

© 2019 г. В.И. МЕРКУЛОВ, д-р техн. наук (from_fn@mail.ru),
А.С. ПЛЯШЕЧНИК, канд. физ.-мат. наук (a_plyashechnik@mail.ru)
(АО “Концерн “Вега”, Москва)

СПОСОБ ОБХОДА ОПАСНЫХ ЗОН В ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ¹

Предложен способ обхода летательным аппаратом (ЛА) случайно расположенных опасных зон, основанный на использовании теории графов, и алгоритм управления ЛА, реализующий этот способ. Приведены варианты реализации способа и алгоритма управления и результаты их исследования.

Ключевые слова: обход опасных зон, система управления, алгоритм Дейкстры.

DOI: 10.1134/S0005231019010112

1. Введение

В практике полетов как гражданской, так и военной авиации достаточно часто возможны ситуации, требующие обхода (облета) опасных зон. К таким зонам относятся: зоны сложных метеоусловий, зоны катастроф, вызванных различными причинами, и т.д. Для военной авиации это прежде всего зоны объектовой противовоздушной обороны [1].

Существует несколько подходов к решению этой задачи. Например, в [2] используется метод построения сетки в фазовом пространстве, после чего при помощи теории графов строится дискретный путь, который затем приближается гладкими участками с определенной параметризацией при согласовании в промежуточных точках, а также при возможных дополнительных ограничениях. Этот метод позволяет решить задачу построения оптимального по заданному критерию пути, удовлетворяющего заданным ограничениям, при наличии препятствий, причем можно строить путь как на плоскости, так и в пространстве. Однако этот метод довольно сложен в реализации и требует значительных вычислительных ресурсов. В [3] рассматривается способ, при котором сначала с помощью диаграмм Вороного строится кусочно-линейная траектория полета, которая затем сглаживается при помощи спиралей Корню. В [4] путь обхода строится по седловым точкам потенциала с помощью теории графов.

В работе предполагается известным расположение всех опасных зон, благодаря чему возможно построить сразу весь путь оптимальным образом. Если же известна лишь информация об опасных зонах в некоторой окрестности ЛА, то возможно следует использовать другие способы обхода [5].

Следует отметить, что после построения траектории облета опасных зон необходимо сформировать алгоритм управления ЛА, обеспечивающий его по-

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-08-01083-а).

лет по этой траектории. Есть различные подходы к решению этой задачи: следование за виртуальным ЛА [6], полет по заданным контрольным точкам [7], использование алгоритмов оптимального управления [8, 9]. В последнем случае наиболее часто вручную выделяют точки по периметру опасной зоны и проводят через них требуемую траекторию.

Цель статьи – разработка простого алгоритма формирования пути обхода летательным аппаратом опасных зон в плоскости, способного быстро построить требуемую траекторию без участия человека, и разработка способа следования этому пути при движении из заданной начальной точки в заданную конечную.

Целесообразность решения плоской, а не пространственной задачи обхода опасных зон обусловлена, как минимум, двумя причинами:

- существенно большей простотой построения траектории полета и формирования сигнала траекторного управления летательным аппаратом;
- случайным характером и сложностью достоверного определения параметров реальных опасных зон в вертикальной плоскости.

2. Постановка задачи

Задачу обхода опасных зон будем решать при следующих условиях:

1) зоны обхода сохраняют свою конфигурацию в пространстве достаточно продолжительное время;

2) зоны описываются эллипсами в горизонтальной плоскости. Это приближение позволяет достаточно просто описать зоны различной физической природы;

3) известны начальная точка A и конечная точка B полета ЛА, а также направление движения в начальной точке и его минимально допустимый радиус разворота R ;

4) ЛА обладает достаточной маневренностью, чтобы двигаться по границам эллипсов, задающих опасные зоны. Как правило, это предположение оправдано, поскольку размер опасных зон обычно значительно больше радиуса разворота ЛА;

5) известен перечень эллипсов, определяющих опасные зоны. Эллипсы задаются параметрами (x, y, a, b, φ) (рис. 1), где (x, y) – координаты центра эллипса, a, b – полуоси эллипса, φ – угол наклона оси a в системе координат XOY .

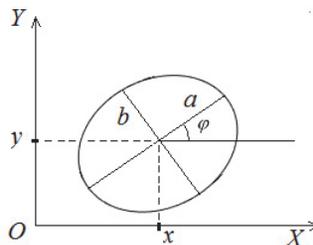


Рис. 1. Параметры эллипса.

Необходимо обеспечить движение ЛА из начальной точки A в конечную точку B без захода внутрь опасных зон.

Решение задачи проводится в два этапа. На первом этапе строится требуемая траектория облета опасных зон. На втором этапе определяется способ формирования сигнала управления ЛА, обеспечивающий его следование построенной траектории.

3. Построение траектории обхода

На первом этапе построим кратчайшую траекторию облета опасных зон из точки A в точку B . Эта траектория не должна заходить внутрь опасных зон, должна иметь заданное направление движения в начальной точке и удовлетворять ограничениям на величину допустимого ускорения ЛА. Легко понять, что она будет состоять из дуги окружности с заданным радиусом разворота R и последовательно чередующихся отрезков и дуг эллипсов. При этом в точках пересечения отрезки будут касаться эллипсов. Тем самым отрезки пути между эллипсами будут отрезками общих касательных. Так как между двумя эллипсами может быть не более четырех общих касательных, то имеется конечное число возможных промежуточных точек, и для решения задачи можно применить методы теории графов [10]. В соответствии с изложенным, результатом работы алгоритма будет массив элементарных участков: отрезков и дуг эллипсов.

Приведем общее описание алгоритма. Реализация его отдельных частей, связанная с решением частных геометрических задач, будет рассмотрена после.

К списку эллипсов, задающих опасные зоны, добавим две окружности, радиус которых равен радиусу разворота R , проходящие через начальную точку A так, чтобы начальное направление движения было касательным. Также в этот список добавим конечную точку B . Перебираем все возможные пары объектов из этого списка. Для каждой пары строятся все возможные отрезки, соединяющие их, причем для эллипсов и окружностей отрезки должны касаться их в точке пересечения (способ построения отрезков приведен в пп. 2 и 5 далее). Далее строится граф путей. Его вершинами будут все концы построенных отрезков. Для N опасных зон их число не превышает величины $4(N + 2)^2$. Добавим две дополнительные вершины, соответствующие начальной точке на каждой из окружностей.

