектами, объектами с распределенными параметрами, в задачах адаптивного управления и т.п. Математические описания процессов в этих и многих других задачах

[1] Статьи, опубликованные в данном номере, являются продолжением тематического выпуска (№9, 2019 г.), посвященного 100-летию Я.З. Цыпкина.

[2] Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты №№17-08-01728, 19-03-00375). Результаты разделов 8–11, по анализу непрерывно-дискретных и сетевых систем получены в ИПМаш РАН при поддержке Российского научного фонда (грант №16-19-00057-П).

обычно базируются на непрерывных или дискретных динамических моделях, имеющих вид дифференциальных или разностных уравнений. Этим объясняется устойчивый интерес исследователей к вопросам разработки и обоснования эффективных методов упрощения динамических систем. Основным требованием к методу упрощения является сохранение тех или иных свойств изучаемого процесса.

Для непрерывных систем хорошо известен метод упрощения, основанный на разделении быстрых и медленных движений в системе и усреднении быстрой составляющей [1–12]. Этот метод, называемый методом (принципом) усреднения, разработан как для детерминированных, так и для стохастических систем. Эффект усреднения в таких системах возникает из-за стремления значений быстрой составляющей (при фиксированных медленных переменных) к константе или к периодическому колебанию. Применимость метода усреднения к стохастическим дифференциальным уравнениям обусловливается тем, что быстрое движение (возмущение) обладает свойством слабой зависимости: значения возмущений в отдаленные друг от друга моменты "почти" независимы.

Эффект усреднения может возникать и в дискретных системах, описываемых стохастическими разностными уравнениями. Здесь механизм усреднения иной и основан на малости приращений процесса за один шаг. Действия малых приращений, складываясь в большом количестве, компенсируют друг друга. Траектория процесса оказывается с большой вероятностью близкой к решению усредненного разностного уравнения, которое можно назвать *детерминированной дискретной моделью* исходной системы. Можно показать, что порядок точности аппроксимации траекторий исходной системы модельными не изменится, если перейти от дискретной модели к непрерывной, устремив к нулю шаг дискретизации. Полученное обыкновенное дифференциальное уравнение будем называть *детерминированной непрерывной моделью* исходной системы. Наряду с детерминированной моделью, дающей первое приближение к исходной системе, можно построить семейство *стохастических непрерывных моделей*, описываемых стохастическими дифференциальными уравнениями и предоставляющих более точную аппроксимацию вероятностных характеристик исходной системы. Таким образом, вместо решения задач анализа или синтеза для исходной системы можно попытаться решить аналогичную задачу для ее детерминированной или стохастической непрерывной модели, рассчитывая на то, что новая задача окажется проще первоначальной. Эта замена составляет сущность *метода непрерывных моделей*, которому посвящены многочисленные публикации, начиная с [13–15]. Этому методу посвящена и основная часть настоящего обзора. Цель обзора двоякая — познакомить читателя с перспективным (хотя и не новым) методом исследования и проследить историю его развития. Более подробно обоснование и применение метода непрерывных моделей и обзор публикаций, вышедших до 1981 г., рассматриваются в [16]. Краткий обзор более поздних публикаций представлен в [17, 18]. В качестве объединяющего термина для метода дискретных моделей и метода непрерывных моделей будем использовать термин *метод усредненных моделей*, поскольку усреднение правых частей является в обоих случаях ключевым элементом.

Поясним общую идею метода на простом иллюстративном примере поиска единственного корня неубывающей функции.

Пусть $g(x)$ — известная непрерывно дифференцируемая функция. Для итеративного (рекуррентного) поиска ее корня можно воспользоваться процедурой:

$$\hat{\theta}_k = \hat{\theta}_{k-1} - \alpha g(\hat{\theta}_{k-1}) \tag{1.1}$$

с фиксированным, достаточно малым коэффициентом $\alpha > 0$, в которой $\hat{\theta}_0$ — выбираемое пользователем начальное приближение и $\hat{\theta}_k$ — текущая оценка на итерации $k = 1, 2, \dots$

Если начальное значение $\hat{\theta}_0$ выбрано достаточно близко к корню θ функции $g(x)$, то процедура гарантирует сходимость оценок к θ при предположениях о том, что $g(x) < 0$ при $x < \theta$, $g(x) > 0$ при $x > \theta$, производная функции ограничена и $g'(x) > 0$ в некоторой окрестности точки θ [19]. Вообще говоря, эта процедура не требует и дифференцируемости функции $g(x)$.

Обозначим через E символ математического ожидания. При наблюдениях функции $g(x)$ с помехами в алгоритме (1.1) вместо $g(\hat{\theta}_{k-1})$ можно пользоваться только зашумленными данными $Y_k = G(w_k, \hat{\theta}_{k-1})$ — реализовавшимися значениями некоторых случайных величин $G(w_1, \hat{\theta}_0), G(w_1, \hat{\theta}_1), \dots$ Соответствующий алгоритм для решения задачи о поиске корня функции $g(x) = \mathrm{E}G(w, x)$ был предложен в 1951 г. в [20]:

$$\hat{\theta}_k = \hat{\theta}_{k-1} - \alpha_k Y_k,$$

с уменьшающейся до нуля последовательностью параметров (размеров) шагов $\{\alpha_k\}$, выбираемой пользователем таким образом, чтобы удовлетворялись соотношения:

$$\alpha_k > 0, \quad \sum_k \alpha_k = \infty, \quad \sum_k \alpha_k^2 < \infty.$$

Этот алгоритм называют алгоритмом Роббинса–Монро (РМ).

Покажем (как в [21]), что помехи с нулевым средним и ограниченной дисперсией не влияют на асимптотическое поведение алгоритма при $k \to \infty$. С одной стороны, при больших значениях k шаг алгоритма $\alpha_k \to 0$ и значения $\hat{\theta}_k$ меняются медленно, с другой — для достаточно малого $\epsilon > 0$ определим K_k^ϵ так, чтобы $\sum_{i=k}^{k+K_k^\epsilon} \alpha_i \approx \epsilon$.

Алгоритм РМ можно переписать в виде

$$\hat{\theta}_k = \hat{\theta}_{k-1} - \alpha_k g(\hat{\theta}_{k-1}) + \alpha_k \left(g(\hat{\theta}_{k-1}) - Y_k \right).$$

А значит,

$$\hat{\theta}_{k+K_k^\epsilon} - \hat{\theta}_{k-1} \approx -\epsilon g(\hat{\theta}_{k-1}) + error,$$

где

$$error = \sum_{i=k}^{k+K_k^\epsilon} \alpha_i \left(g(\hat{\theta}_{i-1}) - Y_i \right).$$

Если предположить, что помехи $\{Y_k - g(\hat{\theta}_{k-1})\}_{k=1,2,\ldots}$ представляют собой последовательность ортогональных случайных величин с нулевыми средними значениями и ограниченной дисперсией $\sigma^2(\hat{\theta}_{k-1})$, тогда для дисперсии ошибки имеем

$$\mathrm{E}\left[\sum_{i=k}^{k+K_k^\epsilon} \alpha_i \Big(y_i - g(\hat{\theta}_{i-1}) \Big) \right]^2 = \sum_{i=n}^{n+N_n^\epsilon} \mathcal{O}(\alpha_i^2) = \mathcal{O}(\epsilon)\alpha_k.$$

На итерациях из интервала $[k, k + K_k^\epsilon)$ для малых ϵ и больших k среднее изменение значения параметра более существенно, чем "error". Следовательно, асимптотическое поведение оценок почти наверное совпадает с асимптотическим поведением некоторого решения обыкновенного дифференциального уравнения

$$\dot{\theta} = -g(\theta).$$

При дополнительных ограничениях можно показать, что $\hat{\theta}_k \to \theta$ с вероятностью единица, если θ является асимптотически устойчивой точкой этого уравнения.

Несколько слов об истории подхода.

Первые результаты по обоснованию перехода от исходной дискретной стохастической системы к ее упрощенной усредненной модели были получены в начале 1970-х гг. независимо несколькими авторами. С. Мееркиовым в [22] переход к усредненной модели марковской цепи был проведен на основе метода усреднения Крылова–Боголюбова. Аналогично 1-й и 2-й теоремам Боголюбова сходимость по вероятности решений исходной и усредненной систем на конечном временно́м интервале и близость траекторий на бесконечном интервале в предположении асимптотической устойчивости усредненной модели были установлены для независимых возмущений.

В январе 1973 г. Д.П. Деревицкий и А.Л. Фрадков доложили первые результаты по построению и обоснованию детерминированной и стохастической непрерывных моделей на Всесоюзной школе по адаптивным системам Я.З. Цыпкина в Агверане [23] и представили статью в журнал "Автоматика и телемеханика". В июне 1973 г. А.Л. Фрадков получил приглашение Я.З. Цыпкина выступить с этой работой на его семинаре[3]. На семинаре произошло

[3] Я (А.Л. Фрадков) был тогда еще совсем молодым, еще даже не аспирантом, это было первое мое приглашение и первое выступление перед маститыми учеными. Но доброжелательное отношение Я.З. Цыпкина победило волнение и все прошло хорошо, статью приняли к публикации. Так что можно сказать, что Я.З. Цыпкин поддержал развитие этого метода еще в его колыбели. Я.З. Цыпкин поддержал и публикацию книги [16], став ее ответственным редактором (примечание А.Л. Фрадкова)

знакомство с молодым шведом Л. Льюнгом из Линчепинга, стажировавшимся в то время в Институте проблем управления. Оказалось, что в то время у Льюнга уже сформировались основные идеи его результатов по исследованию процессов стохастической аппроксимации при зависимых возмущениях. Условия убывания шага процесса позволяли более тесно связать асимптотические свойства системы и ее модели. Статья Деревицкого и Фрадкова [13] вышла в начале 1974 г., а Льюнг в том же году представил свои результаты на конференции в Будапеште [24]. Опубликованная позже статья [15] имела большой резонанс (781 цитирование на 11.04.2019 в БД Web of Science) и была даже включена в число 25 наиболее влиятельных статей XX в. по автоматическому управлению [25]. Авторам [13] повезло меньше, но иногда этот подход называют *Derevitskii–Fradkov–Ljung (DFL)–scheme* [26]. Интересно отметить, что в опубликованной в 1973 г. статье Б.Т. Поляка и Я.З. Цыпкина [27] для доказательства результатов использовалась функция Ляпунова, устанавливающая асимптотическую устойчивость усредненной непрерывной модели, однако сама модель не была введена. Аналогично в работах по методу усреднения в стохастических системах и его применению к стохастической аппроксимации [28, 29] как исходная, так и аппроксимирующая системы непрерывны, а дискретные модели фактически не вводилась и не исследовались.

Основной текст обзора организован следующим образом. В разделе 2 дано формальное описание метода непрерывных моделей. В разделе 3 собраны результаты, дающие условия близости процессов в исходной системе и ее детерминированной модели. Раздел 4 посвящен связи асимптотических свойств системы и ее детерминированной модели. Стохастические непрерывные модели описываются в разделе 5. В разделе 6 метод усредненных моделей распространяется на гибридные (дискретно-непрерывные) системы. В последующих разделах рассматриваются применения и обобщения метода и смежные вопросы. В разделе 7 описываются результаты по сходимости градиентных алгоритмов при зависимых помехах. В разделе 8 приведены обобщения на системы с нелипшицевыми правыми частями и с неявным вхождением шага. Раздел 9 посвящен распространению метода на сетевые системы, а в разделе 10 собраны сведения о некоторых применениях. В разделе 11 приведены два иллюстрирующих примера.

2. Описание метода непрерывных моделей

Будем рассматривать дискретные системы, описываемые стохастическими разностными уравнениями вида

$$z_{k+1} = z_k + \alpha_k F(z_k, f_k), \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{2.1}$$

где $z_k \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния системы, $f_k \in \mathbb{R}^m$ — стационарная последовательность случайных векторов внешних воздействий (помех), α_k — параметр шага системы. Усредним правые части (2.1) по f_k при фиксированном z_k и построим усредненную дискретную систему

$$\bar{z}_{k+1} = \bar{z}_k + \alpha_k A(z_k), \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{2.2}$$

где $A(z) = \mathrm{E}F(z, f_k)$ (предполагается, что математическое ожидание существует и не зависит от k). Теперь перейдем к непрерывному времени и построим дифференциальное уравнение непрерывной системы

$$\frac{dz}{dt} = A(z). \tag{2.3}$$

Уравнение (2.3) будем называть детерминированной или усредненной непрерывной моделью исходной дискретной системы (2.1), а разностное уравнение (2.2) — детерминированной или усредненной дискретной моделью. Если последовательность f_k не стационарна, но для каждого z существует предел $A(z) = \lim_{k\to\infty} \mathrm{E}F(z, f_k)$, то также можно построить непрерывную модель (2.3). Разумеется, что для формулировки точных утверждений на функцию $A(z)$ следует наложить условия, гарантирующие существование и единственность решений (2.3).

Возможность использования модели (2.3) для изучения исходной системы (2.1) обуславливается тем, что при выполнении некоторых предположений (см. далее) решения z_k системы (2.1) при малых α_k близки в определенном смысле к решению $z(t)$ модели (2.3), взятому в момент времени

$$t_k = \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i. \tag{2.4}$$

Начальные условия в (2.1) и (2.3) взяты одинаковыми: $z(0) = z_0$. Соотношением (2.4) в дискретной системе (2.1) вводится фиктивное (эквивалентное) время. Применение модели (2.3) для изучения (2.1) выполняется в два этапа:

а) построение модели;

б) изучение модели (аналитическое или численное).

