

© 2019 г. С.В. ИВАНОВ, канд. физ.-мат. наук (sergeyivanov89@mail.ru),
А.И. КИБЗУН, д-р физ.-мат. наук (kibzun@mail.ru)
(Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)),
Н. МЛАДЕНОВИЧ (nenad@mi.sanu.ac.rs)
(Технологический колледж Эмиратов, Абу-Даби, ОАЭ,
Уральский Федеральный университет, Екатеринбург)

ПОИСК С ЧЕРЕДУЮЩИМИСЯ ОКРЕСТНОСТЯМИ ДЛЯ ДВУХЭТАПНОЙ ЗАДАЧИ СТОХАСТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С КВАНТИЛЬНЫМ КРИТЕРИЕМ¹

Рассматривается двухэтапная задача стохастического программирования с билинейной функцией потерь и квантильным критерием. Задача сводится к одноэтапной задаче стохастического программирования с квантильным критерием. Применяется метод выборочных аппроксимаций. Полученная аппроксимирующая задача рассматривается как задача стохастического программирования с дискретным распределением случайных параметров. Проверяются условия сходимости последовательности решений аппроксимирующих задач. С помощью доверительного метода задача сводится к задаче комбинаторной оптимизации, в которой доверительное множество является стратегией оптимизации. Для поиска оптимального доверительного множества адаптируется метод поиска с чередующимися окрестностями. Для решения задачи разработан комбинированный алгоритм, основанный на методе выборочных аппроксимаций, доверительном методе и поиске с чередующимися окрестностями.

Ключевые слова: квантильный критерий, двухэтапная задача, выборочная аппроксимация, поиск с чередующимися окрестностями, доверительный метод.

DOI: 10.1134/S0005231019010045

1. Введение

Двухэтапные задачи стохастического программирования [1, 2] используются для моделирования ситуации, когда лицо, принимающее решение, определяет стратегию оптимизации последовательно на двух этапах. Стратегия первого этапа является детерминированной и определяется до того момента, когда становятся известны реализации случайных параметров, учитываемых при моделировании системы, а выбор стратегии второго этапа зависит от реализации случайных параметров.

Как правило, двухэтапные задачи возникают в экономике. Например, при планировании производства необходимо принять решение об объеме производства и закупаемых ресурсов, принимая во внимание неопределенность

¹ Работа Кибзуна А.И. выполнена в рамках Государственного задания Минобрнауки № 2.2461.2017/4.6. Работа Младеновича Н. выполнена в рамках проекта программно-целевого финансирования BR05236839 «Разработки информационных технологий и систем для стимулирования устойчивого развития личности как одна из основ развития цифрового Казахстана».

спроса на продукцию, а на втором этапе, когда спрос становится известным, принимается решение о ценах на выпущенную продукцию и, возможно, о выпуске дополнительной партии продукции. Другим примером являются транспортные задачи, в которых на первом этапе определяется необходимый размер парка транспортных средств, а на втором этапе по факту спроса на перевозки принимается решение о распределении транспортных средств.

В стохастическом программировании исследуются различные критериальные функции, выражающие качество функционирования системы. Двухэтапные задачи обычно формулируются с критериальной функцией в форме математического ожидания, которая описывает средние потери при функционировании системы. Квантильный критерий выражает потери, которые не могут быть превышены с заданной вероятностью, что делает возможным его применение при необходимости учета рисков.

Задачи стохастического программирования с квантильным критерием тесно связаны с задачами с вероятностными ограничениями [2, 3]. Нетрудно записать задачу с квантильным критерием в форме задачи с вероятностными ограничениями. Однако многие свойства задачи оптимизации функции квантили могут быть получены с помощью исследования именно функции квантили. Свойства непрерывности и выпуклости функции квантили исследованы в [4].

В данной статье рассматривается двухэтапная задача стохастического программирования с билинейной целевой функцией и квантильным критерием [5]. Два алгоритма для решения данной задачи были предложены и исследованы в [5]. Первый алгоритм основан на сведении задачи к задаче смешанного целочисленного программирования. Второй алгоритм использует сведение задачи к последовательности задач выпуклой оптимизации, однако с его помощью может быть найдена только верхняя оценка оптимального решения задачи. Оба предложенных алгоритма испытывают трудности при решении задач большой размерности.

При решении практических задач часто распределение случайных параметров может быть неизвестным, тогда как доступна выборка реализаций случайных параметров. В этом случае может быть построена выборочная оценка критериальной функции задачи. Данный метод называется методом выборочных аппроксимаций. Сходимость метода выборочных аппроксимаций при увеличении объема выборки доказана в [6] для задач с критерием в форме математического ожидания и в [7] — для задач с вероятностными ограничениями. Условия сходимости метода для одноэтапных задач с квантильным критерием были получены в [8], а для двухэтапных задач — в [9]. Метод выборочных аппроксимаций может быть использован для оценки верхних и нижних границ оптимального значения критериальной функции [10]. Другой подход к замене критериальной функции ее аппроксимацией основан на приближенном детерминированном вычислении интегралов [11, 12].