Ребра графа определяются следующим образом. Две точки на разных объектах соединяются ребром, если они являются концами одного из построенных отрезков, причем этот отрезок не пересекается ни с какими реальными опасными зонами, кроме двух рассматриваемых (алгоритм проверки пересечения приведен в п. 4 далее). Длина ребра полагается равной длине соединяющего эти точки отрезка. Две точки на одном объекте соединяются ребром, если направления движения в этих точках согласованы. Направление в начальной точке соответствует начальному направлению движения. Если точка является концом отрезка касательной, то направление в точке определяется этим отрезком. Направления в точках согласованы, если путь между двумя этими точками согласован с этими направлениями. На рис. 2 направления

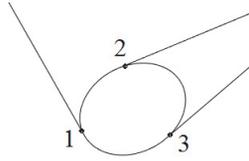


Рис. 2. Согласованность направлений.

в точках 1 и 3 согласованы. Это означает, что можно двигаться к эллипсу по касательной к точке 1, затем плавно перейти на движение по эллипсу до точки 3, далее плавно перейти на касательную к точке 3. Точно так же условия согласования выполнены для точек 2 и 3. Для точек 1 и 2 эти условия не выполнены. Для пары согласованных точек имеется путь между ними по границе эллипса, согласованный с направлениями в этих точках. Если этот путь не пересекает другие реальные опасные зоны (алгоритм проверки пересечения приведен в п. 3 далее), то вершины графа соединяются ребром, длина которого равна длине этого пути.

Для построенного графа используем алгоритм Дейкстры [10] поиска кратчайшего пути. Начальными данными в алгоритме будет нуль в двух вершинах, соответствующих начальной точке на двух проходящих через нее окружностях, и бесконечность во всех остальных вершинах. Перебор соседних вершин в алгоритме производится следующим образом. При обновлении значения в точке сохраняется ссылка на вершину, из которой пришло обновление. Если при рассмотрении текущей вершины указанная по ссылке предыдущая вершина лежит на том же эллипсе, то в процессе обновления соседних вершин просматривается только вершина на другом конце касательной, проходящей через текущую точку. Если же предыдущая вершина лежит на другом эллипсе, то в процессе обновления соседних вершин рассматриваются все вершины на том же эллипсе, что и текущая.

В результате для каждой точки графа будет построен кратчайший путь в нее из начальной точки. Путь в конечную точку и будет искомым путем. Вычислительная сложность алгоритма при числе опасных зон N пропорциональна N^3 . Отметим, что если вместо двух окружностей добавить начальную точку, то можно построить кратчайший путь без учета начального направления движения.

Для определения практической значимости предложенного алгоритма проведем его сравнение с похожим подходом из [2]. Рассмотрим приводимый в [2] в разделе V. А пример обхода двух окружностей на плоскости при заданных начальных и конечных точках и направлениях. Для ее решения в [2] строится граф из 4140 вершин и порядка 300000 ребер. Для сравнения в предлагаемом авторами алгоритме будет порядка $4N^2 = 144$ вершин и порядка $12N^2 = 432$ ребер, где N – число окружностей, равное шести (для начальной и конечной точки строится по две дополнительные окружности с заданным радиусом разворота). Видно, что в этом примере предлагаемый авторами статьи специализированный алгоритм гораздо более экономичен, чем универсальный алгоритм из [2]. Кроме того, предлагаемый алгоритм стро-

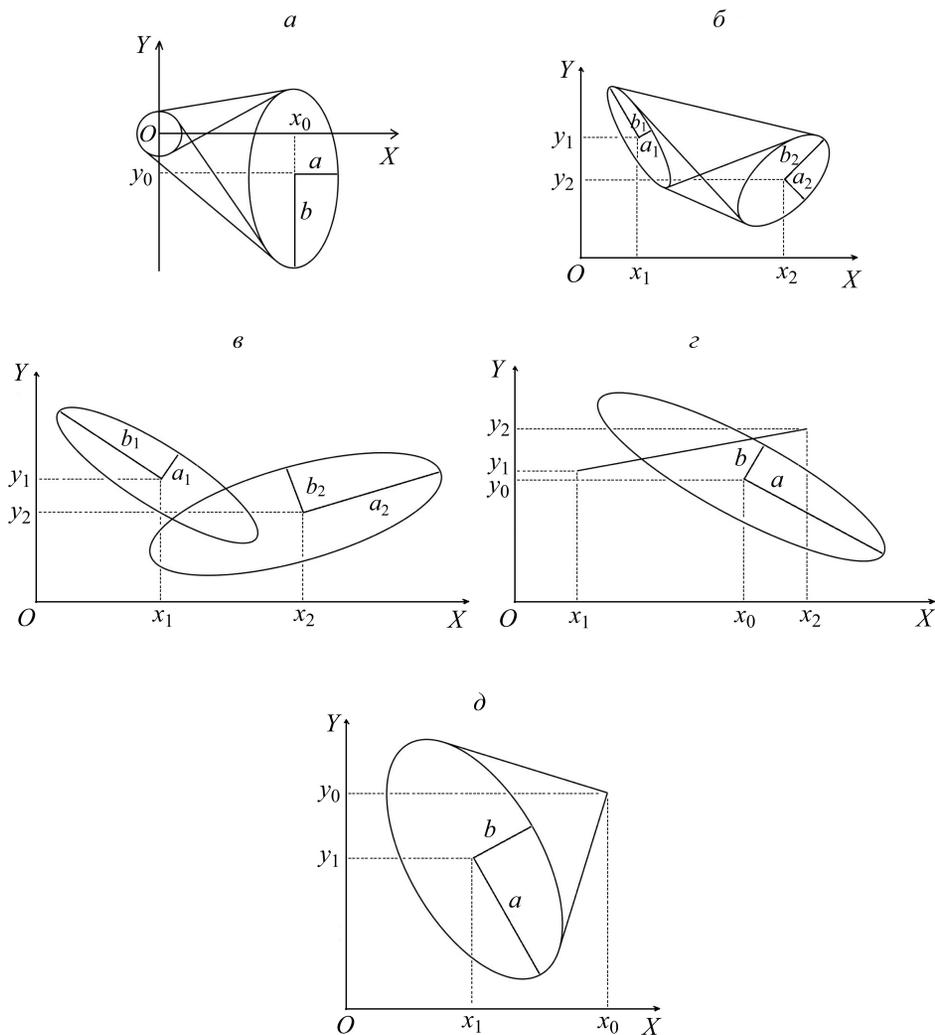


Рис. 3. Геометрические задачи: *a* – построение общих касательных к эллипсу и окружности; *б* – построение общих касательных к двум эллипсам; *в* – поиск точек пересечения эллипсов; *г* – поиск точек пересечения отрезка и эллипса; *д* – построение касательных к эллипсу, проходящих через заданную точку.

