

© 2019 г. А.А. ГАЛЯЕВ, чл.-корр. РАН (galaev@ipu.ru),
П.В. ЛЫСЕНКО (pashlys@yandex.ru),
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

ОПТИМАЛЬНОЕ ПО ЭНЕРГИИ УПРАВЛЕНИЕ ГАРМОНИЧЕСКИМ ОСЦИЛЛЯТОРОМ¹

Решается задача оптимального управления гармоническим осциллятором. В качестве критерия оптимизации выбрано значение энергии осциллятора в конечный момент времени. Находятся оптимальное управление и оптимальное значение энергии как функции этого момента времени. Полученный результат сравнивается с решением задачи оптимального быстрогодействия при приведении осциллятора в состояние покоя.

Ключевые слова: оптимальное управление, принцип максимума Понтрягина, гармонический осциллятор.

DOI: 10.1134/S0005231019010021

1. Введение

Решение задачи оптимального управления гармоническим осциллятором является одним из важнейших и показательных результатов, полученных в теории оптимального управления. В данной статье исследуются задачи оптимального управления осциллятором, изначально находящимся в состоянии покоя, по критерию, максимизирующему конечную энергию системы в фиксированный момент времени T . Критерий может быть записан в интегральном виде

$$(1.1) \quad J = E(T) = \int_0^T \frac{dE}{dt} dt \rightarrow \max.$$

Известно, что эта задача схожа с задачей быстрогодействия D.W. Bushaw, описанной в [1], однако до сих пор не рассматривалась, хотя ее решение может представлять научный и практический интерес. Кроме того, в статье будет произведено сравнение оптимальных решений в обеих указанных задачах.

До открытия принципа максимума Понтрягина задача быстрогодействия для приведения гармонического осциллятора в нулевую точку представляла собой серьезное испытание для математиков того времени. Полученное в диссертации D.W. Bushaw 1952 г. решение этой задачи было настолько громоздким, что Р.В. Гамкрелидзе в [2] написал: “Результат, без доказательства,

¹ Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-08-01285 а).

достиг Москвы в 1953 г., и два ведущих специалиста в области (управления), в Научно-исследовательском институте системных исследований АН СССР, не смогли восстановить (получить) доказательство”.

Задачи управления как одиночным осциллятором, так и группой осцилляторов привлекали внимание исследователей по причине простоты постановок и сложности получаемых решений.

В [1] приведено одно из первых решений задачи быстрогодействия для приведения осциллятора в нулевую точку при симметричном двустороннем ограничении на управление с помощью принципа максимума Понтрягина, основанное на анализе фазовых траекторий системы. В [3] на фазовой плоскости приводится вид всех оптимальных траекторий, они имеют форму спирали с конечным числом переключений. Однако значение функционала как функции начального положения осциллятора не приводится. Аналитическое решение для программного управления задачи быстрогодействия одиночным осциллятором получено в [4], где был исследован случай воздействия ограниченного одностороннего управления и решена задача оптимального управления осциллятором с целью его полной остановки по двум критериям качества: по критерию минимального времени и критерию минимума импульса, переданного системе управляющим устройством.

Задача управления несколькими осцилляторами описана академиком Ф.Л. Черноусько в [5]. Там же доказана управляемость системы, состоящей из n осцилляторов, и приведен алгоритм решения для задачи симметричного разгона двух маятников. Аналитического решения в общем виде получить не удалось. Для системы несинхронных маятников в [6] получен алгоритм решения задачи оптимального быстрогодействия.

Помимо критерия быстрогодействия, наиболее популярными критериями являются

$$J_k = \int_0^T |u(t)|^k dt, \quad k = 1, 2.$$

Критерий J_1 отвечает минимуму переданного системе импульса, а J_2 – минимальному расходу энергии при управлении.

Отдельный класс задач составляют задачи построения областей достижимости для управляемых систем [7]. Граничные точки множества достижимости для одиночного осциллятора могут быть получены вследствие решения задачи оптимального управления с фиксированным временем и одной из обобщенных координат по критерию максимума другой координаты.

2. Постановка задачи оптимального управления

Рассматривается линейный осциллятор, управляемый с помощью ограниченной по величине силы. Уравнения динамики системы имеют вид

$$(2.1) \quad \begin{cases} \dot{q}(t) = p(t), \\ \dot{p}(t) = -\omega^2 q(t) + u(t), \end{cases}$$

где q – положение маятника, а p – его импульс, ω – частота колебаний.

Считаем, что на скалярное управление (силу) наложено симметричное ограничение

$$|u| \leq \varepsilon.$$

Поскольку в начальный момент осциллятор покоится, то начальные условия для (2.1) нулевые:

$$(2.2) \quad \begin{aligned} q(0) &= 0, \\ p(0) &= 0. \end{aligned}$$

Требуется найти оптимальный закон управления $u^*(t)$ такой, что по решению системы (2.1) с начальными условиями (2.2) достигается максимум критерия (1.1).