Аппроксимирующая задача, полученная при применении метода выборочных аппроксимаций, может рассматриваться как задача стохастического программирования с дискретным распределением случайных параметров. Задача с дискретным распределением может быть сведена к детерминирован-

ной задаче смешанного целочисленного программирования [13–15]. Однако в случае большой размерности решение полученной задачи может оказаться затруднительным. Для решения задач с квантильным критерием также применяется доверительный метод [4]. В случае дискретного распределения данный метод позволяет свести задачу к задаче комбинаторной оптимизации, в которой выбирается множество реализаций случайного вектора. Следует заметить, что решение получаемой задачи может оказаться не проще, чем решение смешанной целочисленной задачи.

По указанным причинам часто для решения задач получаемого типа используются метаэвристики. В данной статье для решения задачи адаптируется метод поиска с чередующимися окрестностями, впервые предложенный в [16]. Детальное описание различных вариаций метода и обзор публикаций можно найти в [17–19]. Метод основан на использовании различных окрестностей решения и процедуры локального поиска. Отметим, что для локального поиска используется некоторая фиксированная окрестность. Для применения метода нужно выбрать некоторое начальное решение, а в качестве текущей окрестности решения установить наименьшую окрестность. Итерация метода начинается с поиска локально-оптимального решения задачи. Если в результате не удалось улучшить значение целевой функции, то текущая окрестность заменяется на более широкую, в которой выбирается новое решение; в противном случае найденное решение становится текущим и в качестве текущей окрестности устанавливается наименьшая. После этого осуществляется следующая итерация.

В статье предлагается способ конструирования семейства окрестностей доверительного множества. Таким образом, для решения двухэтапной задачи с билинейной функцией потерь и квантильным критерием предлагается комбинированный алгоритм, основанный на методе выборочных аппроксимаций, доверительном методе и поиске с чередующимися окрестностями.

2. Постановка задачи

Рассматривается двухэтапная задача стохастического программирования с квантильным критерием [5].

Пусть случайный вектор $\mathbf{X}$ определен на вероятностном пространстве $(\mathbb{R}^m, \mathcal{L}(\mathbb{R}^m), \mathbf{P})$, где $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$ — лебегова σ -алгебра подмножеств $\mathbb{R}^m$. Предполагается, что случайный вектор $\mathbf{X}$ распределен по стандартному нормальному закону, т.е. $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}(0, I)$, где I — единичная ковариационная матрица. Для упрощения считаем, что $\mathbf{X}(x) = x$ для всех $x \in \mathbb{R}^m$.

Пусть множество U допустимых стратегий u первого этапа является выпуклым полиэдром, т.е.

$$U \triangleq \{u \in \mathbb{R}^n : A_0 u \leq \mathbf{b}_0\},$$

где $A_0 \in \mathbb{R}^{k \times n}$ — матрица и $\mathbf{b}_0 \in \mathbb{R}^k$ — вектор. Будем предполагать, что множество U ограничено.

Определим функцию потерь $(u, x) \mapsto \Phi(u, x)$, зависящую от стратегии первого этапа $u \in U \subset \mathbb{R}^n$ и от реализации x случайного вектора $\mathbf{X}$, так:

$$(1) \quad \Phi(u, x) \triangleq \mathbf{c}_0^\top u + x^\top A_1 u + \inf_{y \in Y(u, x)} \mathbf{c}_1^\top y,$$

где y — стратегия второго этапа, принадлежащая множеству

$$(2) \quad Y(u, x) \triangleq \left\{ y \in \mathbb{R}^l : x^\top A_{2i} u + \mathbf{c}_{2i}^\top u + \mathbf{b}_i^\top y \geq \mathbf{a}_{3i}^\top x + d_i, \ i = \overline{1, s}, \ y \geq 0 \right\},$$

$\mathbf{c}_0 \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{c}_1 \in \mathbb{R}^l$, $\mathbf{c}_{2i} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^l$, $\mathbf{a}_{3i} \in \mathbb{R}^m$ — детерминированные векторы, $A_1, A_{2i} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ — матрицы, $d_i \in \mathbb{R}^1$. Если $Y(u, x) = \emptyset$ для пары $(u, x) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, то по определению полагаем, что $\Phi(u, x) = +\infty$.