ит действительно кратчайший путь, хотя при достаточном количестве точек алгоритм [2] дает практически ту же самую длину траектории обхода.

Необходимо отметить, что для построения требуемой траектории необходимо решить ряд частных геометрических задач (рис. 3), к которым относятся:

- нахождение общих касательных к окружностям и эллипсам,
- проверка пересечения эллипсов,
- определение пересечения отрезка с эллипсом,
- нахождение касательных к эллипсу, проходящих через заданную точку.

1. *Нахождение общих касательных к единичной окружности с центром в начале координат и к эллипсу, оси которого ориентированы по координатным осям (рис. 3,а).*

Эллипс задается координатами центра (x_0, y_0) и полуосями a и b . Уравнение эллипса определяется соотношением

$$(1) \quad (x - x_0)^2/a^2 + (y - y_0)^2/b^2 = 1.$$

Точки касательной к окружности, проходящей через точку $(\cos \varphi, \sin \varphi)$, определяются в параметрическом виде через параметр t выражениями:

$$(2) \quad \begin{aligned} x &= \cos \varphi - t \sin \varphi, \\ y &= \sin \varphi + t \cos \varphi. \end{aligned}$$

Условие касания эллипса записывается в виде

$$(3) \quad -(x - x_0) \sin \varphi/a^2 + (y - y_0) \cos \varphi/b^2 = 0.$$

Для нахождения касательной нужно решить систему (1)–(3).

Исключив t из уравнений (2), получим

$$(4) \quad x \cos \varphi + y \sin \varphi = 1,$$

откуда следует, что

$$(5) \quad (x - x_0) \cos \varphi + (y - y_0) \sin \varphi = 1 - x_0 \cos \varphi - y_0 \sin \varphi.$$

Решив систему (3), (5) относительно $(x - x_0)$ и $(y - y_0)$ и подставив ее решение в (1), получим уравнение

$$a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi = (1 - x_0 \cos \varphi - y_0 \sin \varphi)^2.$$

Заменой $z = \operatorname{tg}(\varphi/2)$ это уравнение приводится к уравнению четвертой степени

$$\begin{aligned} ((1 + x_0)^2 - a^2) z^4 - 4y_0(1 + x_0)z^3 + 2(1 - x_0^2 + 2y_0^2 + a^2 - 2b^2) z^2 - \\ - 4y_0(1 - x_0)z + ((1 - x_0)^2 - a^2) = 0. \end{aligned}$$

Каждое его действительное решение определяет общую касательную, идущую от точки $(\cos \varphi, \sin \varphi)$ окружности к точке (x, y) эллипса, определяемой из системы линейных уравнений (3), (4) при найденном значении φ .

2. *Нахождение общих касательных к двум эллипсам при условии, что они заданы параметрами $(x_1, y_1, a_1, b_1, \varphi_1)$ и $(x_2, y_2, a_2, b_2, \varphi_2)$, иллюстрируется рис. 3,б. Приведем последовательность преобразований, сводящих задачу к п. 1:*

а) сдвигаем эллипсы на $(-x_1)$ по оси X и на $(-y_1)$ по оси Y так, чтобы центр первого эллипса оказался в начале координат. При этом изменятся координаты центра второго эллипса;

б) поворачиваем эллипсы на угол $(-\varphi_1)$ вокруг начала координат. Угол поворота первого эллипса станет равным нулю, угол поворота второго эллипса будет равен $\varphi_2 - \varphi_1$, вектор центра (x_2, y_2) тоже повернется;

в) используя преобразование $\bar{x} = x/a_1$; $\bar{y} = y/b_1$, изменяем масштаб осей так, чтобы первый эллипс стал единичной окружностью. Преобразование второго эллипса производится следующим образом. Оставляя для координат его центра и угла поворота после преобразований а и б исходные обозначения (x_2, y_2, φ_2) , запишем его уравнение в виде

$$(6) \quad a(x - x_2)^2 + b(x - x_2)(y - y_2) + c(y - y_2)^2 = 1,$$

где

$$(7) \quad \begin{aligned} a &= \cos^2 \varphi_2 / a_2^2 + \sin^2 \varphi_2 / b_2^2, \\ b &= 2 \cos \varphi_2 \sin \varphi_2 (1/a_2^2 - 1/b_2^2), \\ c &= \cos^2 \varphi_2 / b_2^2 + \sin^2 \varphi_2 / a_2^2. \end{aligned}$$

В новых координатах уравнение (6) примет вид

$$aa_1^2(\bar{x} - x_2/a_1)^2 + ba_1b_1(\bar{x} - x_2/a_1)(\bar{y} - y_2/b_1) + cb_1^2(\bar{y} - y_2/b_1)^2 = 1,$$

откуда следует, что координаты центра второго эллипса будут $(x_2/a_1, y_2/b_1)$. Для нахождения новых полуосей запишем матрицу, следующую из этого уравнения,

$$\begin{pmatrix} aa_1^2 & ba_1b_1/2 \\ ba_1b_1/2 & cb_1^2 \end{pmatrix}$$

и найдем ее собственные значения λ_1, λ_2 и собственный вектор, соответствующий λ_1 . Тогда новые полуоси эллипса будут $\lambda_1^{-1/2}$ и $\lambda_2^{-1/2}$, а направление собственного вектора определит новый угол φ_2 поворота эллипса;

г) поворачиваем эллипсы на угол $(-\varphi_2)$ вокруг начала координат. Вектор центра (x_2, y_2) повернется, а новое значение угла φ_2 будет равным нулю. Первый эллипс при этом не изменится, так как он является окружностью с центром в начале координат.