Например, возможные предельные точки процесса z_k можно приблизить, решая уравнение $A(z) = 0$. В этом случае аналитическое решение (если оно возможно) будет проще, а численное решение потребует меньшего количества вычислений. В частности, устойчивая предельная точка может быть определена путем численного интегрирования (2.3) с постоянным или увеличивающимся параметром шага. Это более экономично, чем моделирование исходной системы (2.1), где часто $\alpha_k \to 0$ при $k \to \infty$. Если требуется оценить случайное время попадания траектории z_k в окрестность состояния равновесия, то в первом приближении можно взять время попадания в ту же окрестность решения $z(t_k)$ детерминированной модели (2.3) и т.д. Отметим, что в задачах адаптации вектор z_k обычно представляет собой вектор настраиваемых коэффициентов, т.е. вектор текущих оценок коэффициентов объекта управления или некоторого "идеального" регулятора, а система (2.1) описывает алгоритм адаптации.

Форма результатов, обосновывающих применимость метода непрерывных моделей, зависит от тех свойств исходной системы, которые необходимо исследовать. Если исследователя интересует поведение системы на конечном или бесконечном промежутке времени (задача анализа динамики), то нужны оценки степени близости траекторий (2.1) и (2.3). Если же предметом исследования являются асимптотические свойства системы (устойчивость, диссипативностъ и т.д.), то нужны условия, при которых наличие этих свойств у системы (2.1) следует из наличия аналогичных свойств у модели (2.3).

Сложность обоснования метода зависит от характера возмущений f_k. Простейший случай — независимость и одинаковая распределенность векторов f_k. Этот вариант возникает, например, в задачах идентификации и адаптивного управления для статических объектов. Если объект управления динамический, то векторы f_k (векторы состояния объекта) становятся зависимыми. Для обоснования метода в этом варианте приходится предполагать, что зависимость между f_k и f_l ослабляется с ростом величины $k-l$. Условия ослабления зависимости (условия перемешивания) получили распространение в предельных теоремах теории вероятностей [30]. Они выполняются, в частности, если f_k порождается линейным разностным уравнением

$$f_{k+1} = Gf_k + B\eta_k, \tag{2.5}$$

в котором η_k — независимые одинаково распределенные случайные векторы, а матрица G устойчива (все ее собственные числа по модулю меньше единицы). Такой случай встречается в задачах идентификации линейных динамических систем. В терминологии метода усреднения [1, 12] можно сказать, что в системе (2.1), (2.5) компоненты вектора z_k (настраиваемые коэффициентов) являются медленными переменными, а компоненты f_k (фазовые координаты системы) являются быстрыми переменными.

Еще более сложные задачи возникают, когда динамика быстрого движения может зависеть от медленных переменных. Пусть, например, возмущения вместо соотношений (2.5) описываются уравнением

$$f_{k+1} = G(z_k)f_k + B(z_k)\eta_k. \tag{2.6}$$

Именно этот случай характерен для задач адаптивного управления, в которых поведение объекта управления определяется значениями настраиваемых параметров z_k. Чтобы построить непрерывную модель, нужно рассмотреть уравнение быстрого движения при "замороженных" медленных переменных

$$f_{k+1}(z) = G(z)f_k(z) + B(z)\eta_k \tag{2.7}$$

и положить $A(z) = \lim_{k\to\infty} \mathrm{E}F\left(z, f_k(z)\right)$ в модели (2.3). При этом правая часть (2.3) будет определена лишь для таких z, для которых указанный предел существует. Существование предела и слабая зависимость векторов $f_k(z)$ обеспечены, например, если векторы η_k независимы и одинаково распределены, а матрица $G(z)$ — устойчива. Отметим, что усреднение быстрых движений в системе (2.1), (2.6) приводит к упрощенной модели (2.3) пониженного порядка. При таком подходе система (2.1), (2.6) рассматривается как сингулярно возмущенная [2, 5–7] по отношению к (2.3).

В ряде случаев, однако, разделение быстрых и медленных движений в системе (а следовательно, и понижение порядка модели (2.3)) неправомерно.

Рассмотрим, например, задачу адаптивной стабилизации линейного непрерывного объекта

$$\frac{dx}{dt} = Ax + bu(t) + \eta(t) \tag{2.8}$$

при помощи дискретного адаптивного регулятора

$$\begin{cases} u(t) = u_k = \theta_k^{\mathrm{T}} x_k, \quad t_k \leqslant t < t_{k+1}, \\ \theta_{k+1} = \theta_k + \alpha_k \Phi(\theta_k, x_k). \end{cases} \tag{2.9}$$

Здесь $x(t)$ — вектор состояния объекта, $x_k = x(t_k)$, u_k, θ_k — значения управления и настраиваемых коэффициентов на промежутке $[t_k, t_{k+1}]$, $\eta(t)$ — случайное возмущение, $\mathrm{E}\eta(t) = 0$, $t_k = kh$, $k = 0, 1, \ldots$ — моменты коррекции значений u_k, θ_k. Если время $h = t_{k+1} - t_k$ между последовательными моментами коррекции мало, то изменение вектора $x(t)$ за это время тоже будет мало. Поэтому, приводя уравнение объекта к дискретной форме (2.6), получаем матрицу $G(z_k)$, близкую к единичной. Степень зависимости между векторами x_k и x_l при уменьшении h будет расти даже в случае устойчивой матрицы A. Систему (2.8), (2.9) можно рассматривать как сингулярно возмущенную лишь при α_k, малых по сравнению с h. Такое требование приводит к неоправданному замедлению процесса адаптации, и рассмотренная выше схема построения непрерывной модели становится неприемлемой.

В описанных задачах можно построить непрерывную модель того же порядка, что и исходная система [14]. Предположим, например, что возмущение $\eta(t)$ (2.8) центрировано: $\mathrm{E}\eta(t) = 0$, а шаг α_k в алгоритме адаптации пропорционален интервалу выборки h, т.е. $\alpha_k = \overline{\alpha} h$. Тогда в качестве непрерывной модели естественно взять систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = Ax + bu, \quad u = \theta^{\mathrm{T}} x, \\ \dfrac{d\theta}{dt} = \overline{\alpha} \Phi(\theta, x), \end{cases} \tag{2.10}$$

по отношению к которой исходная система (2.8), (2.9) регулярно возмущена. В этом случае не происходит разделения движения в (2.8), (2.9) на быстрые и медленные компоненты.

Перейдем к формулировке результатов, обосновывающих применимость метода непрерывных моделей. Из приведенных сведений вытекает, что эти результаты делятся на две группы: 1) утверждения о связи асимптотических свойств исходной системы и модели; 2) установление близости статистических характеристик исходного и модельного процессов.

3. Близость траекторий исходной и модельной системы

Перечислим некоторые результаты, дающие оценки точности аппроксимации траекторий исходной системы (2.1) траекториями детерминированной модели (2.3). Первое утверждение относится к случаю независимых стационарных возмущений f_k и правых частей модели (2.3), удовлетворяющих глобальному условию Липшица. Положим $b(z) = \mathrm{E}\|F(z, f_k) - A(z)\|^2$. Пусть z_k — решение системы (2.1), а $z(t_k)$ — решение системы (2.3) с тем же начальным условием: $z(t_0) = z_0$.

Теорема 1 [13]. *Пусть векторы f_k независимы и одинаково распределены и выполняются следующие условия:*

$$\left\|A(z) - A(z')\right\| < L_1 \left\|z - z'\right\|, \tag{3.1}$$

$$b(z) \leqslant L_2 \left(1 + \|z\|^2\right). \tag{3.2}$$

Тогда существуют такие числа $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$, что при $0 \leqslant \alpha_k \leqslant \alpha$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$, выполняется неравенство

$$\mathrm{E} \max_{1 \leqslant t_k \leqslant t_N} \|z_k - z(t_k)\|^2 \leqslant C_1 e^{C_2 t_N} \alpha. \tag{3.3}$$

Утверждения, близкие к теореме 1, имеются в [22, 31]. В основополагающей публикации [31] устанавливается сходимость по вероятности траекторий (2.1) и (2.3), а в [22] получены оценки вероятности выхода траектории (2.1) из ε-трубки решения $\overline{z}_k$ детерминированной дискретной модели

$$\overline{z}_{k+1} = \overline{z}_k + \alpha_k A(\overline{z}_k). \tag{3.4}$$

В теореме 1 утверждается о близости в среднеквадратическом траекторий (2.1) и (2.3) равномерно на конечном промежутке времени, т.е. при фиксированном t_N среднеквадратическое отклонение траектории исходной системы от траектории модели имеет порядок квадратного корня из максимального размера шага α. С ростом промежутка времени t_N точность оценки быстро падает и это по существу. Аналогичный результат справедлив и для слабо зависимых возмущений f_k. В следующем определении понятию слабой зависимости придается точный смысл.

Определение 1 [30]. *Пусть f_k, $k = 0, 1, \ldots,$ — случайный процесс и $\mathcal{F}_k^l$ — σ-алгебра, порожденная значениями f_r, $k \leqslant r \leqslant l$. Говорят, что процесс f_k удовлетворяет* условию сильного перемешивания, *если*

$$\sup_k \sup_{\xi,\eta} |\mathrm{E}\xi\eta - \mathrm{E}\xi\mathrm{E}\eta| = \zeta_r \xrightarrow[r\to\infty]{} 0, \tag{3.5}$$

где ξ — случайная величина, измеримая[4] *относительно $\mathcal{F}_0^k$, η — случайная величина, измеримая относительно $\mathcal{F}_{k+r}^\infty$, причем $|\xi| \leqslant 1$ и $|\eta| \leqslant 1$ с вероятностью единица. Функцию ζ_r называют коэффициентом перемешивания.*

Теорема 2. Пусть векторы f_k удовлетворяют условию сильного перемешивания, $\mathrm{E}\|F(z, f_k)\|^8 \leqslant C_R < \infty$ при $\|z\| < R$ и

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\zeta_k^{1/2} < \infty. \tag{3.6}$$

[4] Измеримость ξ относительно σ-алгебры $\mathcal{F}_k^l$ означает, что значения случайной величины ξ полностью определяются значениями f_r при $k \leqslant r \leqslant l$.

Предположим, что существует число $L > 0$ и область $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ такие, что $f_k \in \Omega$ с вероятностью единица и

$$\|F(z, f) - F(z', f)\| \leqslant L\|z - z'\| \tag{3.7}$$

для всех $f \in \Omega$.

Тогда существуют $C_3 > 0$ и $C_4 > 0$, такие что

$$\mathrm{E} \max_{0 \leqslant t_k \leqslant t_N} \|z_k - z(t_k)\|^2 \leqslant C_3 e^{C_4 t_N} \alpha \tag{3.8}$$

для $0 \leqslant \alpha_k \leqslant \alpha$.

Доказательство теоремы 2 приведено в Приложении. Отметим, что условие (3.6) выполняется, например, если f_k порождаются уравнением (2.5) при устойчивой матрице G и ограниченном f_k, поскольку в этом случае коэффициент перемешивания процесса ζ_k убывает экспоненциально: $\zeta_k \leqslant C_\zeta q^k$, $C_\alpha > 0$, $0 < q < 1$.

Если модель (2.3) обладает единственным экспоненциально устойчивым в целом состоянием равновесия z_*, то можно получить оценку близости на бесконечном промежутке. Как известно [32], достаточным (а при некотором уточнении и необходимым) условием экспоненциальной устойчивости в целом точки z_* является существование дважды непрерывно дифференцируемой функции $V(z)$, удовлетворяющей при некоторых положительных $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$ неравенствам[5]

$$\dot{V} \leqslant -\varkappa_1 V(z), \tag{3.9}$$

$$\|\nabla^2 V(z)\| \leqslant \varkappa_2, \qquad V(z) \geqslant \varkappa_3 \|z - z_*\|^2, \tag{3.10}$$

где $\dot{V}(z) = \nabla V(z)^{\mathrm{T}} A(z)$ — производная функции $V(z)$ вдоль траектории модели (2.3).

Т е о р е м а 3. *Пусть выполняются условия теоремы 1 и существует функция $V(z)$, удовлетворяющая* (3.9), (3.10).

Тогда для некоторых $C_5 > 0$ и $\beta > 0$ справедливы неравенства

$$\mathrm{E}\|z_k - z(t_k)\|^2 \leqslant C_5 \alpha^\beta, \quad k = 0, 1, \ldots \tag{3.11}$$

Более сложные процессы будут иметь место, если модель (2.3) обладает несколькими устойчивыми состояниями равновесия $z_*^{(1)}, \ldots, z_*^{(r)}$. В этом случае становятся возможными переходы траекторий исходной системы между областями притяжения точек $z_*^{(1)}, \ldots, z_*^{(r)}$, происходящие "вопреки" усредненному движению и описываемые теоремами о больших уклонениях [11, 12]. Вероятность перехода за конечное время положительна, хотя и весьма мала, поэтому на бесконечном промежутке времени переходы происходят с вероятностью единица.

[5] Через $\nabla V(z)$ обозначается градиент функции $V(z)$, а через $\nabla^2 V(z)$ — матрица ее вторых производных.