Для фиксированного $\varphi \in \mathbb{R}^1$ определим функцию вероятности $u \mapsto P_\varphi(u)$ по правилу

$$(3) \quad P_\varphi(u) \triangleq \mathbf{P} \left\{ \mathbf{c}_0^\top u + \mathbf{X}^\top A_1 u + \overline{\Phi}(u, \mathbf{X}) \leq \varphi \right\},$$

где

$$(4) \quad \overline{\Phi}(u, x) \triangleq \begin{cases} \inf_{y \in Y(u, x)} \mathbf{c}_1^\top y, & \text{если } Y(u, x) \neq \emptyset, \\ +\infty, & \text{если } Y(u, x) = \emptyset. \end{cases}$$

Функция квантили $\varphi_\alpha(\cdot) : U \rightarrow (-\infty, +\infty]$ определяется как

$$(5) \quad \varphi_\alpha(u) \triangleq \min \left\{ \varphi \in \mathbb{R}^1 : P_\varphi(u) \geq \alpha \right\},$$

где $\alpha \in (0, P^*)$ — фиксированная вероятность, где

$$P^* \triangleq \sup_{u \in U} \mathbf{P}\{Y(u, \mathbf{X}) \neq \emptyset\}.$$

Сформулируем задачу первого этапа в виде

$$(6) \quad \varphi_\alpha \triangleq \inf_{u \in U} \varphi_\alpha(u), \quad U_\alpha \triangleq \text{Arg min}_{u \in U} \varphi_\alpha(u).$$

Задача (6) является двухэтапной задачей стохастического программирования с квантильным критерием.

Будем считать, что выполнено следующее предположение.

Предположение 1. Векторы $\mathbf{c}_1$ и $\mathbf{b}_i$, $i = \overline{1, s}$, являются такими, что множество

$$(7) \quad V \triangleq \{v \in \mathbb{R}^s : B^\top v \leq \mathbf{c}_1, \ v_i \geq 0, \ i = \overline{1, s}\}$$

компактно, где

$$B \triangleq \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1^\top \\ \vdots \\ \mathbf{b}_s^\top \end{pmatrix}.$$

3. Сведение к одноэтапной задаче

Рассмотрим задачу второго этапа (1). Используя обозначение

$$(8) \quad \bar{a}(u, x) \triangleq \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{31}^\top x - u^\top A_{21}^\top x + d_1 - \mathbf{c}_{21}^\top u \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{3s}^\top x - u^\top A_{2s}^\top x + d_s - \mathbf{c}_{2s}^\top u \end{pmatrix},$$

множество (2) может быть представлено как

$$Y(u, x) \triangleq \left\{ y \in \mathbb{R}^l : By \geq \bar{a}(u, x), y \geq 0 \right\}.$$

Согласно теории двойственности [1] справедливо, что

$$(9) \quad \bar{\Phi}(u, x) = \max \left\{ \bar{a}^\top(u, x)v : B^\top v \leq \mathbf{c}_1, v \geq 0 \right\},$$

если максимум в (9) конечен, где через $v \in \mathbb{R}^s$ обозначена двойственная переменная. Для каждой фиксированной пары $(u, x) \in U \times \mathbb{R}^m$ задача (9) является задачей линейного программирования. Заметим, что предположение 1 гарантирует конечность $\bar{\Phi}(u, x)$. Кроме того, максимум в (9) достигается в некоторой вершине V . Таким образом, при выполнении предположения 1 значение $\bar{\Phi}(u, x)$ может быть записано в форме

$$(10) \quad \bar{\Phi}(u, x) = \max_{j=\overline{1, J}} \bar{a}^\top(u, x)v^j,$$

где $v^j, j = \overline{1, J}$, — вершины выпуклого ограниченного полиэдра V .

Подставляя (10) в (1), получаем

$$\Phi(u, x) = \max_{j=\overline{1, J}} \Phi_j(u, x),$$

где

$$\Phi_j(u, x) \triangleq \mathbf{c}_0^\top u + x^\top A_1 u + \bar{a}^\top(u, x)v^j.$$

Данное представление $\Phi(u, x)$ не содержит в явном виде стратегии второго этапа. Это значит, что задача (6) сведена к одноэтапной задаче стохастического программирования с квантильным критерием

$$(11) \quad \varphi_\alpha = \inf_{u \in U} \min \left\{ \varphi \in \mathbb{R}^1 : \mathbf{P} \left\{ \max_{j=\overline{1, J}} \Phi_j(u, x) \leq \varphi \right\} \geq \alpha \right\}.$$

Поскольку функция $(u, x) \mapsto \Phi(u, x)$ измерима по x для всех u и непрерывна по u для всех x , то минимумы в (11) и в (6) достигаются, если множество U компактно [4]. Отсюда следует, что $U_\alpha \neq \emptyset$.