3. Решение задачи

3.1. Принцип максимума

Известно, что энергия осциллятора равна

$$E(t) = \frac{\omega^2 q(t)^2}{2} + \frac{p(t)^2}{2}.$$

Преобразуем выражение для критерия (1.1) с использованием уравнений динамики (2.1) и получим, что критерий принимает вид

$$\begin{aligned} J &= \int_0^T \frac{dE}{dt} dt = \int_0^T (\omega^2 q \dot{q} + p \dot{p}) dt = \int_0^T (\omega^2 q p + p(-\omega^2 q + u)) dt = \\ &= \int_0^T p u dt \longrightarrow \max_u. \end{aligned}$$

Для каноничности переобозначим выражение, устремив критерий к минимуму, а именно:

$$(3.1) \quad J = - \int_0^T p u dt \longrightarrow \min_u.$$

Далее для решения задачи оптимального управления (2.1)–(3.1) используем принцип максимума Понтрягина. Функция Понтрягина записывается как

$$(3.2) \quad H(q, p, \Psi_1, \Psi_2, u) = \Psi_1 p - \Psi_2 \omega^2 q + \Psi_2 u + p u.$$

Поскольку искомое $u^*(t)$ должно максимизировать H , следовательно закон оптимального управления имеет вид

$$(3.3) \quad u^*(t) = \varepsilon \operatorname{sign}(\Psi_2(t) + p(t)).$$

Уравнения для сопряженных переменных записываются как

$$(3.4) \quad \begin{cases} \dot{\Psi}_1 = \omega^2 \Psi_2, \\ \dot{\Psi}_2 = -\Psi_1 - u. \end{cases}$$

Теперь обратим внимание, что поскольку решаемая задача с фиксированным временем и свободным правым концом, то имеют место такие условия трансверсальности:

$$(3.5) \quad \begin{cases} \Psi_1(T) = 0, \\ \Psi_2(T) = 0. \end{cases}$$

Далее совершим линейную замену переменных

$$(3.6) \quad \begin{cases} \Psi_1 = \Psi_I - \omega^2 q, \\ \Psi_2 = \Psi_{II} - p \end{cases}$$

и подставим в (3.4). Получим новую систему для сопряженных переменных

$$\begin{cases} \dot{\Psi}_I - \omega^2 \dot{q} = \omega^2(\Psi_{II} - p), \\ \dot{\Psi}_{II} - \dot{p} = -\Psi_I + \omega^2 q - u. \end{cases}$$

Учет (2.1) приводит последнюю систему к виду, в котором нет зависимости от обобщенных координат и управления, а именно:

$$(3.7) \quad \begin{cases} \dot{\Psi}_I = \omega^2 \Psi_{II}, \\ \dot{\Psi}_{II} = -\Psi_I. \end{cases}$$

Общим решением системы (3.7) являются гармонические функции с неизвестными амплитудой $A > 0$ и фазой ϕ :

$$(3.8) \quad \begin{cases} \Psi_I = \omega A \sin(\omega t + \phi), \\ \Psi_{II} = A \cos(\omega t + \phi). \end{cases}$$

С учетом (3.8) закон оптимального управления (3.3) принимает вид

$$(3.9) \quad u^*(t) = \varepsilon \operatorname{sign} \Psi_{II}(t) = \varepsilon \operatorname{sign} \cos(\omega t + \phi).$$

Это означает, что управление переключается между своими крайними значениями в моменты времени

$$(3.10) \quad \omega t_k = \frac{\pi}{2} - \phi + \pi(k-1), \quad k = 1, \dots, K,$$

где K – количество переключений управления, равное

$$(3.11) \quad K = 1 + \left[\frac{\omega(T - t_1)}{\pi} \right].$$

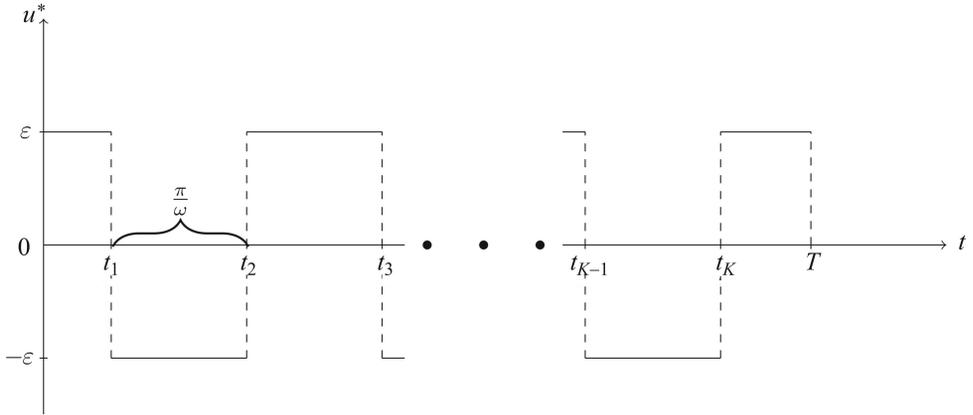


Рис. 1. Вид оптимального управления.