Пусть для простоты $\alpha_k \equiv \alpha > 0$. Пользуясь методами [12, 30], можно показать, что при малых α и при небольших дополнительных предположениях о процессах z_k, f_k переходы траекторий (2.1) между окрестностями точек $z_*^{(i)}$ описываются цепью Маркова с переходными вероятностями $p_{ij} = \exp(-v_{ij}/\alpha)$ (с точностью до логарифмической эквивалентности). Числа $v_{ij} > 0$ определяются из решения некоторой вариационной задачи. Очевидно, что если $v_{ij} > v_{i'j'}$, то $p_{ij}/p_{i'j'} \to 0$ при $\alpha \to 0$. Поэтому при малых α первый выход из окрестности точки $z_*^{(i)}$ с подавляющей вероятностью произойдет в окрестность точки $z_*^{(i_1)}$, где индекс $i_1 = l(i)$ определяется из условия $v_{il(i)} = \min_{k \neq l} v_{ik}$. Из окрестности $z_*^{(i_1)}$ траектория перейдет в окрестность $z_*^{(i_2)}$, где $i_2 = l(i_1)$ и т.д., пока состояния не начнут повторяться. Таким образом, все точки $z_*^{(i)}$ разобьются на циклы. Переходы между циклами происходят еще реже, чем редкие переходы внутри циклов. Тем самым формируются циклы 2-го ранга и т.п.

4. Связь асимптотических свойств исходной системы и детерминированной модели

Рассмотрим асимптотическую устойчивость и диссипативность[6] системы (2.1) (в среднеквадратическом смысле или почти наверное). Характер связи асимптотических свойств системы (2.1) и модели (2.3) зависит от выполнения условия $\alpha_k \to 0$ при $k \to \infty$. Если $\alpha_k \not\to 0$ (например, если $\alpha_k \equiv \alpha > 0$), то даже при экспоненциально устойчивой модели (2.3) с единственной предельной точкой исходная система (2.1) будет, вообще говоря, только диссипативной (в среднеквадратическом)[7]. При этом предельная дисперсия z_k, как следует из [34], стремится к нулю при $\alpha \to \infty$. Если же модель (2.3) лишь диссипативна (в условиях теоремы 3 неравенство (3.9) заменяется на $\dot{V}(z) \leqslant -\kappa_1 V(z) + \kappa_0$), то при малых α система (2.1) также будет диссипативной, причем предельная дисперсия z_k не будет стремиться к нулю при $\alpha \to 0$.

Более тесно связаны свойства систем (2.1) и (2.3) при $\alpha_k \to 0$. В этом случае траектории (2.1) и (2.3), грубо говоря, сближаются при $k \to \infty$ и система (2.1) оказывается устойчивой, если устойчива модель (2.3). Приведем точную формулировку для случая, когда динамика быстрого движения не зависит от медленных переменных.

Т е о р е м а 4. *Пусть существуют область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, дважды непрерывно дифференцируемая при $z \in \Omega$ функция $V(z)$, целое число $p \geqslant 1$ и число ε : $0 < \varepsilon < 1$, удовлетворяющие условиям:*

---

[6] Под диссипативностью динамической системы будем понимать ограниченность всех ее решений и существование ограниченного множества D такого, что все решения стремятся к D при $t \to \infty$.

[7] Для отдельных классов процессов исходная система (2.1) может, конечно, обладать и свойствами устойчивости (см. [33, 34]). Например, (2.1) будет при достаточно малом α асимптотически устойчивой в среднеквадратическом, если $b(z) \leqslant L_2\|z - z_*\|^2$ (случай мультипликативных возмущений).

1. *Для всех* $z \in \Omega$ *и* $f \in \mathbb{R}^m$ *функция* $F(z, f)$ *непрерывно дифференцируема по* z*;*

2. $V(z) \geqslant 0$ *и* $\dot{V}(z) \leqslant 0$ *для* $z \in \Omega$*, где* $\dot{V}(z)$ *— производная функции* $V(z)$ *в силу уравнения непрерывной модели* (2.3)*;*

3. *Для почти всех траекторий* z_k *системы* (2.1) *существует последовательность* $k_s \to \infty$ *такая, что* $z_{k_s} \in \overline{\Omega}$*, где* $\overline{\Omega}$ *— некоторое ограниченное замкнутое подмножество* Ω*;*

4. *Числа* $\alpha_k \geqslant$ *в* (2.1) *удовлетворяют условиям:*

$$\alpha_k \geqslant \alpha_{k+1}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k = \infty, \tag{4.1}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k^{2p} < \infty; \tag{4.2}$$

5. *Последовательность* f_k *почти наверное ограничена, обладает свойством сильного перемешивания, и коэффициент перемешивания* ζ_k *удовлетворяет соотношению*

$$\sum_{k-1}^{\infty} \alpha^{p-1} \zeta_k^{\varepsilon} < \infty. \tag{4.3}$$

Тогда траектории (2.1) *с вероятностью единица либо сходятся к множеству* $\Omega_0 = \{z \in \Omega : \dot{V}(z) = 0\}$*, либо имеют предельную точку на границе* Ω*. Последний вариант исключается, если множество* Ω_0 *ограничено и замкнуто.*

Отметим, что в случае когда система (2.1) линейна, а возмущения f_k описываются марковской цепью, связи между устойчивостью системы (2.1) и непрерывной модели (2.3) были описаны в [33]. Аналоги теоремы 4 для алгоритмов типа стохастической аппроксимации и независимых f_k были описаны в [27, 34, 35]. Результаты, близкие к теореме 4 были получены в [15, 36], причем в [15] был также рассмотрен случай, когда уравнение быстрых движений зависит от медленных переменных.

5. Стохастические непрерывные модели

До сих пор рассматривалась детерминированная непрерывная модель стохастической системы (2.1), описываемая обыкновенными дифференциальными уравнениями (2.3). Оценка (3.3) показывает, что отклонения траекторий системы (2.1) от траекторий модели (2.3) имеют порядок $\sqrt{\alpha_k}$, где α_k — параметр шага в (2.1). Эти отклонения порождаются случайными флюктуациями траектории (2.1) относительно своей систематической составляющей. Естественно попытаться построить более точную непрерывную модель системы (2.1), учитывающую случайные флюктуации. С помощью такой модели можно надеяться получить более точные количественные характеристики исходного процесса, которые нельзя получить по детерминированной модели (например, детерминированная модель не позволяет оценить установившуюся ошибку линейного алгоритма адаптации с постоянным шагом в условиях помех [13]). Будем называть модели, учитывающие случайность стохастическими непрерывными моделями или просто стохастическими моделями.

Удобным аппаратом описания и исследования стохастических непрерывных моделей является теория стохастических дифференциальных уравнений, для записи которых будем использовать форму Ито [10]:

$$dz(t) = a(z,t)dt + D(z,t)dW(t), \tag{5.1}$$

где $z(t) \in \mathbb{R}^n$, $a(\cdot)$ — n-мерный вектор сноса, $D(\cdot)$ — $(n \times r)$-матрица диффузии, $dW(t)$ — стохастический дифференциал Ито от r-мерного винеровского процесса с независимыми компонентами $W(t)$.

Как известно, при выполнении условий гладкости и ограниченного роста функций $a(\cdot)$ и $D(\cdot)$ уравнение (5.1) имеет единственное решение $z(t)$, которое является диффузионным марковским процессом. Процесс $z(t)$ определяется его локальными характеристиками: вектором первых и матрицей вторых условных моментов приращений $\Delta z(t) = z(t+\Delta t) - z(t)$. Эти характеристики имеют следующую форму:

$$\mathrm{E}\{\Delta z(t) | z(t) = z\} = a(z,t)\Delta t + O(\Delta t^{3/2}), \tag{5.2}$$

$$\mathrm{E}\{\Delta z(t)\Delta z(t)^{\mathrm{T}} | z(t)\} = D(z,t)D(z,t)^{\mathrm{T}}\Delta t + O(\Delta t^{3/2}), \tag{5.3}$$

где через $O(\Delta t^r)$ обозначается величина, стремящаяся к нулю не медленнее Δt^r при $\Delta t \to 0$. Очевидно, что детерминированную модель (2.3) можно записать в виде (5.1) при $a(z,t) = A(z)$ и $D(z,t) = 0$. Пусть $\overline{z}(t)$ — решение детерминированной модели (2.3) с начальным условием $\overline{z}(0) = z_0$. Тогда приращение $\overline{z}(t)$ за время $\alpha_k = t_{k+1} - t_k$ близко при малом α_k к условному среднему приращения исходного процесса:

$$\mathrm{E}\{z_{k+1} - z_k | z_k = z\} = \alpha_k \mathrm{E}F(z, f_k) = \alpha_k A(z) \approx z(t_{k+1}) - z(t_k)$$

при $\overline{z}(t_k) = z$. Аналогично

$$\mathrm{E}\left\{(z_{k+1} - z_k)(z_{k+1} - z_k)^{\mathrm{T}} | z_k = z\right\} \approx [\overline{z}(t_{k+1}) - \overline{z}(t_k)][\overline{z}(t_{k+1}) - z(t_k)]^{\mathrm{T}},$$

причем в обоих случаях приближенные равенства верны с точностью порядка α_k^2.

Простейший вариант стохастической модели получается, если выбрать в (5.1)

$$a(z,t) = a(t) = A(\overline{z}(t)), \quad D(z,t) = D(t) = \sqrt{\alpha_k} \cdot \sqrt{B(\overline{z}(t))} \tag{5.4}$$

при $t_k \leqslant t \leqslant t_{k+1}$, где $B(z) = Eh(z, f_k)h(z, f_k)^{\mathrm{T}}$, $h(z, f_k) = F(z, f_k) - A(z)$, $\sqrt{B(\cdot)}$ — квадратный корень из симметричной неотрицательной матрицы $B(\cdot)$, $\overline{z}(t)$ – решение (2.3) с начальным условием $\overline{z}(t_0) = z_0$. Коэффициенты (5.4) вычисляются вдоль траектории детерминированной модели. Можно показать, что при таком построении стохастической модели вторые условные моменты приращений ее траекторий близки к соответствующим характеристикам исходной системы (2.1) с точностью порядка α_k^3, т.е. с большей точностью, чем для детерминированной модели.

Если обозначить через $\tilde{z}(t)$ решение уравнений (5.1), (5.4), то можно записать приближенное равенство

$$\tilde{z}(t_{k+1}) - \tilde{z}(t_k) \approx \alpha_k A(\overline{z}(t_k)) + \sqrt{\alpha_k B(\overline{z}(t_k))}\eta_k, \tag{5.5}$$

где $\eta_k = W(t_{k+1}) - W(t_k)$ — приращения винеровского процесса, являющиеся независимыми нормальными случайными векторами с ковариационной матрицей $\mathrm{E}\eta_k\eta_k^{\mathrm{T}} = \alpha_k I_r$. Соотношение (5.5) используется, например, при статистическом моделировании системы (5.1), (5.4). Из (5.5) видно, что при замене исходной системы (2.1) стохастической моделью (5.1), (5.4) происходит "нормализация" флюктуаций: замена реальных флюктуаций нормально распределенными с той же ковариационной матрицей.

Несмотря на простоту построения, стохастическая модель (5.1), (5.4) неудобна для применений, поскольку при получении аналитических или численных оценок решений (5.1), (5.4) требуется предварительно находить решения детерминированной модели (2.3). От этого недостатка свободна стохастическая модель, получающаяся, если в (5.1) выбрать

$$a(z,t) = A(z) \quad \text{и} \quad D(z,t) = \sqrt{\alpha_k B(z)} \tag{5.6}$$

при $t_k \leqslant t \leqslant t_{k+1}$. Нетрудно показать, что модель (5.1), (5.6) с такой же точностью аппроксимирует локальные характеристики исходной системы (2.1), как и модель (5.1), (5.4). Однако вместо (5.5) для траекторий (5.1), (5.6) справедливо соотношение

$$\tilde{z}(t_{k+1}) - \tilde{z}(t_k) \approx \alpha_k A(\tilde{z}(t_k)) + \sqrt{\alpha_k B(\tilde{z}(t_k))}\eta_k, \tag{5.7}$$

где $\tilde{z}(t_k)$ — решение уравнения (5.1), (5.6). При использовании (5.1), (5.6) надобность в нахождении траектории детерминированной модели (2.3) отпадает. При замене системы (2.1) ее стохастической моделью аналитическое и численное исследование упрощается. Это объясняется "частичным усреднением" и "нормализацией" правых частей уравнений исходной системы. Примеры получения аналитических оценок с помощью стохастической модели приведены в [13, 37, 38].

Как уже отмечалось, точность аппроксимации локальных характеристик системы (2.1) стохастической моделью (5.1), (5.6) по первым моментам имеет порядок α_k^2, а по вторым моментам — порядок α_k^3. Оказывается, что можно построить целое семейство стохастических моделей, дающих сколь угодно высокий порядок аппроксимации. Например, для построения модели, имеющей порядок точности α_k^3 как по первым, так и по вторым моментам, необходимо изменить коэффициент сноса модели (5.1), (5.6). Модифицированная стохастическая модель описывается уравнением

$$d\tilde{z} = \left[I_n - \frac{\alpha_k}{2}\frac{\partial A(\tilde{z})}{\partial \tilde{z}}\right] A(\tilde{z})dt + \sqrt{\alpha_k B(\tilde{z})}dW(t) \tag{5.8}$$

при $t_k \leqslant t < t_{k+1}$. Следует заметить, однако, что более точные модели являются менее удобными для применения, поскольку громоздкость уравнений модели быстро растет с повышением ее точности.