4. Выборочная аппроксимация

Пусть дана последовательность $\{\mathbf{X}^\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ независимых стандартных нормальных случайных векторов. Будем считать, что случайная последовательность определена на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}')$, которое существует по теореме Колмогорова.

Функция вероятности может быть оценена как частота события $\{\Phi(u, \mathbf{X}) \leq \varphi\}$:

$$P_\varphi^{(N)}(u) \triangleq \frac{1}{N} \sum_{\nu=1}^N \chi_{(-\infty, 0]}(\Phi(u, \mathbf{X}^\nu) - \varphi),$$

где $\chi_A(x) = 1$, если $x \in A$, и $\chi_A(x) = 0$, если $x \notin A$.

Используя оценку функции вероятности, так же можно оценить функцию квантили

$$(12) \quad \varphi_\alpha^{(N)}(u) \triangleq \min \left\{ \varphi : P_\varphi^{(N)}(u) \geq \alpha \right\}.$$

Таким образом, выборочная аппроксимация задачи (6) записывается в виде:

$$(13) \quad \begin{aligned} \varphi_N &\triangleq \inf_{u \in U} \varphi_\alpha^{(N)}(u), \quad N \in \mathbb{N}, \\ U_N &\triangleq \text{Arg} \min_{u \in U} \varphi_\alpha^{(N)}(u), \quad N \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Теорема о сходимости почти наверное (п.н.) решений аппроксимирующих задач для более общей задачи была доказана в [8].

Теорема 1 [8]. Пусть выполнены условия:

- (i) *множество U компактно и непусто;*
- (ii) *функция $(u, x) \mapsto \Phi(u, x)$ является измеримой по совокупности аргументов и полунепрерывной снизу по $u \in U$;*
- (iii) *для всех $\varepsilon > 0$ существует пара $(\tilde{u}, \tilde{\varphi})$ такая, что $|\tilde{\varphi} - \varphi_\alpha| \leq \varepsilon$ и $P_{\tilde{\varphi}}(\tilde{u}) > \alpha$.*

Тогда $\lim_{N \rightarrow \infty} \varphi_N = \varphi_\alpha$ ($\mathbf{P}'$ -п.н.), и каждая предельная точка $\bar{u}$ последовательности $\{u_N\}_{N \in \mathbb{N}}$, где $u_N \in U_N$, $N \in \mathbb{N}$, является оптимальным решением (6), где $\bar{u} \in U_\alpha$ ($\mathbf{P}'$ -п.н.).

Условие (ii) теоремы 1 выполнено, если выполнено предположение 1.

Условие (iii) теоремы 1 выполнено, потому что плотность стандартного нормального распределения строго положительна.

Рассмотрим задачу (13) для фиксированной реализации $\{x^\nu\}_{\nu=1}^N$ выборки $\{\mathbf{X}^\nu\}_{\nu=1}^N$. В этом случае задача (13) может быть рассмотрена как одноэтапная задача стохастического программирования с квантильным критерием и дискретным распределением случайных параметров:

$$(14) \quad \begin{aligned} \varphi_N &= \min_{u \in U} \min \left\{ \varphi \in \mathbb{R}^1 : \mathbf{P} \left\{ \Phi(u, \xi^N) \leq \varphi \right\} \geq \alpha \right\}, \\ U_N &= \text{Arg} \min_{u \in U} \min \left\{ \varphi \in \mathbb{R}^1 : \mathbf{P} \left\{ \Phi(u, \xi^N) \leq \varphi \right\} \geq \alpha \right\}, \end{aligned}$$

где дискретный случайный вектор обозначен через ξ^N . Распределение случайного вектора ξ^N сосредоточено на множестве $\mathcal{X} \triangleq \{x^\nu : \nu = \overline{1, N}\}$. Поскольку случайный вектор $\mathbf{X}$ распределен непрерывно, то $\mathbf{X}^{\nu_1} \neq \mathbf{X}^{\nu_2}$ ($\mathbf{P}'$ -п.н.) для $\nu_1 \neq \nu_2$. Поэтому будем считать, что $x^{\nu_1} \neq x^{\nu_2}$ для $\nu_1 \neq \nu_2$. Тогда $\mathbf{P}\{\xi^N = x^\nu\} = 1/N$, $\nu = \overline{1, N}$. В (14) можно написать $\min$ вместо $\inf$, потому что минимум достигается в случае компактного множества U [4].