Квадратные скобки здесь означают целую часть числа. Из (3.11) сразу следует, что $K \geq 1$ при любом $T > t_1$ в задаче максимизации энергии осциллятора. Случай с $K = 0$ будет рассмотрен и проанализирован после леммы 2. Момент первого переключения

$$(3.12) \quad t_1 = \frac{\pi}{2\omega} - \frac{\phi}{\omega}$$

должен удовлетворять условию $0 < \omega t_1 < \pi$, а значит, $-\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{\pi}{2}$. Таким образом, переключение управления происходит каждые $\frac{\pi}{\omega}$ секунд. Первый и последний интервалы управления отличны от $\frac{\pi}{\omega}$. Так как в данной постановке начальное значение управления не влияет на решение задачи, выберем $u^*(0) = \varepsilon$. На рис. 1 показана зависимость оптимального управления от времени.

Поскольку данный закон решения допускает особые экстремали, возможные в случае

$$(3.13) \quad \begin{cases} \Psi_{\text{I}}(t) \equiv 0, \\ \Psi_{\text{II}}(t) \equiv 0, \end{cases}$$

покажем, что они не могут содержаться в искомом решении. Из условий трансверсальности (3.5) и (3.13) следует, что

$$(3.14) \quad \begin{cases} q(T) = 0, \\ p(T) = 0. \end{cases}$$

Однако последнего не может быть, так как $E(T) > 0$. Если же на некотором интервале времени $t \in [t', t'']$ выполнено (3.13), то из справедливости этих равенств в момент времени t'' и из (3.8) следует, что $A = 0$. Тогда верно (3.13) в момент времени T , и поэтому справедливо (3.14), а это невозможно, как показано ранее. Таким образом, доказано, что особые экстремали не могут содержаться в исходном решении.

Для решения задачи достаточно найти момент первого переключения t_1 . Перепишем (3.5) с учетом полученных для сопряженных переменных формул и получим, что

$$(3.15) \quad \begin{cases} A \sin(\omega T + \phi) = \omega q(T), \\ A \cos(\omega T + \phi) = p(T). \end{cases}$$

Видно, что если найти $p(T)$ и $q(T)$ как функции t_1 , то, учитывая (3.12), из системы (3.15) можно получить искомый момент t_1 .

3.2. Замечания о фазовом портрете

Для нахождения фазовых координат системы в конечный момент времени обратимся к фазовому портрету.

Рассмотрим фазовые кривые одного осциллятора, описываемого уравнениями динамики (2.1) на фазовой плоскости (q, p) при прикладывании к нему конкретного управления u . Пусть $u = \varepsilon$:

$$\begin{cases} \dot{q}(t) = p(t), \\ \dot{p}(t) = -\omega^2 q(t) + \varepsilon. \end{cases}$$

Второе уравнение записывается в виде (зависимость от t здесь и далее опускаем для удобства)

$$\ddot{q} + \omega^2 \left(q - \frac{\varepsilon}{\omega^2} \right) = 0.$$

Его решение имеет вид

$$\begin{cases} q = R \cos(-\omega t + \gamma_0) + \frac{\varepsilon}{\omega^2}, \\ p = R\omega \sin(-\omega t + \gamma_0), \end{cases}$$

где R – константа, алгебраический и геометрический смыслы которой будут раскрыты далее по тексту, γ_0 – некоторая фаза, а знак минус перед частотой показывает на фазовой плоскости движение по часовой стрелке.

Аналогичные рассуждения можно провести для случая $u = -\varepsilon$. Результат будет идентичен предыдущему с разницей лишь в знаке перед вторым слагаемым первого уравнения системы. Итак, фазовыми траекториями системы являются окружности

$$\left(q \mp \frac{\varepsilon}{\omega^2} \right)^2 + \left(\frac{p}{\omega} \right)^2 = R^2$$

с центром в точке с координатами $e\left(\pm \frac{\varepsilon}{\omega^2}, 0\right)$. По этим окружностям фазовая точка движется по часовой стрелке с угловой скоростью ω .

3.3. Исследование структуры решения

Используя выводы из подраздела 3.2, можно представить вид фазовой траектории, приведенный на рис. 2 для исследуемой задачи с законом оптимального управления, показанным на рис. 1.

Здесь точками показаны состояния осциллятора на фазовой плоскости в начальный, конечный моменты и моменты переключения управления. Видно, что координаты первой точки переключения определяются соотношениями

$$\begin{cases} q_1 = \frac{\varepsilon}{\omega^2}(1 - \cos(\omega t_1)), \\ p_1 = \frac{\varepsilon}{\omega} \sin(\omega t_1) \end{cases}$$

с

$$R = \frac{\varepsilon}{\omega^2}, \quad \gamma_0 = \pi,$$

а общий вид координат точек переключения –

$$(3.16) \quad \begin{cases} q_k = (-1)^{(k-1)} \left(q_1 + 2(k-1) \frac{\varepsilon}{\omega^2} \right), \\ p_k = (-1)^{(k-1)} p_1. \end{cases}$$

Знак в системе (3.16) определяется четностью k и соответствует описанию движения осциллятора между $k-1$ и k переключениями управления, т.е. интервалу движения с номером k . Последнее переключение имеет номер $k = K$,