6. Метод усредненных моделей для гибридных систем

В современных компьютерно-управляемых системах, в частности, в киберфизических системах возникают ситуации, когда алгоритмы управления или оценивания состояния физического объекта функционируют дискретно во времени, тогда как сам объект функционирует в непрерывном времени. В этих ситуациях исходная система является гибридной (дискретно-непрерывной). Естественно попытаться применить упрощенные (усредненные) модели для анализа и синтеза систем и в этих случаях. В частности, при синтезе дискретной адаптивной системы с помощью ее непрерывной упрощенной модели возникает вопрос о сохранении свойств непрерывной системы при дискретизации алгоритмов управления и адаптации. Для решения этого вопроса можно использовать метод, развитый в [13, 16] и позволяющий установить, в частности, что если непрерывная упрощенная модель системы обладает свойством экспоненциальной диссипативности, то исходная дискретизированная система предельно диссипативна при $\epsilon_k \to 0$ и оценка предельного множества приближается к соответствующей оценке для непрерывной модели.

Пусть управляемая система описывается пространственной моделью состояний в непрерывном времени

$$\dot{x} = F(x, \theta, t) + \varphi(t), \tag{6.1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояний системы, $\theta \in \mathbb{R}^m$ — вектор управлений (или вектор настраиваемых параметров), вектор-функция $F(\cdot)$ определена для всех $x \in \mathbb{R}^n$, $\theta \in \mathbb{R}^m$, $t \geqslant 0$, кусочно-непрерывна относительно t и непрерывно дифференцируема относительно x и θ, $\varphi(t)$ — ограниченная вектор-функция возмущений.

Пусть вектор управлений $\theta(t)$ обновляется в моменты времени $t_k = k\epsilon_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, $\epsilon_k > 0$, следующим образом:

$$\theta(t) = \begin{cases} \theta(t_k), & t_k \leqslant t < t_{k+1}, \\ \theta_k + \epsilon_k \Phi(x_k, \theta_k, t_k), & t = t_{k+1}, \end{cases} \tag{6.2}$$

где $x_k = x(t_k)$ и $\theta_k = \theta(t_k)$. Предполагается, что функция $\Phi(\cdot)$ удовлетворяет тем же условиям регулярности, что и $F(\cdot)$. Поскольку интерес заключается в анализе устойчивости или диссипативности (ограниченности решений) системы (6.1), (6.2) для небольших $\epsilon_k > 0$, естественно выбрать в качестве упрощенной модели систему, в которой время непрерывно, а возмущения отброшены:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F(x, \theta, t), \\ \dot{\theta} &= \Phi(x, \theta, t). \end{aligned} \tag{6.3}$$

Возникает вопрос: можно ли судить об устойчивости или аналогичных свойствах системы (6.1), (6.2) по наличию соответствующих свойств у ее упрощенной модели (6.3). Ответ дается следующей теоремой [14] (см. также [16, теорема 3.13]), для формулировки которой введем понятия экспоненциальной диссипативности и предельной диссипативности для $\epsilon_k \to 0$.

Под *экспоненциальной диссипативностью* системы $\dot{z} = F(z,t)$, $z \in \mathbb{R}^n$, будем понимать существование гладкой функции $V(z)$, вектора $z_* \in \mathbb{R}^n$ и таких чисел $\zeta > 0$, $\beta_i > 0$, $i \in 1,2,3,4$, что

$$V(z,t) \leqslant -\zeta V(z,t) + \beta_1, \quad \|\nabla^2 V(z,t)\| \leqslant \beta_2, \\ \beta_3\|z - z_*\| \leqslant \|\nabla_z V(z,t)\| \leqslant \beta_4\|z - z_*\|. \tag{6.4}$$

Легко видеть, что при выполнении условия (6.4) все траектории системы для некоторых K_1 и K_2 удовлетворяют неравенству $\|z(t)\| \leqslant K_1 e^{-\zeta t} + K_2$, т.е. стремятся к некоторому ограниченному множеству в пространстве состояний системы.

Пусть $\epsilon = \sup_{k\geqslant 0} \epsilon_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} \epsilon_k = \infty$. Систему (6.1), (6.2) будем называть *предельно диссипативной при* $\epsilon \to 0$, если в фазовом пространстве системы X существуют семейство множеств $D_0(\epsilon)$ со свойством $\cup_{\epsilon>0} D_0(\epsilon) = X$, ограниченное множество D_∞ и число $\epsilon_* > 0$ такие, что при $0 < \epsilon \leqslant \epsilon_*$ все траектории, выходящие из множества $D_0(\epsilon)$, стремятся к множеству D_∞ при $t \to \infty$.

Теорема 5. *Пусть $F(x,\theta,t)$ удовлетворяет условию Липшица по x равномерно по x и θ в любом ограниченном множестве, а модель* (6.3) *экспоненциально диссипативна.*

Тогда исходная система (6.1), (6.2) *предельно диссипативна при* $\epsilon \to 0$.

Преимущество теоремы 5 по сравнению с известными результатами (см. ссылки в [39]) заключается в том, что для правых частей модели системы не требуется выполнение глобального условия Липшица.

В частном случае, когда предельное множество состоит из одной точки, В. Драган и А. Халанай получили в 1990 г. более тонкий результат: условия сохранения экспоненциальной устойчивости при дискретизации [40]. Рассмотрим непрерывную управляемую систему $\dot{x} = f(x,u)$, $y = s(x)$, где $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^l$, с динамическим регулятором $\dot{w} = g(w,y)$, $u = U(w,y)$, где $w \in \mathbb{R}^p$, $p > 0$, замкнутая система управления будет описываться дифференциальными уравнениями

$$\dot{x} = f(x, U(w, s(x))), \qquad \dot{w} = g(w, s(x)). \tag{6.5}$$

Рассмотрим также систему из непрерывного объекта, замкнутого дискретным регулятором

$$\dot{x} = f(x(t), u(t)), \;\; u(t) = u_k, \;\; w(t) = w_k, \;\; t_k \leqslant t < t_{k+1} \tag{6.6}$$

$$u_k = U(w_k, s(x(t_k))), \;\; w_{k+1} = w_k + hg(w_k, s(x(t_k))), \tag{6.7}$$

где $t_k = kh, \; h > 0, j = 0,1,2,\ldots$

Т е о р е м а 6 [40]. *Пусть функции f, g, s, U — локально-липшицевы и $(\bar{x}, \bar{w})$ — равновесие системы* (6.5), *т.е.* $f(\bar{x}, U(\bar{w}, s(\bar{x}))) = 0$, $g(\bar{w}, s(\bar{x})) = 0$. *Пусть существует область $\mathcal{D}$, содержащая точку $(\bar{x}, \bar{w})$, и константы $\alpha > 0$, $\beta \geqslant 1$ такие, что если $(x(0), w(0)) \in \mathcal{D}$, то решение $(x(t), w(t))$ системы* (6.5) *удовлетворяет при $t \geqslant 0$ неравенству*

$$||x(t) - \bar{x}|| + ||w(t) - \bar{w}|| \leqslant \beta e^{-\alpha t}(||x(0) - \bar{x}|| + ||w(0) - \bar{w}||). \tag{6.8}$$

Пусть $\mathcal{B}_r = \{(x, w) : ||x - \bar{x}|| + ||w - \bar{w}|| \leqslant r\}$ и $r > 0$ такое, что $\mathcal{B}_r \subset \mathcal{D}$. Пусть $L > 0$ — константа Липшица для всех функций f, g, s, U на компакте $\mathcal{B}_r$.

Тогда существует $h > 0$, зависящее от α, β, L и $\tilde{\alpha} > 0$, $\tilde{\beta} \geqslant 1$, такое, что $(\tilde{x}(t), \tilde{w}(t))$, $t \geqslant 0$, есть решение системы (6.6), (6.7), *и если $(\tilde{x}(0), \tilde{w}(0)) \in \mathcal{B}_{r/2\beta}$, то*

$$||\tilde{x}(t) - \bar{x}|| + ||\tilde{w}(t) - \bar{w}|| \leqslant \tilde{\beta} e^{-\tilde{\alpha} t}(||\tilde{x}(0) - \bar{x}|| + ||\tilde{w}(0) - \bar{w}||). \tag{6.9}$$

7. Сходимость градиентных алгоритмов с зависимыми входами

Метод усреднения может быть эффективно применен к анализу дифференциально-разностных стохастических систем (6.1), (6.2). Сформулируем соответствующий результат для практически важного случая, когда уравнение (6.2) описывается алгоритмом градиентного типа, т.е. имеет вид

$$\theta_{k+1} = \theta_k + \alpha_k \nabla_\theta Q(\theta_k, f_k), \tag{7.1}$$

где $Q(\cdot)$ — целевая функция, характеризующая достижение цели адаптации.

Важным условием стандартных теорем о сходимости градиентных алгоритмов [19] является независимость входных воздействий f_k. Это условие затрудняет использование стандартных теорем в задачах управления для динамических систем, поскольку в системе (6.1), (6.2) векторы f_k стохастически зависимы. Применение метода непрерывных моделей позволяет установить сходимость градиентных алгоритмов для случая зависимых воздействий. Однако полностью отказаться от условия независимости невозможно и снова потребуем, чтобы последовательность входов f_k удовлетворяла *условию сильного перемешивания* (см. определение 1 в разделе 3).

Напомним, что широкий класс случайных процессов, удовлетворяющих условию сильного перемешивания образуют марковские процессы, порожденные устойчивыми стохастическими дифференциальными и разностными уравнениями [30, 41]. В частности, это свойство имеет процесс $f_k \in \mathbb{R}^n$, порожденный линейным уравнением (2.5), причем коэффициент перемешивания процесса (2.5) экспоненциально убывает: $\zeta_r \leqslant c\rho^r$, где $c > 0$ и $0 < \rho < 1$.

Т е о р е м а 7. *Пусть выполнены следующие условия:*

1. *Для каждого θ существует $\lim_{k\to\infty} \mathrm{E}Q(\theta, f_k) = J(\theta)$, где функция $J(\theta)$ непрерывно дифференцируема, $J(\theta) \to +\infty$ для $\|\theta\| \to \infty$ и множество $\Omega_0 = \{\theta : \nabla J(\theta) = 0\}$ ограничено;*

2. *Существуют числа $L > 0$, $\kappa > 0$ и область D такие, что $\|\nabla_\theta Q(\theta, f)\| \leqslant \kappa$,*

$$\|\nabla_\theta Q(\theta, f) - \nabla_\theta Q(\theta', f')\| \leqslant L\|\theta - \theta'\| \tag{7.2}$$

для каждого $f \in D$ и $f' \in D$ с вероятностью единица;

3. *Шаги α_k алгоритма (7.1) при некотором $p \geqslant 2$ удовлетворяют условиям:*

$$\alpha_{k+1} \leqslant \alpha_k, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k = +\infty, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k^p < \infty; \tag{7.3}$$

4. *Случайный процесс f_k удовлетворяет условию сильного перемешивания с коэффициентом перемешивания ζ_k и*

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^{p-1} \zeta_k^{1/2} < \infty; \tag{7.4}$$

5. *Почти каждая траектория θ_k содержит ограниченную подпоследовательность θ_{k_s}, $s = 1, 2, \ldots$*

Тогда $\theta_k \to \Omega_0$ почти наверное при $k \to \infty$.

Кроме того, можно показать, что если все точки из Ω_0 изолированы, тогда $\theta_k \to \theta_*$ почти наверное, где θ_* — один из локальных минимумов функции $J(\theta)$.

Заключение теоремы 7 следует из более общего результата из [16], в котором устанавливаются условия, при которых устойчивость исходного стохастического дифференциально-разностного уравнения (6.1), (6.2) следует из устойчивости его непрерывной модели, которая имеет вид $\dot{\theta} = -\nabla J(\theta)$ для алгоритма (7.1). В свою очередь, для доказательства устойчивости модели используется функция Ляпунова $V(\theta) = J(\theta)$.

8. Дальнейшие результаты

Перечислим кратко некоторые обобщения результатов из разделов 3 и 4, позволяющие расширить сферу применимости метода непрерывных моделей. Прежде всего заметим, что теоремы 1—4 легко распространяются на случай, когда исходная система описывается вместо (2.1) уравнением более общего вида

$$z_{k+1} = \Phi(z_k, f_k, \alpha_k), \tag{8.1}$$

в котором[8] $\mathrm{E}\Phi(z, f_k, \alpha) = z + \alpha A(z) + \alpha^2 a(z, \alpha)$. Например, утверждение теоремы 1 для системы (8.1) останется верным [42], если будут выполнены условия (3.1), (3.2) и неравенство $\|a(z, \alpha)\| \leqslant L_3(1 + \|z\|)$. Отметим, что для системы (8.1) правую часть модели (2.3) можно определить соотношением $A(z) = \lim_{\alpha \to 0} \alpha^{-1} [\mathrm{E}\Phi(z, f_k, \alpha) - z]$.

В ряде задач (в частности, в задачах управления динамическими объектами) встречаются системы вида (2.1) или (8.1), для которых правая часть модели (2.3) не удовлетворяет глобальному условию Липшица (3.1). Примером

[8] Для краткости записи будем рассматривать только стационарные последовательности f_k.