5. Применение доверительного метода

Рассмотрим семейство множеств

$$\mathcal{F}_\alpha \triangleq \{S \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m) : \mathbf{P}\{\xi^N \in S\} \geq \alpha\}$$

и функцию максимума $\psi(\cdot) : \mathcal{L}(\mathbb{R}^m) \times U \rightarrow (-\infty, +\infty]$, определенную условием

$$(15) \quad \psi(S, u) \triangleq \sup_{x \in S} \Phi(u, x).$$

Множества, принадлежащие семейству $\mathcal{F}_\alpha$, называются доверительными.

Согласно доверительному методу, описанному в [4], задача минимизации функции квантили (14) эквивалентна минимаксной задаче

$$(16) \quad \varphi_N = \min_{u \in U, S \in \mathcal{F}_\alpha} \psi(S, u), \quad (u_N, S_N) = \arg \min_{u \in U, S \in \mathcal{F}_\alpha} \psi(S, u).$$

Введем обозначение

$$(17) \quad \bar{\psi}(S) \triangleq \inf_{u \in U} \psi(S, u), \quad u^S \triangleq \arg \min_{u \in U} \psi(S, u).$$

Поскольку распределение ξ^N дискретно, хотя бы одно оптимальное доверительное множество содержится в семействе всех подмножеств $\mathcal{X}$ с мерой меньшей или равной α . Обозначим данное семейство множеств через $\mathcal{X}_\alpha \triangleq \{S \in \mathcal{F}_\alpha : S \subset \mathcal{X}\}$.

Таким образом, можно сформулировать задачу (16) в виде

$$(18) \quad \varphi_N = \min_{S \in \mathcal{X}_\alpha} \bar{\psi}(S), \quad S_N \triangleq \arg \min_{S \in \mathcal{X}_\alpha} \bar{\psi}(S).$$

Легко видеть, что $\bar{\psi}(S)$ и u^S для $S \in \mathcal{X}_\alpha$ могут быть найдены как решение (φ, u) задачи линейного программирования

$$(19) \quad \bar{\psi}(S) = \min_{\varphi \in \mathbb{R}^1, u \in U} \{\varphi : \Phi_j(u, x) \leq \varphi, x \in S, j = \overline{1, J}\}.$$

Поиск точного решения задачи (18) требует вычисления $\bar{\psi}(S)$ для всех $S \in \mathcal{X}_\alpha$. Однако, учитывая структуру оптимального доверительного множества, количество перебираемых множеств может быть сокращено. Структура оптимального доверительного множества может быть определена с помощью

подстановки неизвестного оптимального решения (φ_N, u_N) в ограничения задачи (19). Совершив указанную подстановку, можно заключить, что оптимальное доверительное множество имеет форму

$$S_N = \{x \in \mathcal{X} : \Phi_j(u_N, x) \leq \varphi, j = \overline{1, J}\}.$$

Таким образом, оптимальное доверительное множество удовлетворяет условию $\text{Conv}(S_N) \cap \mathcal{X} = S_N$. Это значит, что никакие точки из $\mathcal{X} \setminus S_N$ не принадлежат выпуклой оболочке (Conv) множества S_N . Поэтому можно перебирать только множества, обладающие данным свойством.

Известно, что так называемое α -ядро вероятностной меры является подмножеством оптимального доверительного множества для исходной задачи (6) [4]. Для стандартного нормального распределения α -ядро может быть определено как

$$K_\alpha \triangleq \{x : \|x\| \leq \rho_\alpha\},$$

где ρ_α — квантиль уровня α стандартного нормального распределения и $\|\cdot\|$ — евклидова норма. По этой причине будем рассматривать только доверительные множества, удовлетворяющие условию $K_\alpha \subset S$.

α -Ядро также позволяет найти нижнюю оценку оптимального значения критериальной функции исходной задачи (6). Доказано в [4], что

$$\bar{\psi}(K_\alpha) \leq \varphi_\alpha.$$

6. Поиск с чередующимися окрестностями

Даже принимая во внимание структуру оптимального доверительного множества, поиск точного решения задачи (18) требует значительных вычислений. Поэтому для решения задачи могут быть использованы различные метаэвристики. Предлагается использовать модификацию поиска с чередующимися окрестностями [16, 17].

6.1. Поиск начального решения

Для успешного применения поиска с чередующимися окрестностями полезно иметь хорошее начальное решение. Опишем процедуру, предлагаемую для поиска начального решения.

Известно [4, теорема 3.13], что верхняя оценка $\bar{\psi}(S_R)$, соответствующая доверительному шару $S_R \triangleq \{x : \|x\| \leq R\}$ с мерой α , стремится к оптимальному значению критериальной функции исходной задачи при $\alpha \rightarrow 1$, если функция потерь квазивыпукла по x и распределение случайного вектора является стандартным нормальным.

Предлагается следующий алгоритм поиска начального решения задачи.