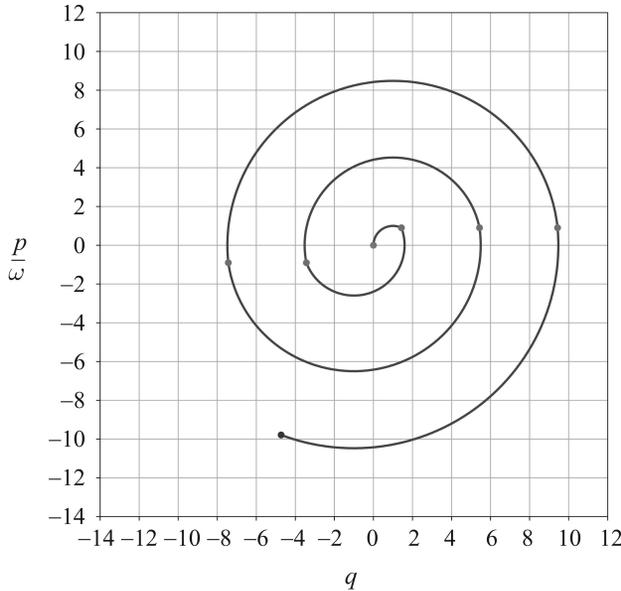


Рис. 2. Фазовый портрет осциллятора с $\omega = 1$, $\varepsilon = 1$ с переключениями согласно закону (3.10) и произвольным моментом t_1 .

определяемый (3.11), поэтому интервал времени, отвечающий заключительному участку движения, равен

$$(3.17) \quad \Delta t_L = T - t_1 - \frac{(K-1)\pi}{\omega}.$$

Рассмотрим движение фазовой точки на заключительном интервале движения от положения (q_K, p_K) до $(q(T), p(T))$. Поскольку интервал движения имеет номер $K+1$, то для соответствующих координат справедливы соотношения

$$(3.18) \quad \begin{cases} q_K = (-1)^K \frac{\varepsilon}{\omega^2} + R \cos \gamma, \\ p_K = \omega R \sin \gamma, \\ q(T) = (-1)^K \frac{\varepsilon}{\omega^2} + R \cos(-\omega \Delta t_L + \gamma), \\ p(T) = \omega R \sin(-\omega \Delta t_L + \gamma), \end{cases}$$

где $|R|$ – радиус окружности движения, γ – начальный угол, $(-1)^K \frac{\varepsilon}{\omega^2}$ – определяет сдвиг центра окружности по оси q на фазовой плоскости. Далее, из уравнений (3.16) и первого момента переключения управления для системы (3.8) следует, что

$$(3.19) \quad \begin{cases} \gamma = \operatorname{arctg} \left(\frac{\sin(\omega t_1)}{2K - \cos(\omega t_1)} \right), \\ R = \frac{\varepsilon \sin(\omega t_1)}{\omega^2 \sin \gamma} (-1)^{(K-1)}. \end{cases}$$

Поделив второе и первое уравнения (3.15) друг на друга и используя (3.18), получаем

$$(3.20) \quad \operatorname{tg} \left(\omega T + \frac{\pi}{2} - \omega t_1 \right) = \frac{(-1)^K \varepsilon + R \omega^2 \cos(-\omega \Delta t_L + \gamma)}{R \omega^2 \sin(-\omega \Delta t_L + \gamma)}.$$

Решение уравнения (3.20) дает искомое t_1 . Аналитическое решение (3.20) определяется следующей леммой.

Лемма 1. Пусть Δt_L определяется выражением (3.17), а γ и R – выражениями (3.19). Тогда момент времени t_1 определяется из решения уравнения (3.20) как

$$(3.21) \quad t_1 = \frac{T}{2} - \frac{(K-1)\pi}{2\omega}.$$

Доказательство леммы 1. Обозначим $\xi = \omega(T - t_1)$ и $\varphi = \omega t_1$. Тогда (3.20) принимает вид

$$-\operatorname{ctg} \xi = \frac{(-1)^K + (-1)^{K-1} (-1)^{K-1} \frac{\sin \varphi}{\sin \gamma} \cos(\gamma - \xi)}{(-1)^{K-1} (-1)^{K-1} \frac{\sin \varphi}{\sin \gamma} \sin(\gamma - \xi)}.$$

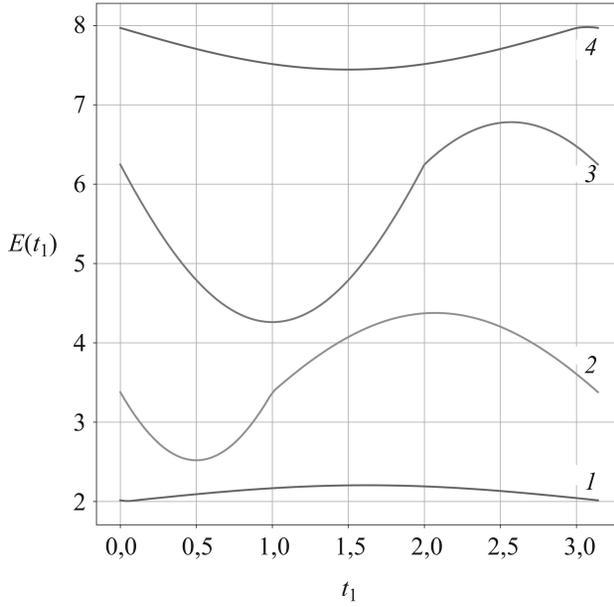


Рис. 3. Зависимость энергии $E(t_1)$ при фиксированных T : 1 - $T = \pi + 0,1$; 2 - $T = \pi + 1$; 3 - $T = \pi + 2$; 4 - $T = \pi + 3$.