такой системы может служить непрерывно-дискретная система (2.8), (2.9) (ее уравнения можно привести к дискретной форме (8.1)). Правые части $A(z)$ непрерывной модели (2.10) содержат слагаемые вида $\theta^{\mathrm{T}}x$ и, независимо от вида алгоритма адаптации, имеют квадратичный порядок роста при $\|z\| \to \infty$, поскольку $z = \mathrm{col}(x, \theta)$. Условие Липшица (3.1) для модели (2.10) выполняется лишь локально, т.е. в каждой ограниченной области $\|z\| < r$ константа L_1 в (3.1) своя: $L_1 = L_1(r)$. Как известно, решения дифференциальных и разностных уравнений с быстро (сверхлинейно) растущими правыми частями могут неограниченно расти за конечное время. Чтобы исключить эту возможность, при формулировке утверждений, обосновывающих метод непрерывных моделей для локально-липшицевых систем, приходится накладывать дополнительные требования. Однако даже при выполнении этих требований оказывается, что степень малости шагов α_k, при которой обоснована замена исходной системы моделью, может зависеть от величины начальных условий $\|z_0\|$. Это значит, что близость траекторий (2.1) и (2.3) имеет место при $\alpha_k \leqslant \alpha < \overline{\alpha}(\|z_0\|)$, где $\overline{\alpha}(r)$ — убывающая скалярная функция, причем $\overline{\alpha}(r) \to 0$ при $r \to \infty$. Кроме того, при исследовании асимптотических свойств исходной системы приходится говорить не о диссипативности (2.1), а о ее предельной диссипативности при $\alpha_k \to 0$.

В [14] показано, что система (2.1) предельно-диссипативна при $\alpha_k \to 0$, а в случае независимых f_k и локально-липшицевых $A(z)$ выполняется неравенство (3.3) при $\alpha_k \leqslant \alpha < \overline{\alpha}(\|z_0\|)$, если возмущения в (2.1) ограничены (точнее, если $\|F(z, f_k) - A(z)\| \leqslant C$) и модель (2.3) экспоненциально диссипативна (точнее, если существует функция $V(z) \geqslant 0$, удовлетворяющая (3.10) и неравенству $\dot{V}(z) \leqslant -\kappa_1 V(z) + \kappa_0$). Аналогичные результаты справедливы для систем вида (8.1) и для слабо зависимых f_k.

В [43, 44] рассмотрены непрерывно-дискретные системы вида

$$dx(t) = A_1(x(t), \theta(t_k))dt + \sigma D(x(t), \theta(t_k))dW(t), \tag{8.2}$$

$$\theta(t) = \begin{cases} \theta(t_k) & \text{при} \quad t_k \leqslant t < t_{k+1}, \\ \theta(t_k) + hF(x(t_k), \theta(k), \eta_k) & \text{при} \quad t = t_{k+1}, \end{cases} \tag{8.3}$$

где $W(t)$ — винеровский процесс, η_k — независимы, $t_k = kh$, $h > 0$, функция $D(x, \theta)$ ограничена, а функции $A_1(x, \theta)$ и $A_2(x, \theta) = \mathrm{E}F(x, \theta, \eta_k)$ глобально липшицевы. Стохастическое дифференциальное уравнение (8.2) понимается в смысле Ито на каждом интервале $[t_k, t_{k+1}]$. Показано, что при $\sigma^2 \leqslant L_4 h$ решение $z(t) = \mathrm{col}(x(t), \theta(t))$ системы (8.2), (8.3) удовлетворяет неравенству

$$\mathrm{E}\|z(t) - \hat{z}(t)\|^2 \leqslant C_6 e^{C_7 T} h,$$

где $\hat{z}(t) = \mathrm{col}(\hat{x}(t), \hat{\theta}(t))$ — решение уравнений модели

$$\begin{cases} d\hat{x}/dt = A_1(\hat{x}, \hat{\theta}), \\ d\hat{\theta}/dt = A_2(\hat{x}, \hat{\theta}) \end{cases}$$

при $\hat{z}(0) = z(0)$. В [43] для систем (8.2), (8.3) построена также стохастическая непрерывная модель вида (5.1), (5.6).

Наконец, основные результаты разделов 3–5 сохраняют силу для случая нестационарной модели (2.3) (см. [45]) и для случая, когда модель (2.3) имеет устойчивое многообразие состояний равновесия, на котором правая часть $A(z)$ терпит разрыв [46].

9. Непрерывные модели для сетевых систем

Рассмотрим усредненные и непрерывные модели для сетевых систем. В последние два десятилетия в теории управления растет интерес к новым классам задач, характерных для сетевых систем управления: управление синхронизацией, консенсусом, групповым поведением агентов и т.д. Одной из важных задач является анализ многоагентных стохастических систем с нелинейной динамикой, неопределенностями в топологии и (или) в протоколе управления, с шумами и задержками о состояниях агентов сети. В таких сетевых системах целесообразно рассматривать задачу приближенного консенсуса. В [47] эта задача была детально изучена. Такие задачи актуальны при анализе и управлении производственными сетями, многопроцессорными, сенсорными, беспроводными или компьютерными сетями и другими системами, состоящими из большого числа агентов. Для изучения таких стохастических систем также используется метод усредненных моделей. Этот метод был адаптирован для анализа различных типов информационных систем (см. например, [48–50]) и позволил уменьшить сложность анализа замкнутых стохастических систем. В [47, 51, 52] верхние оценки среднеквадратичного расстояния между состояниями исходной стохастической системы и ее приближенной усредненной модели были получены для разных случаев (например, случая с задержками в измерениях или без них). Эти верхние границы были использованы для получения условий достижения приближенного консенсуса.

Сформулируем некоторые результаты по методу усредненных моделей для сетевых систем.

Рассмотрим сеть как множество агентов $N = \{1, 2, \ldots, n\}$, которые взаимодействуют с соседями из множества соседей $N^i = \{j : (j, i) \in E\}$. Динамическая топология сети моделируется последовательностью орграфов $\{(N, E_t)\}_{t \geqslant 0}$, где $E_t \subset E$ меняется со временем. Соответствующие матрицы смежности обозначаются A_t.

Предположим, что изменяющаяся во времени переменная состояния $x_t^i \in \mathbb{R}$ соответствует каждому агенту графа $i \in N$ в момент времени $t \in [0, T]$. Его динамика описывается для дискретного временнóго случая как

$$x_{t+1}^i = x_t^i + f^i(x_t^i, u_t^i), \quad t = 0, 1, 2, \ldots, T. \tag{9.1}$$

Чтобы сформировать стратегию управления, каждый агент использует свое собственное состояние (возможно, зашумленное)

$$y_t^{i,i} = x_t^i + w_t^{i,i}, \tag{9.2}$$

и если $N_t^i \neq \emptyset$, то и зашумленные измерения о состояниях соседей, которые, кроме того, приходят с задержками

$$y_t^{i,j} = x^j_{t-d_t^{i,j}} + w_t^{i,j}, \quad j \in N_t^i, \tag{9.3}$$

где $w_t^{i,i}, w_t^{i,j}$ — шум, $0 \leqslant d_t^{i,j} \leqslant \bar{d}$ — целочисленная задержка и $\bar{d} \geqslant 0$ — максимальная задержка.

В [47] рассматривался следующий протокол управления, называемый *протоколом локального голосования*:

$$u_t^i = \alpha_t \sum_{j \in \overline{N}_t^i} b_t^{i,j}(y_t^{i,j} - y_t^{i,i}), \tag{9.4}$$

где $\alpha_t > 0$ — размер шага протокола, $b_t^{i,j} > 0 \ \ \forall j \in \bar{N}_t^i$. Положим $b_t^{i,j} = 0$ для других пар i, j и определим $B_t = [b_t^{i,j}]$ как матрицу протокола управления.

Для начала рассмотрим случай без задержек в измерениях ($\bar{d} = 0$) [53, 54].

Перепишем динамику агентов в векторно-матричном виде:

$$\bar{x}_{t+1} = \bar{x}_t + F(\alpha_t, \bar{x}_t, \bar{w}_t), \tag{9.5}$$

где $F(\alpha_t, \bar{x}_t, \bar{w}_t)$ — вектор размерности n:

$$F(\alpha_t, \bar{x}_t, \bar{w}_t) = \begin{pmatrix} \cdots \\ f^i\left(x_t^i, \alpha_t \sum_{j \in \bar{N}_t^i} b_t^{i,j}\left((x_t^j - x_t^i) + (w_t^{i,j} - w_t^{i,i})\right)\right) \\ \cdots \end{pmatrix}. \tag{9.6}$$

Для анализа поведения стохастической системы при конкретном выборе коэффициентов (параметров) в протоколе используется *метод усредненных моделей* в форме [13], который применялся и в [47, 53–55]. Одной из особенностей применения метода для сетевых систем является то, что условие асимптотической устойчивости непрерывной модели (2.3) в сетевых системах не выполняется, уступая место частичной устойчивости. Для исследования подобных случаев может быть использована следующая теорема [17], которой предпошлем определение.

Определение 2. Пусть Ω, Ω_0, $\Omega \subseteq \Omega_0$, — замкнутые подмножества $\mathbb{R}^n$ и Ω состоит из равновесий системы (2.3)*. Множество Ω называется Ω_0-точечно устойчивым, если оно устойчиво по Ляпунову и любое решение, начинающееся в Ω_0, стремится к точке из Ω при $t \to \infty$.*

Теорема 8. Пусть выполнены условия Липшица и роста

$$\|A(z) - A(z')\| \leqslant L_1\|z - z'\|, \ \ b(z) \leqslant L_2(1 + \|z\|^2), \tag{9.7}$$

где $b(z) = \mathrm{E}\|F(z, f_k) - A(z)\|^2$. Пусть существует гладкое отображение $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$ и ограниченное множество $\Omega_0 \subseteq \mathbb{R}^n$, такое что $\operatorname{rank} \frac{\partial h}{\partial z} = l$ для $z \in \Omega = \{z \in \Omega_0 : h(z) = 0\}$ и множество Ω — Ω_0-точечно устойчиво. Пусть существует дважды непрерывно дифференцируемая функция $V(z)$ и положительные числа $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3$ такие, что

$$\dot{V}(z) \leqslant -\varkappa_1 V(z), \tag{9.8}$$

$$\left|\frac{\partial^2 V(z)}{\partial z^{(i)} \partial z^{(j)}}\right| \leqslant \varkappa_3, \quad V(z) \geqslant \varkappa_2 ||h(z)||^2. \tag{9.9}$$

Тогда существуют числа $\bar{\alpha} > 0$, $K_2 > 0$, $0 < \zeta < 1$ такие, что для $0 \leqslant \alpha_k \leqslant \alpha < \bar{\alpha}$ выполнены неравенства

$$\mathrm{E}||y_k - y(t_k)||^2 \leqslant K_2\alpha^\zeta, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{9.10}$$

где $y_k = h(z_k)$, $y(t_k) = h(z(t_k))$.

Теорема 8 дает верхнюю границу среднего квадрата расстояния между текущим состоянием и предельным многообразием $\Omega = \{z \in \Omega_0 : h(z) = 0\}$.

В рассматриваемом случае применение метода усредненных моделей состоит в приближенной замене начального стохастического разностного уравнения (9.5) на обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d\bar{x}}{d\tau} = R(\alpha, \bar{x}), \tag{9.11}$$

где

$$R(\alpha, \bar{x}) = R\left(\alpha, \begin{matrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{matrix}\right) = \left(\begin{matrix} \cdots \\ \frac{1}{\alpha} f^i(x^i, \zeta s^i(\bar{x})) \\ \cdots \end{matrix}\right), \tag{9.12}$$

$$s^i(\bar{x}) = \sum_{j \in N^i_{\max}} a^{i,j}_{\max}(x^j - x^i) = -d^i(A_{\max})x^i + \sum_{j=1}^n a^{i,j}_{\max} x^j, \ i \in N,$$

где $A_{\max}$ — матрица смежности размеров $\bar{n} \times \bar{n}$, $\bar{n} = n \times (\bar{d} + 1)$.

В соответствии с [13] траектории $\{\bar{x}_t\}$ из (9.5)–(9.6) и $\{\bar{x}(\tau_t)\}$ из (9.11)–(9.12) близки на конечном интервале времени. Здесь и далее $\tau_t = \alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_{t-1}$.

Предположим, что выполнены следующие условия:

B1. $\forall i \in N$ функции $f^i(x, u)$ липшицевы по x и u: $|f^i(x, u) - f^i(x', u')| \leqslant L_1(L_x|x - x'| + |u - u'|)$, и для любого фиксированного x функция $f^i(x, \cdot)$ такая, что $\mathrm{E}_x f^i(x, u) = f^i(x, \mathrm{E}_x\, u)$. Последняя часть условия **B1** выполнена, если система почти аффинная по управлению.

Из условия Липшица следует, что скорость роста ограничена: $|f^i(x, u)|^2 \leqslant L_2(L_c + L_x|x|^2 + |u|^2)$;

B2. **а)** $\forall i \in N$ и $j \in N^i_{\max}$ шумы $w^{i,j}_t$ центрированы, независимы и имеют ограниченную дисперсию $\mathrm{E}(w^{i,j}_t)^2 \leqslant \sigma^2_w$;

б) $\forall i \in N$ и $j \in N^i_{\max}$ появление переменных дуг (j, i) в графе $\mathcal{G}_{A_t}$ — независимые случайные события;

в) $\forall i \in N$ и $j \in N^i_{\max}$ веса́ $b^{i,j}_t$ в протоколе (9.4) — независимые случайные переменные с $b^{i,j} = \mathrm{E}b^{i,j}_t$, $\sigma^{i,j}_b = E(b^{i,j}_t - b^{i,j})^2 < \infty$.

В следующей теореме даны верхние оценки среднеквадратичного отклонения между исходной системой и ее усредненной непрерывной моделью.