Алгоритм 1.

1. Найти $\varphi^R \triangleq \bar{\psi}(\bar{S}_R)$ и $u^{\bar{S}_R}$ как решение задачи линейного программирования (19), где $\bar{S}_R \triangleq S_R \cap \mathcal{X}$.

2. Вычислить $\bar{\varphi} \triangleq \varphi_\alpha^{(N)}(u^{\bar{S}_R})$.

3. Найти начальное доверительное множество S^0 и начальную стратегию u^0 , обеспечивающие значение критериальной функции φ^0 , как

$$S^0 \triangleq \left\{ x \in \mathcal{X} : \Phi(u^{\bar{S}_R}, x) \leq \bar{\varphi} \right\},$$

$$u^0 \triangleq \arg \min_{u \in U} \psi(S^0, u), \quad \varphi^0 \triangleq \bar{\psi}(S^0).$$

Несмотря на то что множество S_R обычно обеспечивает хорошую верхнюю оценку φ_N , алгоритм 1 позволяет улучшить эту границу, поскольку множество S^0 лучше, чем S_R , и поэтому $\varphi^0 \leq \psi(\bar{S}_R)$.

6.2. Алгоритм

Для применения поиска с чередующимися окрестностями необходимо определить структуру окрестностей. Рассмотрим некоторое доверительное множество $S \subset \mathcal{X}$. Определим следующие множества:

$$S^- \triangleq \{x \in S : \Phi(u^S, x) = \bar{\psi}(S)\},$$

$$S^+ \triangleq \bigcup_{j \in J} \text{Arg} \min_{x \in \mathcal{X} \setminus S} \left\{ \Phi_j(u^S, x) : \max_{j' = \overline{1, n}, j' \neq j} \Phi_{j'}(u^S, x) \leq \bar{\psi}(S) \right\}.$$

Множество S^- состоит из реализаций $x \in S$, максимизирующих $\Phi(u^S, x)$. Чтобы получить новое доверительное множество, исключим из доверительного множества точку, принадлежащую S^- , и включим точку, принадлежащую S^+ . Чтобы минимизировать следующее значение $\psi(S)$, в доверительное множество включаются точки, минимизирующие $\Phi_j(u^S, x)$.

Таким образом, будут использоваться следующие окрестности доверительного множества S :

$$O_1(S) \triangleq \{S' : S' = (S \setminus \{\bar{x}\}) \cup \{\tilde{x}\}, \bar{x} \in S^-, \tilde{x} \in S^+\},$$

$$O_{r+1}(S) \triangleq \bigcup_{S' \in O_r(S)} O_1(S'), \quad r \in \mathbb{N}.$$

Доверительное множество S называется локально-оптимальным, если $\bar{\psi}(S) \leq \bar{\psi}(S')$ для всех $S' \in O_1(S)$.

Опишем поиск с чередующимися окрестностями для задачи (18).

Алгоритм 2.

1. Выбрать начальное доверительное множество S , например $S := S^0$. Установить $r := 1$.

2. Пока $r < r_{\max}$, повторять следующие шаги:

а) случайным образом получить множество $S' \in O_r(S)$;

б) установить $S'' \triangleq \{x \in \mathcal{X} : \Phi(u^{S'}, x) \leq \bar{\psi}(S')\}$;

в) найти локальный оптимум S''' , применяя локальный поиск с S'' в качестве начального решения;

г) если $\bar{\psi}(S'') < \bar{\psi}(S)$, то установить $S := S''$ и $r := 1$, иначе $r := r + 1$.

Применяя алгоритм 2, получаем доверительное множество S . Стратегию u^S можно взять в качестве приближенного решения задачи (13).

Для поиска решения, близкого к оптимальному решению исходной задачи (6), предлагается следующий алгоритм, основная идея которого состоит в увеличении объема выборки.

Алгоритм 3.

1. Выбрать начальное значение $N \in \mathbb{N}$ и шаг $\Delta \in \mathbb{N}$. Получить реализации $x^1, \dots, x^N$.
2. Найти стратегию u_N , φ_N , применяя алгоритмы 1 и 2.
3. Получить реализации $x^{N+1}, \dots, x^{N+\Delta}$. Установить $N := N + \Delta$.
4. Найти решение u_N , φ_N задачи (13), применяя алгоритм 2 с начальным доверительным множеством

$$\left\{ x \in \mathcal{X} : \Phi(u_{N-\Delta}, x) \leq \varphi_\alpha^{(N)}(u_{N-\Delta}) \right\}.$$

5. Найти оценку значения $\varphi_\alpha(u_N)$ функции квантили (5) в виде

$$\hat{\varphi}_\alpha(u_N) \triangleq \varphi_\alpha^{(M)}(u_N),$$

где $M \gg N$.