В результате проделанных преобразований первый эллипс стал единичной окружностью с центром в начале координат, а оси второго эллипса ориентированы по координатным осям. В соответствии с п. 1 найдем отрезки общих касательных, соединяющие окружность с эллипсом. Эти отрезки задаются декартовыми координатами двух точек, одна из которых лежит на окружности, а другая на эллипсе. После проведения над этими точками преобразований, обратных к преобразованиям п.п. г, в, б, а, получим координаты точек отрезка касательной, соединяющей исходные эллипсы в первоначальной системе координат.

3. Проверка пересечения эллипсов (рис. 3,6).

Два эллипса заданы параметрами $(x_1, y_1, a_1, b_1, \varphi_1)$ и $(x_2, y_2, a_2, b_2, \varphi_2)$. На первом эллипсе задана дуга, определяемая интервалом углов при задании эллипса в параметрическом виде

$$(8) \quad \begin{aligned} x &= a_1 \cos \varphi, \\ y &= b_1 \sin \varphi \end{aligned}$$

в связанной с ним системе координат. Нужно определить, пересекается ли эта дуга со вторым эллипсом или лежит внутри него.

Сдвигаем и поворачиваем эллипсы вокруг начала координат так, чтобы центр первого эллипса попал в начало координат, а его оси были направлены по координатным осям. Запишем уравнение второго эллипса в виде

$$(9) \quad ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$

где первые три коэффициента определяются по формулам (7), а остальные вычисляются по формулам

$$d = -2ax_2 - by_2; \quad e = -2cy_2 - bx_2; \quad f = ax_2^2 + bx_2y_2 + cy_2^2 - 1.$$

После подстановки (8) в (9) получим уравнение

$$(10) \quad a' \cos^2 \varphi + b' \sin \varphi \cos \varphi + c' \sin^2 \varphi + d' \cos \varphi + e' \sin \varphi + f' = 0,$$

где

$$a' = a_1^2 a; \quad b' = a_1 b_1 b; \quad c' = b_1^2 c; \quad d' = a_1 d; \quad e' = b_1 e; \quad f' = f.$$

Заменой $z = \operatorname{tg}(\varphi/2)$ уравнение (10) приводится к виду

$$\begin{aligned} (a' - d' + f') t^4 + (2e' - 2b') t^3 + (2f' + 4c' - 2a') t^2 + \\ + (2b' + 2e') t + (a' + d' + f') = 0. \end{aligned}$$

Найдем его действительные корни и соответствующие значения φ . Они определяют разбиение первого эллипса на участки, лежащие внутри или вне второго эллипса. Остается лишь проверить, пересекается ли заданный участок с участками, лежащими внутри второго эллипса.

4. Определение пересечения отрезка с эллипсом (рис. 3,2).

Эллипс задан параметрами $(x_0, y_0, a, b, \varphi)$, а координаты концов отрезка — (x_1, y_1) и (x_2, y_2) . Сдвигаем и поворачиваем эллипс и отрезок, так чтобы центр эллипса попал в начало координат, а его оси были направлены по координатным осям. Обозначим новые координаты концов отрезка (x'_1, y'_1) и (x'_2, y'_2) . Отрезок пересекается с эллипсом, если квадратное уравнение

$$\frac{(x'_1 + t(x'_2 - x'_1))^2}{a^2} + \frac{(y'_1 + t(y'_2 - y'_1))^2}{b^2} = 1$$

имеет корни, лежащие на отрезке $[0, 1]$.

5. Нахождение касательных к эллипсу, проходящих через заданную точку (рис. 3, д).

Эллипс задан параметрами $(x_1, y_1, a, b, \varphi_1)$, а координаты точки — (x_0, y_0) . Сдвигаем и поворачиваем эллипс и точку вокруг начала координат так, чтобы центр эллипса попал в начало координат, а его оси были направлены по координатным осям. Если координаты точки после преобразований равны (x'_0, y'_0) , то решения уравнения

$$(11) \quad ay'_0 \cos \varphi + bx_0 \sin \varphi - ab = 0$$

определяют искомые точки на эллипсе.

4. Формирование сигнала управления

Рассмотрим один из возможных вариантов формирования сигнала управления, обеспечивающих полет ЛА по требуемой траектории.

Пусть на плоскости XOY задана некоторая кривая P , по которой должен следовать ЛА, находящийся в точке C (рис. 4).

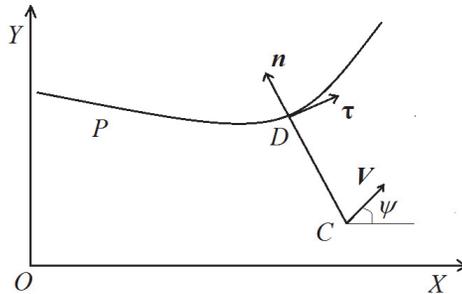


Рис. 4. Облет требуемой траектории.

Найдем на кривой точку D , ближайшую к текущему положению ЛА. Положим $\mathbf{r} = \overrightarrow{DC}$. В точке D вычислим единичный вектор $\boldsymbol{\tau}$, касательный к P и направленный в сторону требуемого направления облета кривой. В точке D вычислим вектор $k\mathbf{n}$, где k — кривизна (по определению кривизна считается положительной), а \mathbf{n} — единичный вектор нормали, направленный в сторону центра кривизны. При этом будем считать, что известен вектор \mathbf{V} скорости ЛА, модуль которого V определяет требуемую скорость движения, а его направление задается курсом ψ относительно какого-либо фиксированного направления. Предлагаемый закон управления не меняет величины V , которая может быть заранее выбранной постоянной или может меняться по независимому закону, исходя из каких-либо требований к скоростям прохождения разных участков пути.