Перепишем последнее выражение, раскрыв $\operatorname{ctg} \xi$ и избавившись от знаменателя

$$\cos \xi \sin \varphi \sin(\gamma - \xi) + \sin \xi \sin \varphi \cos(\gamma - \xi) = (-1)^{K-1} \sin \xi \sin \gamma.$$

Сгруппировав слагаемые в левой части последнего равенства, получим

$$\sin \varphi \sin \gamma = (-1)^{K-1} \sin \xi \sin \gamma.$$

Поскольку из (3.19) видно, что $\sin \gamma \neq 0$ при $t_1 \neq 0$, то имеем равенство

$$\sin \varphi = (-1)^{K-1} \sin \xi,$$

из которого получаем, что для всех $K \in \mathbb{Z}$ выполнено

$$\varphi = \xi - (K - 1)\pi \quad \text{или} \quad \omega t_1 = \omega(T - t_1) - (K - 1)\pi,$$

откуда следует утверждение леммы 1. Лемма 1 доказана.

Следствие 1. Из леммы 1 и (3.17) следует, что когда t_1 оптимально и удовлетворяет (3.21),

$$\begin{aligned} \Delta t_L &= T - t_1 - \frac{(K - 1)\pi}{\omega} = T - \frac{T}{2} + \frac{(K - 1)\pi}{2\omega} - \frac{(K - 1)\pi}{\omega} = \\ (3.22) \quad &= \frac{T}{2} - \frac{(K - 1)\pi}{2\omega} = t_1. \end{aligned}$$

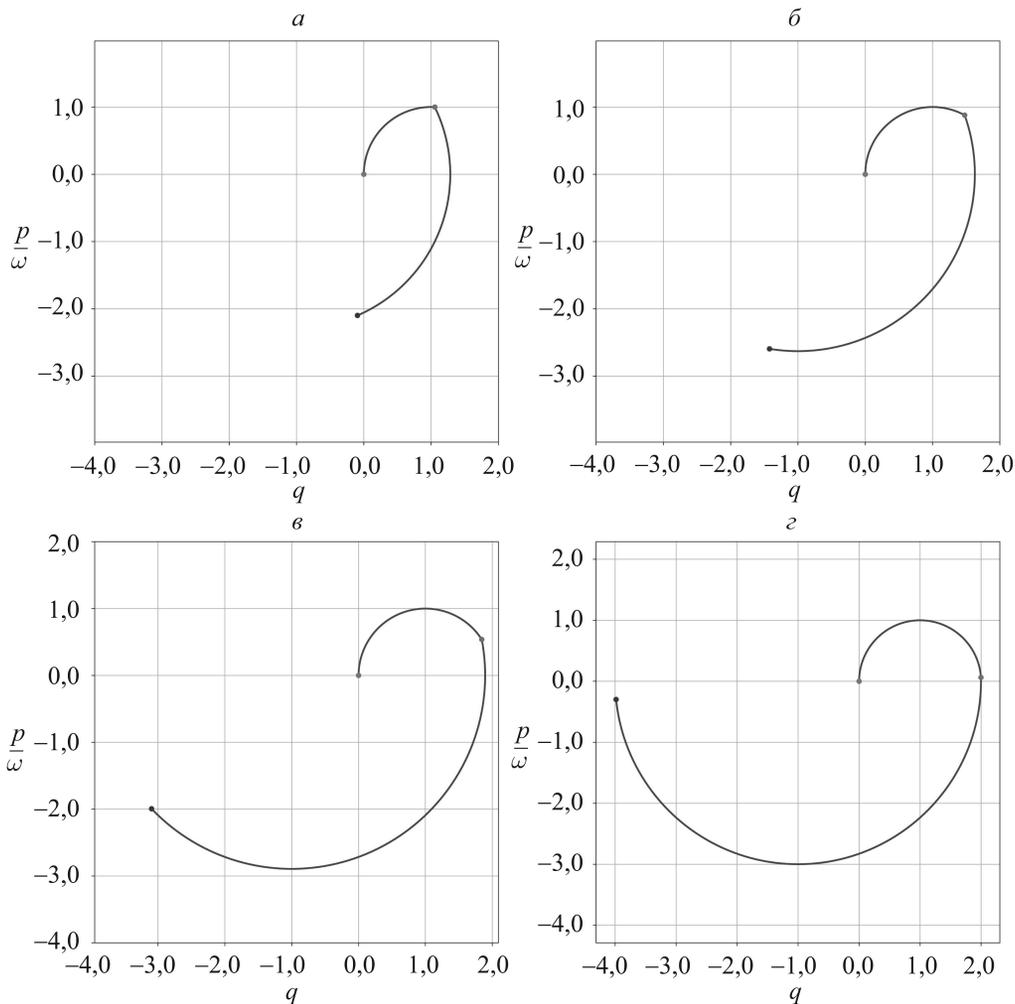


Рис. 4. Фазовые портреты для четырех пар значений (T, t_1) : а) $T = \pi + 0,1$; б) $T = \pi + 1$; в) $T = \pi + 2$; г) $T = \pi + 3$.