Теорема 9. *Если выполнены условия* **B1**, **B2 пп. а–в**, *$\forall i \in N$ функция $f^i(x, u)$ гладкая по u, $f^i(x, 0) = 0$ для любого x и $0 < \zeta_t \leqslant \bar{\zeta}$, то существует $\tilde{\alpha}$, такая что для $\bar{\alpha} < \tilde{\alpha}$ имеет место следующее неравенство:*

$$\mathrm{E} \max_{0 \leqslant \tau_t \leqslant \tau_{\max}} ||\bar{x}_t - \bar{x}(\tau_t)||^2 \leqslant C_1 e^{C_2 \tau_{\max}} \bar{\alpha}, \tag{9.13}$$

где $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ и $\bar{\alpha} > 0$ — некоторые константы.

В [47, 51] рассматривается также случай с задержками в измерениях, для которого установлены верхние оценки среднеквадратичного расстояния между исходной системой и ее усредненной дискретной моделью. Отметим, что открытой остается задача распространения приведенных результатов на разрывные модели, важные для экономических игр и распознавания образов (некоторые частные случаи рассматриваются в [46, 56]).

10. Применения непрерывных моделей

Непрерывные модели использовались для анализа алгоритмов идентификации [13, 16, 21, 36, 57–65], алгоритмов оптимизации [16, 21, 66–68], алгоритмов случайного поиска [37, 42], фильтрации [57, 58, 69–71], адаптивного управления [14, 16, 40, 43, 44, 63, 72–80], поиска собственных чисел случайных матриц [81, 82]; поиска седловых точек а игровых задачах [22, 83]; алгоритмов децентрализованного распределения ресурсов [84], игр автоматов [22], систем массового обслуживания [85], распознавания образов [13, 15, 46, 63]; обучения нейронных сетей [86] и др. Ряд последних публикаций открывают новые области, связанные с сетями: анализ сходимости алгоритмов обучения для управления покрытием мобильных датчиков в сенсорной сети [87], распределенное обучение и кооперативное управление в мультиагентных системах [88, 89], распределенное управление топологией в беспроводных сетях [90] и др.

Еще один класс задач связан с рандомизацией систем. Например, в адаптивном управлении, при "подстройке" под минимизацию некоторой функции потерь $f(x)$ появляется дополнительная возможность компенсации систематических помех наблюдений (а не только "хороших статистических") за счет рандомизации в канале обратной связи [91–93]. В рандомизированых вариантах метода стохастической аппроксимации на вход алгоритма подают текущую оценку $\hat{\theta}_{n-1}$ вместе с некоторым центрированным независимым рандомизированным возмущением Δ_n, а в качестве наблюдений берут $\bar{Y}_n = \Delta_n G(w_n, \hat{\theta}_{n-1} + \Delta_n)$. В [94] для анализа состоятельности таких оценок и их асимптотических свойств также используется описанный подход.

11. Примеры

Приведем примеры, иллюстрирующие применение непрерывных моделей.

Пример 1. Рассмотрим задачу идентификации линейного динамического объекта, описываемого уравнением

$$y_{k+1} + \sum_{i=1}^{n} a_i y_{k+1-i} = \sum_{i=1}^{n} b_i u_{k+1-i} + v_{k-i}, \tag{11.1}$$

где u_k, y_k — вход и выход объекта, доступные измерению в момент k, v_{k+1} — неизмеряемое возмущение. Все величины в (11.1) скалярны. Последовательности u_k, v_k, $k = 0, 1, \dots,$ будем считать случайными и стационарными. Кроме того, предположим, что объект (11.1) устойчив, т.е. все нули многочлена

$a(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n$ по модулю больше единицы. Пусть для построения оценок $\widehat{a}_{i,k}, \widehat{b}_{i,k}$ параметров объекта a_i, b_i выбран алгоритм градиентного типа [95]:

$$
\begin{aligned}
\widehat{a}_{i,k+1} &= \widehat{a}_{i,k} - \alpha_k \delta_{k+1} y_{k+1-i}, \quad i = 1, \ldots n,\\
\widehat{b}_{i,k+1} &= \widehat{b}_{i,k} - \alpha_k \delta_{k+1} u_{k+1-i}, \quad i = 1, \ldots n,\\
\delta_{k+1} &= y_{k+1} + \sum_i^n \widehat{a}_{i,k} y_{k+1-i} - \sum_i^n \widehat{b}_{i,k} u_{k+1-i},
\end{aligned}
\tag{11.2}
$$

где $\alpha_k \geqslant 0, \;\; k = 0, 1, \ldots$ Для исследования системы (11.1), (11.2) построим ее детерминированную непрерывную модель. Если ввести обозначения:

$$
\begin{gathered}
z_k = col(\widehat{a}_{1,k}, \ldots, \widehat{a}_{n,k}, -\widehat{b}_{1,k}, \ldots, -\widehat{b}_{n,k}),\\
z_* = col(a_1, \ldots, a_n, -b_1, \ldots, b_n),\\
g_k = col(y_k, \ldots, y_{k+1-n}, u_k, \ldots, u_{k+1-n}),
\end{gathered}
$$

то алгоритм (11.2) можно записать в виде

$$
z_{k+1} = z_k + \alpha_k \left[(z_k - z_*)^{\mathrm{T}} g_k + v_{k+1} \right] g_k. \tag{11.3}
$$

Усредняя правую часть (11.3) при фиксированном $z_k = z$, получаем детерминированную модель (2.3) в виде линейного дифференциального уравнения

$$
dz/dt = -P(z - z_*) + q, \tag{11.4}
$$

где $P = \lim_{k\to\infty} g_k g_k^{\mathrm{T}}$, $q = \lim_{k\to\infty} v_{k+1} g_k$. Существование написанных пределов обеспечивается устойчивостью объекта (11.1). Очевидно, что любое решение (11.4) будет стремиться к z_* при $t \to \infty$, если

$$
P > 0, q = 0. \tag{11.5}
$$

Далее будем считать, что $\mathrm{E}v_k = 0$, $\mathrm{E}v_k^2 > 0$, $\mathrm{E}v_k^8 < \infty$, $\mathrm{E}u_k^8 < \infty$ и последовательности u_k, v_k состоят из независимых величин и взаимно независимы. При этом соотношения (11.5) будут выполнены, а векторы $f_k = col(g_k, v_{k+1})$ будут удовлетворять условиям теоремы 2 (в силу устойчивости объекта (11.1)). Из теоремы 2 следует, что при малых α_k векторы z_k будут близки в среднеквадратическом равномерно на любом конечном промежутке $[0, t_N]$ к векторам $z(t_k) = z_* + e^{-p\sum_{i=0}^{k-1}\alpha_i}(z_0 - z_*)$. Отсюда можно получать различные приближенные оценки скорости сходимости алгоритма (11.2), причем точность этих оценок тем выше, чем меньше "шаги" α_k.

Пусть теперь $\alpha_k \to 0$ так, что выполнены условия (4.1), (4.2), а векторы u_k, v_k — почти наверное ограничены. Тогда выполнены условия теоремы 4, из которой следует, что $z_k \to z_*$ почти наверное, т.е. оценки z_k являются сильно состоятельными.

Пример 2. Рассмотрим задачу адаптивного управления непрерывным объектом с передаточной функцией $W(p) = \kappa/(\tau p + 1)$, описываемым уравнением

$$\tau\dot{y} + y = \kappa u. \tag{11.6}$$

Управляющее воздействие $u(t)$ вырабатывается дискретным регулятором и считается кусочно-постоянным: $u(t) = u_k$ при $kh \leqslant t < (k+1)h$, где $h > 0$ — шаг дискретности. Чтобы обеспечить высокое качество управления, величину h стараются выбирать, по возможности, малой. При этом поведение объекта с достаточной точность может быть описано разностным уравнением

$$y_{k+1} = (1 - h/\tau)y_k + (\kappa h/\tau)u_k, \tag{11.7}$$

где $y_k = (kh)$. Пусть целью управления является приближение выхода объекта y_{k+1} к задающему воздействию $r_k = r(kh)$, где $r(t)$ — некоторая ограниченная кусочно-непрерывная функция. Легко видеть, что поставленная цель достигается за один шаг, если закон управления выбран в виде

$$u_k^* = \frac{h-\tau}{\kappa h} y_k + \frac{\tau}{\kappa h} r_k. \tag{11.8}$$

Однако закон (11.8) при уменьшении h приводит, очевидно, к неограниченным значениям управляющего воздействия, что является неприемлемым для практики. Причина неудачи заключается в выборе слишком “сильного” целевого условия, не учитывающего инерционность реального непрерывного объекта (11.6).

Поставим более “мягкую” цель управления

$$y_{k+1} = g_0 y_k + g_1 r_k, \tag{11.9}$$

причем коэффициенты g_0, g_1 выберем так, чтобы уравнение (11.9) являлось результатом дискретизации уравнения непрерывной эталонной модели

$$\tau_* \dot{y} + y = r(t). \tag{11.10}$$

Это требование приводит к зависимости коэффициентов g_0, g_1 от шага дискретности h, выражаемой при малом h соотношением

$$g_0 = 1 - h/\tau_*, \quad g_1 = h/\tau_*. \tag{11.11}$$

“Идеальный” закон управления, обеспечивающий достижение цели (11.9), имеет вид

$$u_k^* = \frac{\tau_* - \tau}{\kappa \tau_*} y_k + \frac{\tau}{\kappa \tau_*} r_k \tag{11.12}$$

и уже не зависит от h. Для синтеза адаптивного регулятора воспользуемся прямым подходом [96]. Заменяя неизвестные коэффициенты в (11.12) настраиваемыми коэффициентами θ_1, θ_2, выберем реальный закон управления

$$u_k = \theta_{1k} y_k + \theta_{2k} r_k. \tag{11.13}$$

Если ввести обозначения $\theta_k = col(\theta_{1k}, \theta_{2k})$, $z_k = col(y_k, r_k)$, то закон (11.13) можно записать в виде

$$u_k = \theta_k^{\mathrm{T}} z_k. \tag{11.14}$$

Для настройки вектора θ_k выберем алгоритм градиентного типа [96]

$$\theta_{k+1} = \theta_k - \alpha_k \delta_{k+1} z_k, \tag{11.15}$$

где $\delta_{k+1} = (y_{k+1} - g_0 y_k - g_1 r_k)$ — текущая невязка в цели управления (11.9). Из (11.11) следует, что при малых h $\delta_{k+1} = y_{k+1} - y_k + h(y_k(\tau_* - r_k/\tau_*)) \approx$ $\approx (\tau_* \dot{y} + y - r(t))h/\tau_*$. Теперь можно перейти к непрерывному времени и построить аналогично (2.10) непрерывную модель системы (11.7), (11.14), (11.15). Считая для простоты $\alpha_k = \alpha h$, запишем уравнения непрерывной детерминированной модели в виде:

$$\begin{gathered} \tau \dot{y} + y = \kappa u, \;\; u = \theta_1 y + \theta_2 r, \\ d\theta_1/dt = -\alpha(\tau_* \dot{y} + y - r(t))y/\tau_*, \\ d\theta_2/dt = -\alpha(\tau_* \dot{y} + y - r(t))r(t)/\tau_*. \end{gathered} \tag{11.16}$$

Уравнения (11.16) описывают непрерывную адаптивную систему, алгоритм адаптации в которой совпадает а алгоритмом [97]. Можно показать [97], что в системе (11.16) достигается цель управления $\lim_{t\to\infty} |y(t) - r(t)| = 0$.

Заметим, что модель (11.16) находится на границе устойчивости и чтобы иметь возможность судить по ее свойствам о свойствах исходной системы (11.7), (11.14), (11.15), необходимо регуляризовать (огрубить) алгоритм адаптации, например введением отрицательной обратной связи [98]. После регуляризации система (11.16) становится экспоненциально диссипативной. Отсюда следует (см. раздел 6), что исходная система (11.7), (11.14), (11.15) будет предельно-диссипативной при $h \to 0$, а ее траектории будут при малом h близки к траекториям (11.16). Аналогичное утверждение справедливо и в случае действия на объект ограниченных слабозависимых возмущений с малой дисперсией [16, 44].

Недостатком системы (11.16) является необходимость измерения старшей производной выхода объекта. При высоком порядке объекта аналогичные рассуждения приводят к выводу о практической нереализуемости адаптивного регулятора (11.16). Этот вывод остается в силе и для исходного адаптивного регулятора (11.14), (11.15) при малом шаге дискретности h.

Рассмотренный пример показывает, что использование идей метода непрерывных моделей позволяет не только дать рекомендации по синтезу адаптивного регулятора и упростить анализ его динамики, но и выявить некоторые особенности исходной системы, остающиеся в тени при рассмотрении ее как чисто дискретной.

12. Заключение

Рассмотренный выше метод усредненных (непрерывных и дискретных) моделей может применяться как для анализа, так и для синтеза дискретных стохастический систем. Естественной областью его приложений являются системы, для которых характерно разделение движений на быстрые и медленные составляющие. При решении задач анализа метод усредненных моделей позволяет упростить исходную систему как при аналитическом, так и при численном ее исследовании. В задаче синтеза дискретной системы с заданными свойствами метод непрерывных моделей позволяет воспользоваться богатым арсеналом средств синтеза непрерывных систем. В обоих случаях получаемые решения являются приближенными, но их точность растет по мере уменьшения шага дискретизации. Может показаться, что поскольку мощность вычислительных устройств стремительно растет, актуальность развития упрощенных методов исследования систем падает. Однако сложность задач, стоящих перед исследователями и инженерами, зачастую растет опережающими темпами. По мнению авторов статьи, с учетом повсеместного распространения сетевых систем и соответствующего роста размерности исследуемых динамических систем актуальность подходов, основанных на упрощениях, не падает, а растет.