Используя методику, изложенную в [6], можно сформировать закон изменения требуемого поперечного ускорения ЛА:

$$(12) \quad J_T = \mu^2 V[\mathbf{r}, \mathbf{V}]_z + 2\mu[\mathbf{V}, \boldsymbol{\tau}]_z + V^2[\boldsymbol{\tau}, k\mathbf{n}],$$

где μ — числовой коэффициент, а $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]_z$ — z компонента векторного произведения векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} , вычисляемая по формуле $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]_z = a_x b_y - a_y b_x$.

Слагаемые в законе (12) имеют следующий смысл:

- слагаемое $\mu^2 V[\mathbf{r}, \mathbf{V}]_z$ отвечает за возврат ЛА на требуемую траекторию,
- слагаемое $2\mu[\mathbf{V}, \boldsymbol{\tau}]_z$ отвечает за уменьшение компоненты скорости, перпендикулярной требуемой траектории,
- слагаемое $V^2[\boldsymbol{\tau}, k\mathbf{n}]$ учитывает кривизну требуемой траектории.

Для иллюстрации физического смысла этих слагаемых рассмотрим модель ЛА, инерционностью которого пренебрегаем. Тогда закон управления по курсу имеет вид

$$(13) \quad \dot{\psi} = J_T/V,$$

где величина сигнала управления J_T задается выражением (12).

Для иллюстрации смысла третьего слагаемого в (12) предположим, что в начальный момент ЛА находится в точке кривой P и скорость направлена по касательной к P . Тогда первые два слагаемых в правой части (12) будут равны нулю и (13) примет вид $\dot{\psi} = V[\boldsymbol{\tau}, k\mathbf{n}]$. Если перейти от времени t к длине пройденного пути s , то это уравнение примет вид $d\psi/ds = [\boldsymbol{\tau}, k\mathbf{n}]$, т.е. известное из дифференциальной геометрии натуральное уравнение кривой P . Отсюда следует, что благодаря наличию третьего слагаемого в (12) ЛА будет продолжать двигаться точно по кривой P .

Для иллюстрации смысла первых двух слагаемых в (12) рассмотрим частный случай, когда кривая P представляет собой ось X , проходящую в положительном направлении. Скорость предполагаем постоянной, а угол ψ будем отсчитывать от оси X . Тогда третье слагаемое в (12) будет равно нулю и уравнение (13) примет вид

$$(14) \quad \dot{\psi} = -\mu^2 y \dot{x} - 2\mu \dot{y},$$

образуя вместе с уравнениями движения

$$(15) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= V \cos \psi, \\ \dot{y} &= V \sin \psi \end{aligned}$$

замкнутую систему дифференциальных уравнений.

Одним из решений системы (14), (15) является $\psi = 0$, $y = 0$, $x = Vt$, определяющее движение по оси X в положительном направлении. Линеаризация уравнений (14), (15) в окрестности этого решения дает уравнение

$$(16) \quad \ddot{y} + 2\mu V \dot{y} + \mu^2 V^2 y = 0.$$

Из (16) видно, что слагаемое со второй степенью μ представляет собой силу, возвращающую ЛА на требуемую траекторию, а слагаемое с первой степенью μ характеризует корректирующий сигнал, гасящий компоненту скорости, направленную перпендикулярно требуемой траектории. Общее решение (16) имеет вид

$$(17) \quad y(t) = (A + Bt)e^{-t/\beta},$$

где $\beta = (\mu V)^{-1}$ является характерным временем сходимости решения.

Движение по оси X в отрицательном направлении $\psi = \pi$, $y = 0$, $x = -Vt$ также удовлетворяет системе (14), (15), но в окрестности этого решения линеаризация системы (14), (15) дает уравнение $\ddot{y} - 2\mu V\dot{y} + \mu^2 V^2 y = 0$, что соответствует неустойчивому движению в обратную сторону.

Численное решение системы (14), (15) при различных начальных условиях (за исключением движения в обратную сторону по оси X) показало, что качественно ее решения имеют вид, аналогичный (17).

Рассмотрим более общую ситуацию, когда ЛА аппроксимируется моделью [9]

$$(18) \quad \begin{aligned} \dot{\psi} &= \omega, \\ \dot{\omega} &= -\omega/T + J_T/TV, \end{aligned}$$

которая учитывает его инерционность, определяемую постоянной времени T , где величина сигнала управления J_T определяется выражением (12). Вообще говоря, в этом случае движение по заданной кривой будет выполняться с некоторыми ошибками. Тем не менее возможно точное движение по прямой и по окружности с постоянной скоростью, так как угловая скорость движения в этом случае постоянна. При движении по кривой, кривизна которой меняется не слишком быстро, в частности при движении по эллипсу, близкому по форме к окружности, летательный аппарат, определяемый моделью (18), может обеспечивать движение с приемлемой точностью.

Для реализации (12) необходимо знание векторов $\boldsymbol{\tau}$ и $k\mathbf{n}$ в ближайшей точке требуемой траектории. В общем случае требуемая траектория облета состоит из набора участков, каждый из которых является отрезком или дугой эллипса. Для нахождения ближайшей точки требуемой траектории нужно найти ближайшую точку каждого участка и выбрать самую близкую из них.

Если ближайшая точка находится на участке пути, который является отрезком, заданным крайними точками (x_1, y_1) и (x_2, y_2) , причем требуется двигаться от первой точки до второй, то искомые векторы вычисляются по формуле

$$(19) \quad \begin{aligned} \boldsymbol{\tau} &= ((x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2)^{-1/2} (x_2 - x_1, y_2 - y_1), \\ k\mathbf{n} &= 0. \end{aligned}$$

Если ближайшая точка находится на участке пути, который является дугой эллипса, заданного уравнениями $x = a \cos \varphi$, $y = b \sin \varphi$, и этой точке со-

ответствует значение параметра φ_0 , то искомые векторы вычисляются так:

$$(20) \quad \begin{aligned} \boldsymbol{\tau} &= \pm (a^2 \sin^2 \varphi_0 + b^2 \cos^2 \varphi_0)^{-1/2} (-a \sin \varphi_0, b \cos \varphi_0), \\ k\mathbf{n} &= -ab (a^2 \sin^2 \varphi_0 + b^2 \cos^2 \varphi_0)^{-1/2} (b \cos \varphi_0, a \sin \varphi_0). \end{aligned}$$

В первом уравнении (20) знак плюс берется при движении в сторону возрастания угла φ , а знак минус при движении в сторону убывания.