6. Если выполнен критерий остановки, считать u_N приближенным решением (6). В противном случае перейти к шагу 3.

В приведенном алгоритме 3 различные критерии остановки могут быть использованы, например $|\hat{\varphi}_\alpha(u_N) - \hat{\varphi}_\alpha(u_{N-\Delta})| \leq \varepsilon$ или $N \geq N_{\max}$.

7. Численный эксперимент

Рассмотрим задачу для следующих данных:

$$c_0 = \begin{pmatrix} -0,4 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad c_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad C_{2i} = 0, \quad i = \overline{1, s}, \quad s = 2,$$

$$A_1 = 0,1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_{21} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_{22} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 2 & 6 & 0 \end{pmatrix},$$

$$a_{31} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_{32} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2,5 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -2,5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad d_1 = 0, \quad d_2 = 0, \quad \alpha = 0,8.$$

Вычисления проводились на ЭВМ AMD Athlon (tm) 64 Processor 3500+, 2,21 ГГц, 512 МБ ОЗУ. Результат применения алгоритма 3 представлен в табл. 1.

Таблица 1. Результаты применения поиска с чередующимися окрестностями

	Начальное решение ($N = 500$)	$N = 500$	$N = 1000$	$N = 1500$
φ_N	10,0545	6,5185	7,5775	8,1310
$\hat{\varphi}_\alpha(u_N)$	10,5598	8,1974	8,5239	8,2136
u_{N1}	0	0	0,1699	0,0121
u_{N2}	1,1438	1,2813	1,3774	1,2618
u_{N3}	1,0492	0,2912	0,1041	0,2741
Время, с	0,16	70,71	220,53	2072,95

Таблица 2. Результаты применения метода имитации отжига

	Начальное решение ($N = 500$)	$N = 500$	$N = 1000$	$N = 1500$
φ_N	10,0545	6,5185	7,5775	8,1178
$\hat{\varphi}_\alpha(u_N)$	10,5598	8,1974	8,5239	8,4959
u_{N1}	0	0	0,1699	0,0483
u_{N2}	1,1438	1,2813	1,3774	1,1891
u_{N3}	1,0492	0,2912	0,1041	0,5515
Время, с	0,16	447,93	1537,63	2739,04

На каждом шаге оценивалось значение исходной функции квантили $\varphi_\alpha(u^N)$ по выборке $\{\mathbf{X}^\nu\}_{\nu=1}^M$ объема $M = 10^6$. Можно заметить по табл. 1, что лучшее решение было получено для выборки объема 500. Появлению данного результата способствовали две причины. Во-первых, решалась не исходная задача, а ее аппроксимация. Во-вторых, в случае большого объема выборки точное решение задачи становится затруднительным.

Сформулированная задача также была решена с помощью процедуры, аналогичной алгоритму 3, но в которой аппроксимирующая задача (14) решалась с помощью метода имитации отжига. Детальное описание этого метода выходит за рамки статьи. Полученные результаты приведены в табл. 2, из которых видно, что описанный в статье поиск с чередующимися окрестностями позволяет найти решение за меньшее время. При этом для $N = 500$ и $N = 1000$ найдено то же решение, а при $N = 1500$ — близкое решение, что косвенно свидетельствует о возможности поиска близкого к оптимальному решения с помощью разработанного алгоритма.

Чтобы найти точное решение аппроксимирующей задачи, задача (14) была сведена к смешанной целочисленной задаче линейного программирования с помощью метода, предложенного в [14]. Для увеличения скорости поиска использовалось описанное выше свойство α -ядра. Эквивалентная задача решалась с помощью CPLEX. Было получено решение с значением критериальной функции $\varphi_N = 8,1138$ при $N = 1500$. Вычисления длились 7502 секунды.

Таким образом, видно, что с помощью предложенного алгоритма может быть найдено хорошее решение задачи. При этом алгоритму требуется меньшее время, чем время вычислений с помощью CPLEX и метода имитации отжига.

Кроме того, найдена нижняя оценка φ_α , равная $\bar{\psi}(K_\alpha) = 5,7352$.