Выражение (3.22) означает, что для максимальности энергии длительности первого и последнего интервалов управления должны быть равны.

Положим $\omega = 1$ и рассмотрим различные значения T из отрезка $[\pi, 2\pi]$. С помощью моделирования методом перебора были найдены значения t_1 , при которых значения $E(T)$ максимальны. Результат эксперимента представлен на рис. 3.

Значения моментов первого переключения, максимизирующие энергию:

$$T = 3,24159265359, \quad t_1 = 1,62609871015;$$

$$T = 4,14159265359, \quad t_1 = 2,06811777699;$$

$$T = 5,14159265359, \quad t_1 = 2,5732824248;$$

$$T = 6,14159265359, \quad t_1 = 3,07844707261.$$

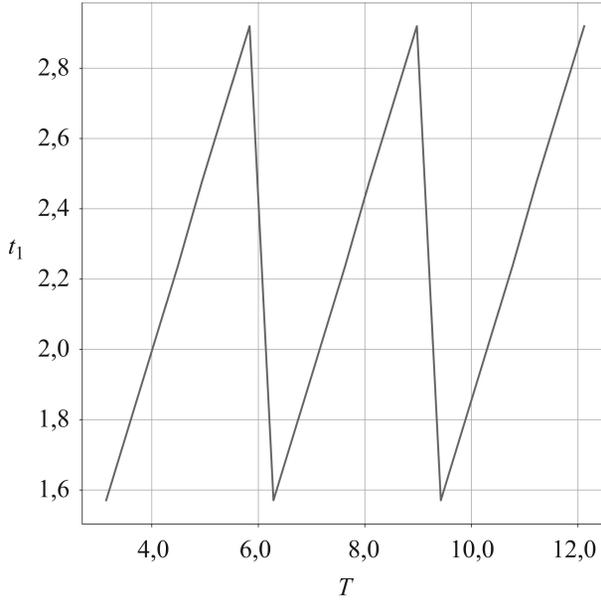


Рис. 5. Зависимость оптимального t_1 от T .

Фазовые портреты для различных значений T представлены на рис. 4, а зависимость $t_1(T)$ – на рис. 5.

Численное решение уравнения (3.20) готовыми программными средствами языка Python дает следующий результат:

$$T = 3,24159265359, \quad t_1 = 1,62079632679;$$

$$T = 4,14159265359, \quad t_1 = 2,07079632679;$$

$$T = 5,14159265359, \quad t_1 = 2,57079632679;$$

$$T = 6,14159265359, \quad t_1 = 3,07682946837.$$

Видно, что в случае одного переключения управления $t_1 = \frac{T}{2}$. Этот симметричный результат следует из формул аналитического решения с помощью принципа максимума и следствия из леммы 1. Что касается других T , то по лемме 1 решения периодичны с периодом $\frac{\pi}{\omega}$.

После того как момент времени t_1 определен, можно найти значение энергии в финальный момент T .

Лемма 2. Максимальное значение энергии в момент времени T , достижимое из состояния покоя осциллятора при ограниченном скалярном управлении, удовлетворяющем ограничению $|u| \leq \varepsilon$, равно:

$$E(T) = \frac{2\varepsilon^2}{\omega^2} (K - \cos \omega t_1)^2,$$

где значение t_1 получено в лемме 1.

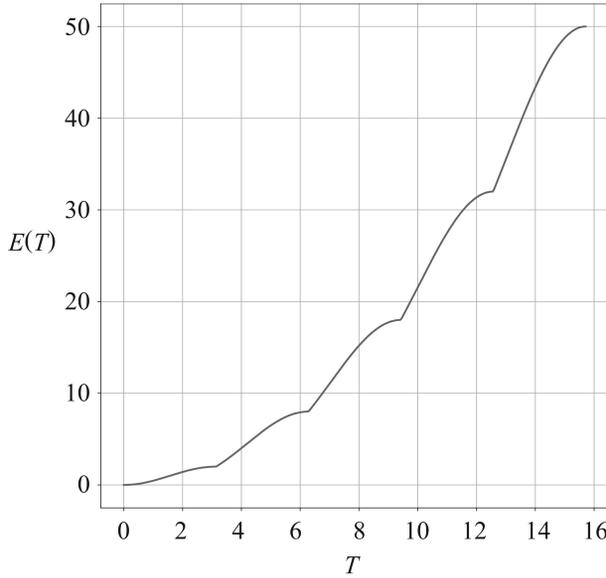


Рис. 6. Зависимость максимального значения $E(T)$.