Величина требуемого сигнала управления вычисляется по (12), в которую подставляются координаты местоположения и вектор скорости ЛА, а также найденные с помощью (19) или (20) выражения для векторов $\boldsymbol{\tau}$ и $k\mathbf{n}$.

5. Исследование эффективности

Для моделирования использовалась среда Matlab на компьютере с процессором Core I5-4670, 3,40 ГГц с 4 Гб оперативной памяти. Исследование эффективности проводилось по результатам построения траектории между заданными точками при наличии некоторого числа опасных зон по формулам (1)–(11) и последующего следования ЛА по построенной траектории с законом управления (12). При этом предполагалось, что известны:

- координаты начальной A и конечной B точек маршрута;
- число опасных зон, их координаты и параметры;
- начальное направление движения ЛА;
- радиус разворота ЛА;
- допустимые перегрузки.

Эффективность предложенного способа оценивалась по величине отклонения ЛА от требуемой траектории, по величине требуемых перегрузок, а также временем построения требуемой траектории облета.

На первом этапе исследовался алгоритм построения требуемой траектории облета. На рис. 5,а представлен результат построения кратчайшей траектории между точками A и B при наличии $N = 7$ опасных зон при заданном начальном направлении движения в точке A . Для наглядности радиус поворота выбран сравнимым с размерами некоторых опасных зон, несмотря на то, что реализация полученной траектории может оказаться невозможной.

Другой вариант поиска кратчайшей траектории проводился при количестве опасных зон $N = 100$, плотно расположенных на пути между начальной и конечной точками. Один из вариантов построения кратчайшего пути между точками A и B без учета начального направления движения приведен на рис. 5,б. Время расчета пути при наличии ста зон составляет около одной секунды.

На втором этапе исследовалась потенциальная возможность системы обхода препятствий безынерционным ЛА, определяемым моделью (13), в которой инерция управления пренебрежимо мала. При этом скорость движения полагалась постоянной величине 200 м/с, а максимальное поперечное ускорение ограничено величиной 30 м/с². Радиус разворота положен равным 2 км, что при выбранной скорости соответствует поперечному ускорению 20 м/с². Измерения координат проводились с ошибками до 200 метров. В законе управления (12) был выбран коэффициент $\mu = 0,0006$.

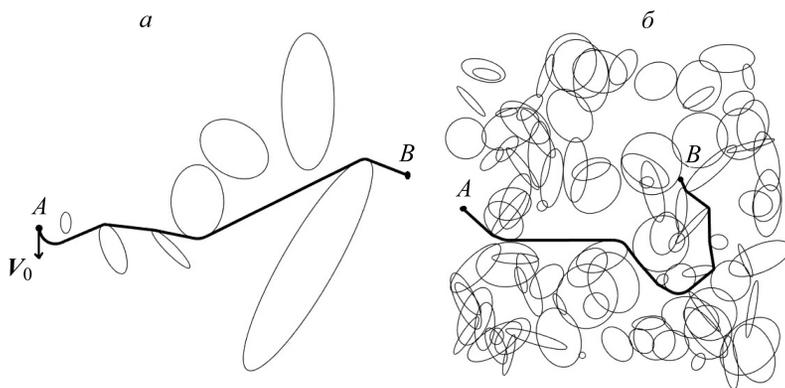


Рис. 5. Требуемая траектория обхода: *a* – семь опасных зон, *б* – сто опасных зон.

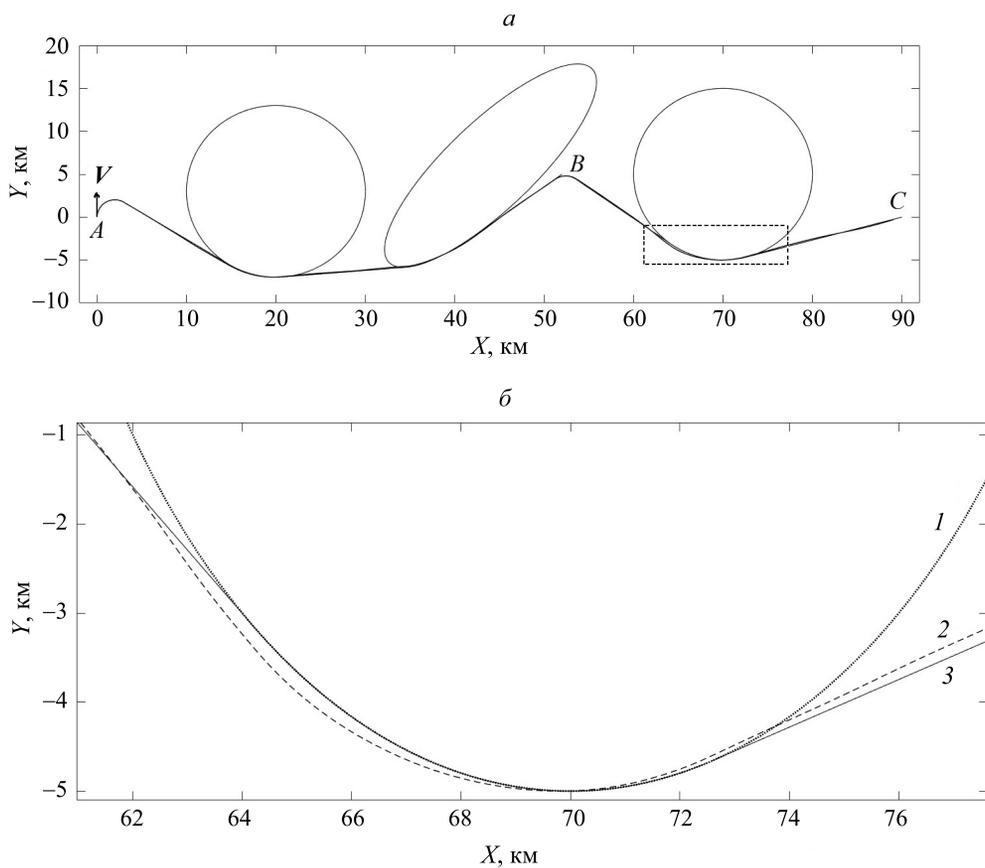


Рис. 6. Траектория обхода опасных зон безынерционным ЛА: *a* – вся траектория, *б* – выделенный участок.