Отметим, что метод непрерывных моделей давно применяется в инженерной практике на первых, прикидочных этапах проектирования. Полученные к настоящему времени результаты (см. разделы 3–6) позволяют обоснованно применять этот метод для анализа и синтеза сложных нелинейных стохастических дискретных систем, в частности дискретных адаптивных систем управления. Результаты, перечисленные в обзоре, охватывают широкий класс систем, встречающихся в практических задачах.

Тем не менее метод усредненных моделей остается приближенным, асимптотическим методом. Поэтому теоремы, обосновывающие его применимость в приложениях, можно понимать, по словам Л. Льюнга [15], не в их буквальном смысле, а скорее как "моральную поддержку" замены исходной системы ее детерминированной или стохастической непрерывной или дискретной упрощенной моделью.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 2. Доказательству предпошлем два вспомогательных утверждения.

Лемма П.1. Пусть $\xi_k,\ k = 1, 2, \ldots,$ — случайный процесс со значениями в $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющий условию сильного перемешивания с коэффициентом перемешивания ζ_k, причем

$$\mathrm{E}\xi_k = 0,\ \ \mathrm{E}\|\xi_k\|^{2p+\delta} \leqslant C < \infty, \tag{П.1}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{p-1}\zeta_k^{\delta/(2p+\delta)} < \infty \tag{П.2}$$

для некоторых $C > 0,\ \delta > 0$ и целого $p \geqslant 2$.

Тогда существует число $C_p > 0$, такое что для любого целого $N \geqslant 0$ и любой числовой последовательности $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ справедливо неравенство

$$\text{(П.3)} \qquad \mathrm{E}\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant N}\left\|\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\xi_i\right\|^2 \leqslant C_p\left(\sum_{k=1}^{N}\alpha_k^2\right)^p\right\}.$$

Следствие. В условиях леммы П.1 справедливо неравенство

$$\text{(П.4)} \qquad \mathrm{E}\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant N}\left\|\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\xi_i\right\|^2 \leqslant \sqrt{C_2}\sum_{k=1}^{N}\alpha_k^2\right\}.$$

Лемма П.2 (дискретный вариант леммы Гронуолла–Беллмана). *Если последовательность чисел $\mu_k \geqslant 0$, $k = 1, \ldots, N$, удовлетворяет неравенствам $\mu_k \leqslant \rho_1 + \rho_2\sum_{i=0}^{k-1}\alpha_i\mu_i$, $k = 1, \ldots, N$, где $\rho_1 \geqslant 0$, $\rho_2 \geqslant 0$, $\alpha_i \geqslant 0$, то*

$$\text{(П.5)} \qquad \mu_k \leqslant \rho_1 \exp\left(\rho_2\sum_{i=0}^{k-1}\alpha_i\right), \quad k = 1, \ldots, N.$$

Для доказательства теоремы 2 оценим сначала величину $\|z_k - \bar{z}_k\|^2$, где $\bar{z}_k$ — решение уравнения дискретной детерминированной модели (3.4) при $\bar{z}_0 = z_0$. Из (2.1), (3.4) имеем

$$\text{(П.6)} \qquad z_k - \bar{z}_k = \sum_{i=0}^{k-1}\alpha_i[F(z_i, f_i) - F(\bar{z}_i, f_i)] + \sum_{i=0}^{k-1}\alpha_i[F(\bar{z}_i, f_i) - A(\bar{z}_i)].$$

Положим $\mu_k = \max_{1\leqslant i\leqslant k}||z_i - \bar{z}_i||$. Взяв сначала в правой, а затем в левой частях (П.6) максимум по $i = 1, \ldots, k$ и пользуясь условием (3.7), получим

$$\text{(П.7)} \qquad \mu_k \leqslant L\sum_{i=0}^{k-1}\alpha_i\mu_i + \max_{0\leqslant k\leqslant N-1}\left\|\sum_{i=0}^{k-1}\alpha_i[F(\bar{z}_i, f_i) - A(\bar{z}_i)]\right\|.$$

Применяя лемму П.2, возводя обе части (П.7) в квадрат и переходя к математическим ожиданиям, получаем

$$\text{(П.8)} \qquad \mathrm{E}\mu_N^2 \leqslant e^{2Lt_N}\kappa_N,$$

где $\kappa_N = \mathrm{E}\max_{1\leqslant i\leqslant k}\left\|\sum_{i=0}^{k-1}\alpha_i[F(\bar{z}_i, f_i) - A(\bar{z}_i)]\right\|^2$. Для оценки величины κ_N заметим, что случайный процесс $\varphi_i = F(\bar{z}_i, f_i) - A(\bar{z}_i)$ удовлетворяет условию сильного перемешивания с тем же коэффициентом перемешивания, что и процесс f_i [30]. Так как при конечном t_N векторы $\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_N$ ограничены в совокупности, условия леммы П.1 выполнены для $\xi_i = \varphi_i$, $p = 2$ и $\delta = 4$. Из (П.4) получаем, что

$$\text{(П.9)} \qquad \kappa_N \leqslant \sqrt{C_2}\sum_{k=0}^{N-1}\alpha_k^2 \leqslant \sqrt{C_2}t_N\alpha.$$

Заметим теперь, что

$$\text{(П.10)} \qquad \mathrm{E}\left\{\max_{0\leqslant t_k\leqslant t_N} ||z_k - z(t_k)||^2\right\} \leqslant 2\mathrm{E}\mu_N^2 + 2\nu_N^2,$$

где $\nu_N = \max_{1\leqslant k\leqslant N} ||\bar{z}_k - z(t_k)||$. Величину ν_N можно рассматривать как погрешность решения уравнения (2.3) методом Эйлера на промежутке $[0, t_N]$. Стандартные вычисления дают для ν_N оценку

$$\text{(П.11)} \qquad \nu_N \leqslant ||A(z_0)||e^{2Lt_N}[e^{L\alpha} - 1]L^{-1}$$

(см. например, [13]). Сопоставляя (П.8)–(П.11), убеждаемся в справедливости неравенства (3.8). Теорема 2 доказана.

Замечание. Пользуясь результатами [99], можно показать, что если в условиях теоремы 2 будут ограничены не восьмые, а лишь четвертые моменты величин $F(\bar{z}_i, f_i)$, то для любого $\varepsilon > 0$ будет справедливо неравенство (3.8) с заменой α на $\alpha^{1-\varepsilon}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1955.
2. *Волосов В.М.* Усреднение в системах обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи математических наук. 1962. № 3. С. 3–126.
3. *Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х.* Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационые колебания. Т. 1. М.: Наука, 1975.
4. *Геращенко Е.И., Геращенко С.М.* Метод разделения движений и оптимизация нелинейных систем. М.: Наука, 1975.
5. *O'Malley R.* Introduction to Singular Perturbations. N.Y. : Acad. Press, 1974.
6. *Kokotovic P.V., O'Malley R., Sannuti P.* Singular Perturbations and Order Reduction in Control Theory — an Overview // Automatica. 1976. V. 12. No. 2. P. 123–132.
7. *Young K.-K., Kokotovic P., Utkin V.* A Singular Perturbation Analysis of High-Gain Feedback Systems // IEEE Trans. Autom. Control. 1977. V. 22. No. 6. P. 931–938.
8. *Хасьминский Р.З.* О случайных процессах, определяемых дифференциальными уравнениями с малым параметром // Теория вероятностей и ее применения. 1966. Т. 11. № 2. С. 240–259.
9. *Хасьминский Р.З.* О принципе усреднения для стохастических дифференциальных уравнений Ито // Кибернетика. 1968. Т. 4. № 3. С. 260–279.
10. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Стохастические диференциальные уравнения. Киев: Наук. думка, 1968.
11. *Фрейдлин М.И.* Принцип усреднения и теоремы о больших уклонениях // Успехи математических наук. 1978. Т. 33. № 5. С. 107–160.
12. *Вентцель А.Д., Фрейдлин М.И.* Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений. М.: Наука, 1979.
13. *Деревицкий Д.П., Фрадков А.Л.* Две модели для анализа динамики алгоритмов адаптации // АиТ. 1974. № 1. С. 59–67.
   Derevitskii D.P., Fradkov A.L. Two Models Analyzing the Dynamics of Adaptation Algorithms // Autom. Remote Control. 1974. V. 35. No. 1. P. 67–75.

14. *Деревицкий Д.П., Фрадков А.Л.* Исследование дискретных адаптивных систем управления динамическими объектами с помощью непрерывных моделей // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1975. № 5. С. 93–99.
15. *Ljung L.* Analysis of Recursive Stochastic Algorithms // IEEE Trans. Autom. Control. 1977. V. 22. No. 4. P. 551–575.
16. *Деревицкий Д.П., Фрадков А.Л.* Прикладная теория дискретных адаптивных систем управления. М.: Наука, 1981.
17. *Fradkov A.* Continuous-time Averaged Models of Discrete-time Stochastic Systems: Survey and Open Problems // Proc. 2011 50 IEEE Conf. on Decision and Control and Eur. Control Conf. (CDC-ECC). Orlando, Florida, USA. 2011. P. 2076–2081.
18. *Fradkov A.L.* Averaged Continuous-Time Models in Identification and Control // Proc. Eur. Contr. Conf. 2014, Strasbourg. P. 2822–2826.
19. *Поляк Б.Т.* Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983.
20. *Robbins H., Monro S.* A Stochastic Approximation Method // Ann. Math. Stat. 1951. V. 22. P. 400–407.
21. *Kushner H.J., Clark D.S.* Stochastic approximation methods for constrained and unconstrained systems. V. 26. Springer Science & Business Media, 2012.
22. *Меерков С.М.* Об упрощении описания медленных марковских блужданий // АиТ. 1972. № 3. С. 66–75.
Meerkov S.M. On Simplification of the Description of Slow Markovian Roaming // Autom. Remote Control. V. 33. No. 3. 1972. P. 404–414.
23. Информационные материалы: кибернетика 68. 1973. С. 14.
24. *Ljung L.* Convergence of Recursive Stochastic Algorithms // Proc. IFAC Sympos. on Stochastic Control. 1974. P. 551–575.
25. *Basar E.T.* Control Theory: Twenty-Five Seminal Papers (1932–1981). Wiley-IEEE Press, 2001.
26. *Gerencsér L.* A Representation Theorem for the Error of Recursive Estimators // SIAM J. Control Optim. 2006. V. 44. No. 6. P. 2123–2188.
27. *Поляк Б.Т., Цыпкин Я.З.* Псевдоградиентные алгоритмы адаптации и обучения // АиТ. 1973. № 3. С. 45–68.
Polyak B.T., Tsypkin Ya.Z. Pseudogradient Algorithms of Adaptation and Learning // Autom. Remote Control. 1973. V. 34. No. 3. P. 45–68.
28. *Невельсон М.Б., Хасьминский Р.З.* Непрерывные процедуры стохастической аппроксимации // Пробл. передачи информ. 1971. Т. 7. № 2. С. 58–69.
29. *Хасьминский Р.З.* Принцип усреднения для стохастических дифференциальных уравнений // Пробл. передачи информ. 1968. Т. 4. № 2. С. 86–87.
30. *Ибрагимов И.А., Линник Ю.В.* Независимые и стационарно связанные величины. М.: Наука, 1965.
31. *Бернштейн С.Н.* Стохастические уравнения в конечных разностях и стохастические дифференциальные уравнения. Собр. соч. в 4 т. Т. 4. С. 484–542. М.: Изд-во АН СССР. 1964.
32. *Красовский Н.Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959.
33. *Ахметкалиев Т.* О связи между устойчивостью стохастических разностных и диференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1965. № 8. С. 1016–1026.

34. *Поляк Б.Т.* Сходимость и скорость сходимости итеративных стохастических алгоритмов. I // АиТ. 1976. № 12. С. 83–94.
Polyak B.T. Convergence and Rate of Convergence of Recursive Stochastic Algorithms. I // Autom. Remote Control. 1976. V. 37. P. 537–542.

35. *Невельсон М.Б., Хасьминский Р.З.* Стохастическая аппроксимация и рекуррентное оценивание. М.: Наука, 1972.

36. *Kushner H.* Convergence of Recursive Adaptive and Identification Procedures via Weak Convergence Theory // IEEE Trans. Autom. Control. 1977. V. 22. No. 6. P. 921–930.

37. *Деревицкий Д.П., Фрадков А.Л.* Применение теории марковских процессов к анализу динамики алгоритмов адаптации // Автоматика и вычислительная техника. 1974. № 2. С. 39–48.

38. *Деревицкий Д.П., Фрадков А.Л.* Анализ динамики некоторых алгоритмов адаптации / Вопросы кибернетики. Адаптивные системы. М.: НС по кибернетике АН СССР, 1974. С. 79–84.

39. *Nešić D., Teel A.R., Kokotović P.* Sufficient Conditions for Stabilization of Sampled-data Nonlinear Systems via Discrete-time Approximations // Syst. Control Lett. 1999. V. 38. No. 4. P. 259–270.

40. *Драган В., Халанай А.* Сохранение экспоненциальной устойчивости в дискретных системах управления с адаптивной стабилизацией // Сиб. мат. журн. Т. 31. № 6. 1990. P. 200–205.