Доказательство леммы 2. Выразим $q(T)$ и $p(T)$ через t_1 и подставим в выражение для энергии осциллятора. Справедлива цепочка равенств

$$\begin{aligned}
 E(T) &= \frac{\omega^2}{2} \left(\left(R \cos \left(\gamma - \frac{\omega T}{2} + \frac{(K-1)\pi}{2} \right) + (-1)^K \frac{\varepsilon}{\omega^2} \right)^2 + \right. \\
 &\quad \left. + R^2 \sin^2 \left(\gamma - \frac{\omega T}{2} + \frac{(K-1)\pi}{2} \right) \right) = \\
 &= \frac{\omega^2}{2} \left(\frac{\varepsilon^2}{\omega^4} + R^2 + (-1)^K \frac{2R\varepsilon}{\omega^2} \cos(\gamma - \omega t_1) \right) = \\
 &= \frac{\varepsilon^2}{2\omega^2} \left(1 + \frac{\sin^2 \varphi}{\sin^2 \gamma} - 2 \frac{\sin \varphi}{\sin \gamma} \cos(\gamma - \varphi) \right) = \\
 &= \frac{\varepsilon^2}{2\omega^2} \left(1 + \frac{\sin^2 \varphi}{\sin^2 \gamma} - 2 \sin^2 \varphi - 2 \sin \varphi \cos \varphi \operatorname{ctg} \gamma \right) = \\
 &= \frac{\varepsilon^2}{2\omega^2} (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi \operatorname{ctg}^2 \gamma - 2 \sin \varphi \cos \varphi \operatorname{ctg} \gamma).
 \end{aligned}$$

Подставим выражение для γ из (3.19) и получим:

$$\begin{aligned}
 E(T) &= \frac{\varepsilon^2}{2\omega^2} \left(\cos^2 \varphi + (2K - \cos \varphi)^2 - 2 \cos \varphi (2K - \cos \varphi) \right) = \\
 &= \frac{\varepsilon^2}{2\omega^2} (2K - 2 \cos \varphi)^2 = \frac{2\varepsilon^2}{\omega^2} (K - \cos \omega t_1)^2.
 \end{aligned}$$

Лемма 2 доказана.

Проиллюстрируем полученную зависимость графиком, представленным на рис. 6. Из рис. 6 видно, что рост энергии $E(T)$ с возрастанием значений T существенно нелинейный.

Поскольку получено значение энергии осциллятора при $K \geq 1$, то необходимо сравнить значение энергии при $K = 1$ с значением энергии при $K = 0$ и фиксированном $T < \pi$. Эти значения равны:

$$E_{K=0} = \frac{\varepsilon^2}{\omega^2}(1 - \cos \omega T), \quad E_{K=1} = \frac{2\varepsilon^2}{\omega^2} \left(1 - \cos \frac{\omega T}{2}\right)^2.$$

Сравнивая $E_{K=0}$ и $E_{K=1}$, получаем, что $E_{K=0} \geq E_{K=1}$ при всех $\omega T \in [0, \pi]$.

Лемма 3. Значение энергии в момент времени T , достижимое из состояния покоя осциллятора при ограниченном скалярном управлении, удовлетворяющем (3.9), при $T = \frac{n\pi}{\omega}$, $n \in \mathbb{N}$, не зависит от t_1 и равно:

$$E(T) = \frac{2\varepsilon^2 K^2}{\omega^2}.$$

Доказательство леммы 3.

$$E(T) = \frac{\omega^2}{2} \left[\left(R \cos \left(-\omega \left(T - t_1 - \frac{(K-1)\pi}{\omega} \right) + \gamma \right) + (-1)^K \frac{\varepsilon}{\omega^2} \right)^2 + R^2 \left(\sin \left(-\omega \left(T - t_1 - \frac{(K-1)\pi}{\omega} \right) + \gamma \right) \right)^2 \right].$$

Заметим, что если $T = \frac{n\pi}{\omega}$, то $K = n$. Поэтому выражение принимает вид

$$\begin{aligned} E(T) &= \frac{\omega^2}{2} \left[\left(R \cos(-\omega(-t_1) + \pi + \gamma) + (-1)^K \frac{\varepsilon}{\omega^2} \right)^2 + R^2 (\sin(-\omega(-t_1) + \pi + \gamma))^2 \right] = \\ &= \frac{\omega^2}{2} \left[\left(-R \cos(\omega t_1 + \gamma) + (-1)^K \frac{\varepsilon}{\omega^2} \right)^2 + R^2 (\sin(\omega t_1 + \gamma))^2 \right] = \\ &= \frac{\omega^2}{2} \left(\frac{\varepsilon^2}{\omega^4} + R^2 - (-1)^K \frac{2R\varepsilon}{\omega^2} \cos(\omega t_1 + \gamma) \right). \end{aligned}$$

Используя (3.19) и сделав замену $\varphi = \omega t_1$, получаем:

$$\begin{aligned} E(T) &= \frac{\varepsilon^2}{2\omega^2} \left(1 + \frac{\sin^2 \varphi}{\sin^2 \gamma} - 2 \sin^2 \varphi + 2 \sin \varphi \cos \varphi \operatorname{ctg} \gamma \right) = \\ &= \frac{\varepsilon^2}{2\omega^2} (1 + \sin^2 \varphi (1 + \operatorname{ctg}^2 \gamma) - 2 \sin^2 \varphi + 2 \sin \varphi \cos \varphi \operatorname{ctg} \gamma) = \\ &= \frac{\varepsilon^2}{2\omega^2} \left(\cos^2 \varphi + (2K - \cos \varphi)^2 + 2 \cos \varphi (2K - \cos \varphi) \right) = \frac{2\varepsilon^2 K^2}{\omega^2}. \end{aligned}$$

Лемма 3 доказана.