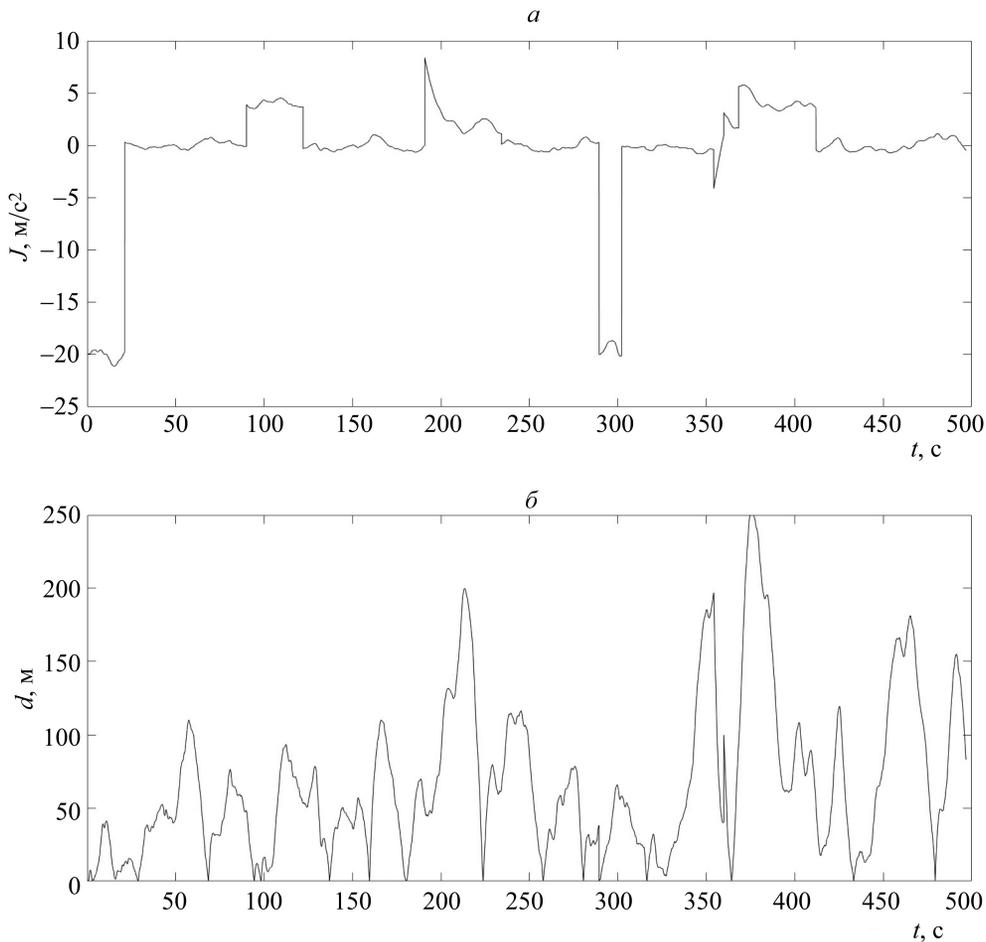


Рис. 7. Зависимость состояния ЛА от времени: *a* – поперечное ускорение, *б* – отклонение от требуемой траектории.

Конфигурация задачи представлена на рис. 6,*a*. Заданы три опасные зоны: две окружностями с радиусом 10 километров и эллипс с полуосями 5 и 16 километров. В начальный момент ЛА находится в точке *A* и скорость направлена по оси *Y*. Ставится задача – прилететь сначала в промежуточную точку *B*, а затем в конечную точку *C*.

На рис. 6,*a* приведены требуемая и реальная траектории облета. Поскольку их сложно различить, на рис. 6,*б* отдельно приведен участок траектории обхода последней окружности, выделенный на рис. 6,*a* рамкой. При этом сама окружность изображена точечной линией 1, требуемая траектория изображена сплошной линией 3, а реальная траектория изображена штриховой линией 2. Зависимость необходимого для реализации полета поперечного ускорения от времени показана на рис. 7,*a*, а на рис. 7,*б* приведена зависимость от времени отклонения ЛА от требуемой траектории облета. Максимальная величина отклонения 250 м, среднее квадратичное отклонение 66 м.