8. Заключение

В статье была исследована двухэтапная задача стохастического программирования с билинейной целевой функцией и квантильным критерием. Предложен алгоритм решения задачи. Данный алгоритм основан на доверительном методе, поиске с чередующимися окрестностями и методе выборочных аппроксимаций. Проверены условия, гарантирующие сходимость выборочных аппроксимаций исследуемой задачи. Численный эксперимент подтвердил полученные теоретические результаты. Дальнейшими направлениями работы являются адаптация поиска с чередующимися окрестностями для более широкого класса задач стохастического программирования и применение других метаэвристик для решения исследуемой задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Birge J., Louveaux F.* Introduction to Stochastic Programming. N.Y.: Springer-Verlag, 1997.
2. *Shapiro A., Dentcheva D., Ruszczyński A.* Lectures on Stochastic Programming. Modeling and Theory. Philadelphia: Society for Industrial and Appl. Math. (SIAM), 2009.
3. *Beraldi P., Ruszczyński A.* A Branch and Bound Method for Stochastic Integer Problems under Probabilistic Constraints // Optim. Method. Softw. 2002. V. 17. No. 3. P. 359–382.
4. *Kibzun A.I., Kan Y.S.* Stochastic Programming Problems with Probability and Quantile Functions. Chichester — N.Y. — Brisbane — Toronto — Singapore: John Wiley & Sons, 1996.
5. *Kibzun A.I.* Comparison of Two Algorithms for Solving a Two-Stage Bilinear Stochastic Programming Problem with Quantile Criterion // Appl. Stochast. Model. Business Industry. 2015. V. 31. No. 6. P. 862–874.
6. *Artstein Z., Wets R.J.-B.* Consistency of Minimizers and the SLLN for Stochastic Programs // J. Convex Anal. 1996. V. 2. P. 1–17.
7. *Pagnoncelli B.K., Ahmed S., Shapiro A.* Sample Average Approximation Method for Chance Constrained Programming: Theory and Applications // J. Optim. Theory Appl. 2009. V. 142. P. 399–416.
8. *Иванов С.В., Кибзун А.И.* О сходимости выборочных аппроксимаций задач стохастического программирования с вероятностными критериями // АИТ. 2018. № 2. С. 19–35.
Ivanov S.V., Kibzun A.I. On the Convergence of Sample Approximations for Stochastic Programming Problems with Probabilistic Criteria // Autom. Remote Control. 2018. V. 79. No. 2. P. 216–228.
9. *Иванов С.В., Кибзун А.И.* Выборочная аппроксимация двухэтапной задачи стохастического линейного программирования с квантильным критерием // Тр. Ин-та мат. и механики УрО РАН. 2017. Т. 23. № 3. С. 134–143.
10. *Guigues V., Juditsky A., Nemirovski A.* Non-asymptotic Confidence Bounds for the Optimal Value of a Stochastic Program // Optim. Method. Softw. 2017. V. 32. No. 5. P. 1033–1058.
11. *Lepp R.* Approximate Solution of Stochastic Programming Problems with Recourse // Kybernetika. 1987. V. 23. No. 6. P. 476–482.
12. *Lepp R.* Approximation of the Quantile Minimization Problem with Decision Rules // Optim. Method. Softw. 2002. V. 17. No. 3. P. 505–522.

13. *Benati S., Rizzi R.* A Mixed Integer Linear Programming Formulation of the Optimal Mean/Value-at-Risk Portfolio Problem // *Eur. J. Oper. Res.* 2007. V. 176. No. 1. P. 423–434.
14. *Норкин В.И., Кибзун А.И., Наумов А.В.* Сведение задач двухэтапной вероятностной оптимизации с дискретным распределением случайных данных к задачам частично целочисленного программирования // *Кибернетика и системный анализ.* 2014. Т. 50. № 5. С. 34–48.
Norkin V.I., Kibzun A.I., Naumov A.V. Reducing Two-Stage Probabilistic Optimization Problems with Discrete Distribution of Random Data to Mixed-Integer Programming Problems // *Cybernet. Syst. Ana.* 2014. V. 50. No. 5. P. 679–692.
15. *Ruszczynski A.* Probabilistic Programming with Discrete Distributions and Precedence Constrained Knapsack Polyhedra // *Math. Program.* 2002. V. 93. P. 195–215.
16. *Mladenović N., Hansen P.* Variable Neighborhood Search // *Comput. Oper. Res.* 1997. V. 24. No. 11. P. 1097–1100.
17. *Hansen P., Mladenović N., Pérez J.A.M.* Variable Neighbourhood Search: Methods and Applications // *Ann. Oper. Res.* 2010. V. 175. No. P. 367–407.
18. *Hansen P., Mladenović N.* Variable Neighborhood Search / *Martí R., Pardalos P., Resende M. (eds.), Handbook of Heuristics.* Cham: Springer, 2016.
19. *Hansen P., Mladenović N., Todosijević R., Hanafi S.* Variable Neighborhood Search: Basics and Variants // *EURO J. Comput. Optim.* 2017. V. 5. No. 5. P. 423–454.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Б.М. Миллером.

Поступила в редакцию 15.03.2018

После доработки 15.08.2018

Принята к публикации 08.11.2018