41. *Браверман Э.М., Пятницкий Е.С.* Прохождение случайного сигнала через абсолютно устойчивые системы // АиТ. 1971. № 2. С. 36–41.
Braverman E., Pyatnitskii Y. S. Passing of Random Signal Through Absolutely Stable Systems // Autom. Remote Control. 1971. V. 32. No. 2. P. 202–206.

42. *Деревицкий Д.П., Рипа К.К., Фрадков А.Л.* Исследование динамики некоторых алгоритмов случайного поиска / Проблемы случайного поиска. Рига: Зинатне, 1975. Вып. 4. С. 32–47.

43. *Андриевский Б.Р., Блажкин А.Т., Деревицкий Д.П., Фрадков А.Л.* Метод исследования динамики цифровых адаптивных систем управления летательными аппаратами / Управление в пространстве. Т. 1. М.: Наука, 1976. С. 149–153.

44. *Деревицкий Д.П.* Синтез стохастической дискретной адаптивной системы стабилизации с помощью непрерывной модели // Автоматика и вычислительная техника. 1975. № 6. С. 50–52.

45. *Андриевский Б.Р., Блажкин А.Т., Деревицкий Д.П., Фрадков А.Л.* Метод синтеза дискретных адаптивных систем стабилизации стохастического объекта // Рефераты докл., представленных на VII Всес. совещ. по проблемам управления. 1977. С. 102–105.

46. *Левитан В.Д.* Анализ динамики дискретных процессов адаптации с разрывной стохастической моделью // Вопросы кибернетики. Адаптивные системы управления. М.: Науч. совет по кибернетике АН СССР, 1977. С. 127–129.

47. *Amelina N., Fradkov A., Jiang Y., Vergados D.J.* Approximate Consensus in Stochastic Networks with Application to Load Balancing // IEEE Trans. Inform. Theory. 2015. V. 61. No. 4. P. 1739–1752.

48. *Pezeshki-Esfahani H., Heunis A.J.* Strong Diffusion Approximations for Recursive Stochastic Algorithms // IEEE Trans. Inform. Theory. 1997. V. 43. No. 2. P. 512–523.

49. *Weiss A., Mitra D.* Digital Adaptive Filters: Conditions for Convergence, Rates of Convergence, Effects of Noise and Errors Arising from the Implementation // IEEE Trans. Inform. Theory. 1979. V. 25. No. 6. P. 637–652.

50. *Benveniste A., Métivier M., Priouret P.* Adaptive Algorithms and Stochastic Approximations. Springer, 2012.

51. *Амелина Н.О., Фрадков А.Л.* Приближенный консенсус в стохастической динамической сети с неполной информацией и задержками в измерениях // АиТ. 2012. № 11. С. 6–29.
Amelina N.O., Fradkov A.L. Approximate Consensus in the Dynamic Stochastic Network with Incomplete Information and Measurement Delays // Autom. Remote Control. 2012. V. 73. No. 11. P. 1765–1783.

52. *Amelina N., Fradkov A.* Approximate Consensus in Multi-Agent Nonlinear Stochastic Systems // Proc. Europ. Control Conf. (ECC). 2014. P. 2833–2838.

53. *Amelina N., Fradkov A., Amelin K.* Approximate Consensus in Multi-Agent Stochastic Systems with Switched Topology and Noise // Proc. IEEE Multiconf. on Systems and Control (MSC'2012). Dubrovnik, Croatia. 2012. P. 445–450.

54. *Amelin K., Amelina N., Granichin O., Granichina O.* Multi-Agent Stochastic Systems with Switched Topology and Noise // Proc. 13 ACIS Int. Conf. on Software Engineering, Artificial Intelligence, Networking and Parallel/Distributed Computing (SNPD). Kyoto. Japan. 2012. P. 438–443.

55. *Amelina N., Granichin O., Kornivetc A.* Local Voting Protocol in Decentralized Load Balancing Problem with Switched Topology, Noise, and Delays // Proc. IEEE 52 Ann. Conf. on Decision and Control (CDC). 2013. P. 4613–4618.

56. *Gorodeisky Z.* Deterministic Approximation of Best-Response Dynamics for the Matching Pennies Game // Game. Econom. Behav. 2009. V. 66. No. 1. P. 191–201.

57. *Benveniste A.* Design of Adaptive Algorithms for the Tracking of Time-Varying Systems // Int. J. Adapt. Control Signal Process. 1987. V. 1. No. 1. P. 3–29.

58. *Benveniste A., Priouret P., Metivier M.* Algorithmes adaptatifs et approximations stochastiques: théorie et applications à l'identification, au traitement du signal et à la reconnaissance des formes. Paris etc.: Masson, 1987.

59. *Benveniste A., Ruget G.* A Measure of the Tracking Capability of Recursive Stochastic Algorithms with Constant Gains // IEEE Trans. Autom. Control. 1982. V. 27. No. 3. P. 639–649.

60. *Dugard L., Landau I.* Recursive Output Error Identification Algorithms Theory and Evaluation // Automatica. 1980. V. 16. No. 5. P. 443–462.

61. *Kulchitskii O.* The New Method of Dynamic Stochastic Uncertain Systems Investigation // Preprints of Int. Conf. "Stochastic Optimization". Part 1. 1984. P. 127–129.

62. *Kushner H.J.* Approximation and weak convergence methods for random processes, with applications to stochastic systems theory. V. 6. MIT press, 1984.

63. *Ljung L.* On Positive Real Transfer Functions and the Convergence of Some Recursive Schemes // IEEE Trans. Autom. Control. 1977. V. 22. No. 4. P. 539–551.

64. *Льюнг Л., Сёдерстрём Т.* Идентификация систем: теория для пользователя. М.: Наука, 1991.

65. *Solo V.* The Convergence of aml // IEEE Trans. Autom. Control. 1979. V. 24. No. 6. P. 958–962.

66. *Bozin A., Zarrop M.* Self Tuning Optimizer-Convergence and Robustness Properties // Proc. 1st Eur. Control Conf. 1991. P. 672–677.

67. *Ermoljev J.M., Kaniovskii J.M.* Asymptotic Properties of Some Stochastic Programming Methods with Constant Step // Zh. Vychisl. Mat. i Mat. Fiz. 1979. V. 19. No. 2. P. 356–366.

68. *Coito F.J., Lemos J.M.* Adaptive Optimization with Constraints: Convergence and Oscillatory Behaviour // Pattern Recogn. Image Anal. Springer, 2005. P. 19–26.

69. *Кульчицкий О.Ю.* Метод исследования сходимости алгоритмов адаптивной фильтрации, использующий стохастические функции Ляпунова // Пробл. передачи информ. 1985. Т. 21. № 4. С. 49–63.

70. *Kushner H.J., Shwartz A.* Weak Convergence and Asymptotic Properties of Adaptive Filters with Constant Gains // IEEE Trans. Inform. Theory. 1984. V. 30. No. 2. P. 177–182.

71. *Metivier M., Priouret P.* Applications of a Kushner and Clark Lemma to General Classes of Stochastic Algorithms // IEEE Trans. Inform. Theory. 1984. V. 30. No. 2. P. 140–151.

72. *Деревицкий Д.П.* Метод исследования динамики дискретных адаптивных систем управления динамическими объектами // Вопросы кибернетики. Адаптивные системы. М.: НС по кибернетике АН СССР, 1976. С. 64–72.

73. *Andrievsky B., Blazhkin A., Derevitsky D., Fradkov A.* The Method of Investigation of Dynamics of Digital Adaptive Systems of Flight Control // Proc. 6th IFAC Sympos. on Automatic Control in the Space. Yerevan, 1974.

74. *Деревицкий Д.П., Фрадков А.Л.* Метод непрерывных моделей в теории дискретных адаптивных систем // Вопросы кибернетики: Задачи и методы адаптивного управления. М.: НС по кибернетике АН СССР, 1980. С. 75–98.

75. *Derevitskii D., Fradkov A.* Averaging Method for Discrete Stochastic Systems and Its Application in Adaptive Control // Preprints Int. Conf. “Stochastic Optimization”. V. 1. P. 74–76.

76. *Фрадков А.Л.* Адаптивное управление сложными системами. М.: Наука, 1990.

77. *Кульчицкий О.Ю.* Алгоритмы типа стохастической аппроксимации в контуре адаптации дискретной стохастической линейной динамической системы. I, II // АиТ. 1983. № 9. С. 102-118; АиТ. 1984. № 3. С. 104–113.
Kulchitskii O.Y. Algorithms of Stochastic Approximation in Adaptation Loop of Linear Dynamic System. I, II // Autom. Remote Control. V. 44. No. 9. 1983. P. 1189–1203; V. 45. No. 3. 1984. P. 104–113.

78. *Mosca E., Zappa G., Lemos J.M.* Robustness of Multipredictor Adaptive Regulators: Musmar // Automatica. 1989. V. 25. No. 4. P. 521–529.

79. *Mosca E., Lemos J.M., Mendonca T., Nistri P.* Input Variance Constrained Adaptive Control and Singularly Perturbed ODE’s // Proc. 1st ECC. Grenoble. 1991. P. 2176–2180.

80. *Цыкунов А.М.* Адаптивное управление объектами с последействием. М.: Наука, 1984.

81. *Oja E., Karhunen J.* On Stochastic Approximation of the Eigenvectors and Eigenvalues of the Expectation of a Random Matrix // J. Math. Anal. Appl. 1985. V. 106. No. 1. P. 69–84.

82. *Жданов А.И.* Рекуррентное оценивание минимальных собственных значений информационных матриц // АиТ. 1987. № 4. С. 26–36.
Zhdanov A.I. Recursive Estimation of Minimum Eigenvalues of Information Matrices // Autom. Remote Control. 1987. V. 48. No. 4. Part 1. P. 443–451.

83. *Stankovic M.S., Johansson K.H., Stipanović D.M.* Distributed Seeking of Nash Equilibria in Mobile Sensor Networks // Proc. 49th IEEE Conf. on Decision and Control (CDC). 2010. P. 5598–5603.

84. *Астановская Н.В.,Варшавский В.И., Ревако В.М., Фрадков А.Л.* Метод непрерывных моделей в задаче децентрализованного рспределения ресурсов // Применение методов случайного поиска в САПР. Таллин: Валгус, 1979.

85. *Боровков А.А.* Асимптотические методы в теории массового обслуживания. М.: Наука, 1979.

86. *Kuan C.-M., Hornik K.* Convergence of Learning Algorithms with Constant Learning Rates // IEEE Trans. Neural Networks. 1991. V. 2. No. 5. P. 484–489.

87. *Choi J., Horowitz R.* Learning Coverage Control of Mobile Sensing Agents in One-Dimensional Stochastic Environments // IEEE Trans. Autom. Control. 2010. V. 55. No. 3. P. 804–809.

88. *Choi J., Oh S., Horowitz R.* Distributed Learning and Cooperative Control for Multi-Agent Systems // Automatica. 2009. V. 45. No. 12. P. 2802–2814.

89. *Huang M., Manton J.* Coordination and Consensus of Networked Agents with Noisy Measurements: Stochastic Algorithms and Asymptotic Behavior // SIAM J. Control Optim. 2009. V. 48. No. 1. P. 134–161.

90. *Borkar V.S., Manjunath D.* Distributed Topology Control of Wireless Networks // Wireless Networks. 2008. V. 14. No. 5. P. 671–682.

91. *Граничин О.Н., Фомин В.Н.* Адаптивное управление с использованием пробных сигналов // АиТ. 1986. № 2. С. 100–112.

Granichin O., Fomin V. Adaptive Control Using Test Signals in the Feedback Channel // Autom. and Remote Control. 1986. V. 47. No. 2. Part 2. P. 238–248.

92. *Granichin O., Volkovich V., Toledano-Kitai D.* Randomized Algorithms in Automatic Control and Data Mining. Heidelberg—N.Y.—Dordrecht—London: Springer-Verlag, 2015.

93. *Amelin K., Granichin O.* Randomized Control Strategies under Arbitrary External Noise // IEEE Trans. Autom. Control. 2016. V. 61. No. 5. P. 1328–1333.

94. *Spall J.C.* Introduction to Stochastic Search and Optimization: Estimation, Simulation, and Control. V. 64. Wiley-Interscience, 2003.

95. *Цыпкин Я.З.* Адаптация и обучение в автоматических системах. М.: Наука, 1968.

96. *Якубович В.А.* Метод рекуррентных целевых неравенств в теории адаптивных систем // Вопросы кибернетики. Адаптивные системы управления. М.: Научный совет по кибернетике АН СССР, 1976. С. 32–63.

97. *Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л.* Анализ динамики одного алгоритма адаптивного управления линейным динамическим объектом // Вопросы кибернетики. Адаптивные системы управления. М.: Научный совет по кибернетике АН СССР, 1976. С. 99–103.

98. *Фрадков А.Л.* Схема скоростного градиента и ее применение в задачах адаптивного управления // АиТ. 1979. № 9. Р. 90–101.
Fradkov A.L. Speed-Gradient Scheme and Its Application in Adaptive Control Problems // Autom. Remote Control. 1980. V. 40. No. 9. P. 1333–1342.

99. *Yoshihara K.* Moment Inequalities for Mixing Sequences // Kodai Math. J. 1978. V. 1. No. 2. P. 316–328.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.В. Назиным.

Поступила в редакцию 19.07.2018

После доработки 06.09.2018

Принята к публикации 08.11.2018