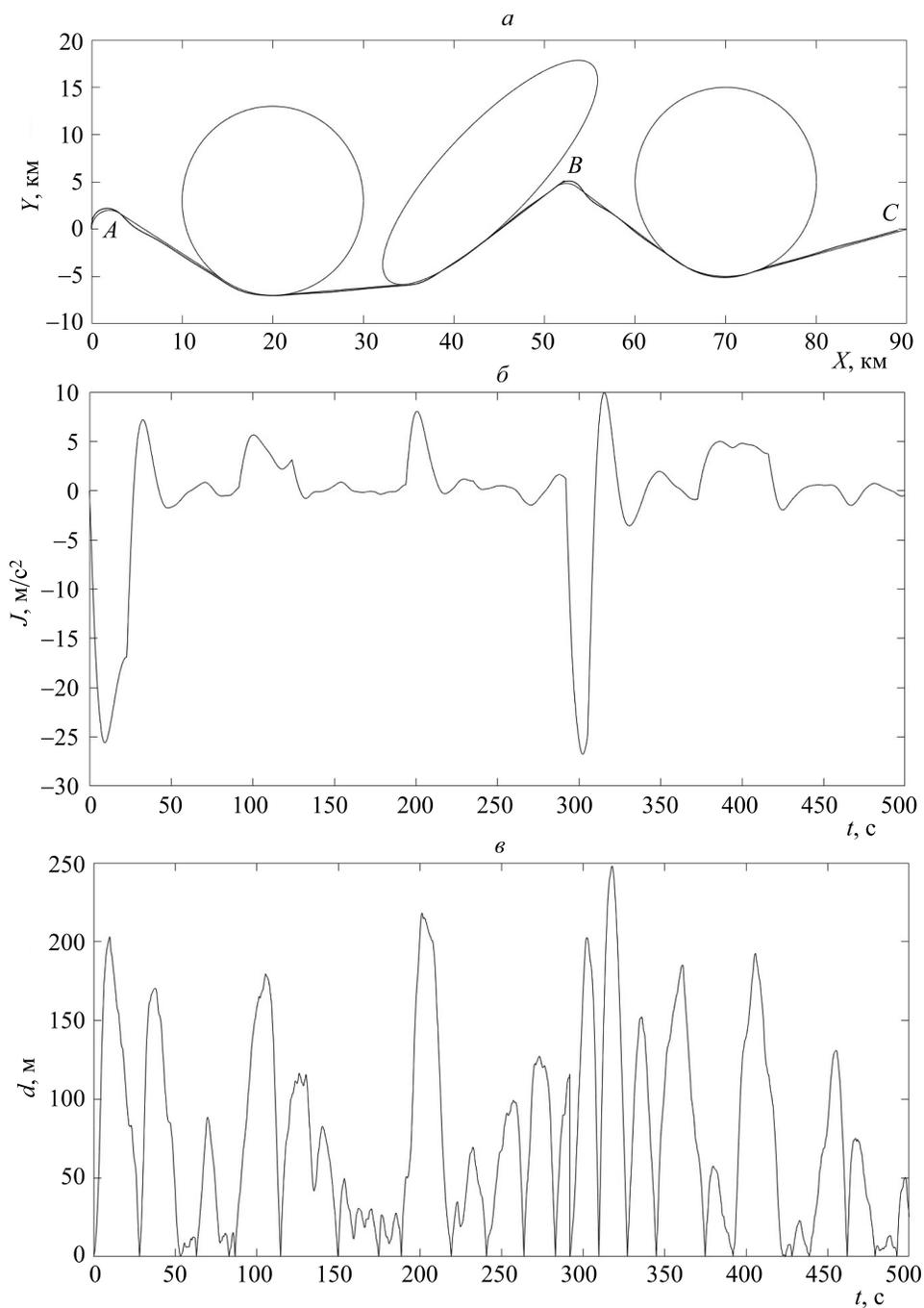


Рис. 8. Обход опасных зон инерционным ЛА: *a* – траектория облета, *б* – зависимость поперечного ускорения от времени, *в* – зависимость отклонения от требуемой траектории от времени.

На третьем этапе решалась та же задача облета, что и выше инерционным ЛА (18) с постоянной времени $T = 4$ секунды. Требуемая и реальная траектории движения для этого случая показаны на рис. 8,а. Зависимость необходимого для реализации полета поперечного ускорения от времени отображена на рис. 8,б, а на рис. 8,в приведена зависимость от времени отклонения ЛА от требуемой траектории облета. Максимальное отклонение в этом случае составляет 250 м, а среднее квадратичное отклонение 76 м.

Проведенный анализ показал, что при управлении инерционным ЛА происходит незначительное ухудшение точности следования траектории при незначительном увеличении перегрузок.

6. Заключение

Проведенный анализ позволяет сделать следующие выводы:

- предложенная система действительно решает задачу построения траектории обхода случайно расположенных опасных зон;
- построенная траектория представляет набор автоматически определяемых отрезков и дуг эллипсов, а сформированный сигнал управления ЛА обеспечивает следование траектории с достаточной точностью, не накладывая ограничений на реализуемый диапазон перегрузок;
- для управления ЛА необходимо измерять координаты его местоположения, величину и направление скорости;
- алгоритм построения требуемой траектории не требует значительных вычислительных ресурсов и при умеренном количестве препятствий может применяться в реальном масштабе времени, в том числе и при изменении конфигурации и числа опасных зон;
- способ может быть использован для обхода опасных зон любой природы, включая зоны природных катаклизмов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Верба В.С.* Авиационные комплексы радиолокационного дозора и наведения. Принципы построения, проблемы разработки и особенности функционирования. М.: Радиотехника, 2014.
2. *Mattei M., Blasi L.* Smooth Flight Trajectory Planning in the Presence of No-Fly Zones and Obstacles // J. Guidance, Control, Dynam. 2010. V. 33. No. 2. P. 454–462.
3. *Ran D., Cochran J.E.* Path Planning and State Estimation for Unmanned Aerial Vehicles in Hostile Environments // J. Guidance, Control, Dynam. 2010. V. 33. No. 2. P. 595–601.
4. *Hwang Y.K., Ahuja N.* A Potential Field Approach to Path Planning // IEEE Trans. Robot. Automat. 1992. V. 8. No. 1. P. 23–32.
5. *Петров А.А., Сирота И.М.* Формирование движений манипуляционного робота при обходе препятствий в условиях ограниченной информации о среде // АИТ. 1983. № 4. С. 29–40.
Petrov A.A., Sirota I.M. Obstacle Avoidance by a Robot Manipulator under Limited Information about the Environment // Autom. Remote Control. 1983. V. 44. No. 4. P. 431–440.
6. *Gates D.J.* Nonlinear Path Following Method // J. Guidance, Control, Dynam. 2010. V. 33. No. 2. P. 321–332.

7. *Medagoga E.D.W., Gibbens P.W.* Synthetic-Waypoint Guidance Algorithm for Following a Desired Flight Trajectory // J. Guidance, Control, Dynam. 2010. V. 33. No. 2. P. 601–606.
8. *Kaminer I., Pascoal A., Xargay E., Novakimyan N., Cao Ch., Dobrokhodov V.* Path Following for Unmanned Aerial Vehicles Using L1 Adaptive Augmentation of Commercial Autopilots Trajectory // J. Guidance, Control, Dynam. 2010. V. 33. No. 2. P. 550–564.
9. *Меркулов В.И., Дрогалин В.В., Канащенко А.И. и др.* Авиационные системы радиоправления. Т. 2. Радиоэлектронные системы наведения / Под ред. А.И. Канащенко и В.И. Меркулова. М.: Радиотехника, 2003.
10. *Кристофидес Н.* Теория графов. Алгоритмический подход. М.: Мир, 1978.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Лазаревым.

Поступила в редакцию 14.09.2017

После доработки 07.06.2018

Принята к публикации 08.11.2018