Выражение для энергии в лемме 3 совпадает с асимптотической формулой для энергии осциллятора в задаче гашения колебаний на больших временах, приведенной в [8].

4. Сравнение с задачей быстрогодействия

Напомним задачу быстрогодействия для одного осциллятора. Для системы, описываемой (2.1) с ограничением на управление вида $|u| \leq \varepsilon$ и краевыми условиями

$$(4.1) \quad \begin{cases} q(0) = a, \\ p(0) = b, \\ q(T) = 0, \\ p(T) = 0, \end{cases}$$

найти оптимальное управление $u(t)$, минимизирующее критерий

$$(4.2) \quad J = \int_0^T dt \rightarrow \min.$$

Как показал Болтянский в [1], решением этой задачи является оптимальное кусочно-непрерывное управление, переключающееся в фазовых точках пересечения дуг фазовой траектории и полудуг радиуса $\frac{\varepsilon}{\omega^2}$, проведенных в точках $\pm \frac{k\varepsilon}{\omega^2}$, $k = 2n - 1$, $n \in \mathbb{N}$, через каждые $\frac{\pi}{\omega}$ секунд. Фазовая плоскость построена в координатах $(q, \frac{p}{\omega})$ (см. рис. 7).

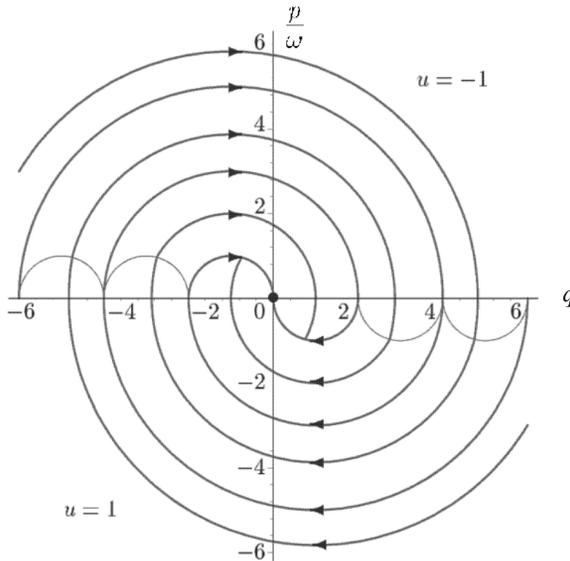


Рис. 7. Фазовые траектории в задаче быстрогодействия.

В [4] приведено аналитическое решение схожей задачи с частными начальными условиями с указанием полного времени и времени первого переключения. Они полностью определяют решение. Следуя той же логике и графическому представлению решения, приведенному в [1, 3], можно выписать аналитическое значение критерия в задаче быстрогодействия, которое в явном виде приводится впервые, а именно:

$$(4.3) \quad \begin{cases} T^* = \frac{\pi}{\omega} \left(K - \frac{1}{2} \right) - \frac{\phi}{\omega} + \Delta t_L, \\ \Delta t_L = \frac{1}{\omega} \arcsin \left(\frac{R\omega^2 \cos(\phi + \gamma_0)}{\varepsilon} \right), \\ \phi = \arcsin \left(\frac{\frac{\varepsilon^2}{\omega^2}(4K^2 - 1) + \omega^2 R^2}{4K\varepsilon R} \right) - \gamma_0, \\ R = \sqrt{\left(a + \frac{\varepsilon}{\omega^2} \right)^2 + \left(\frac{b}{\omega} \right)^2}, \\ \gamma_0 = \operatorname{arctg} \frac{b\omega}{\omega^2 a + \varepsilon}, \end{cases}$$

где K – число переключений управления, а T^* – величина оптимального полного времени быстрогодействия. K может принимать одно из значений:

$$K = \left\{ \left[\frac{\omega^2 R}{2\varepsilon} \right] - 1; \left[\frac{\omega^2 R}{2\varepsilon} \right]; \left[\frac{\omega^2 R}{2\varepsilon} \right] + 1 \right\}.$$

Здесь квадратные скобки обозначают целую часть числа, а решение приведено для начального положения, которому соответствует $u(0) = -\varepsilon$.

Решение задачи максимизации энергии осциллятора за фиксированное время дает оптимальные значения обобщенных координат осциллятора в момент времени T . Если теперь выбрать любую другую точку на окружности, соответствующей максимальному значению энергии, то очевидно, что значение критерия T^* , полученного из решения задачи быстрогодействия, будет больше T – фиксированного времени в исходной задаче. Однако также очевидно, что при перемене знака скорости существует оптимальное решение задачи быстрогодействия (те же самые моменты переключения управления только в обратном времени и уровни переключения на фазовой плоскости), дающее решение этой задачи с $T^* = T$.

На рис. 8,а и 8,б показаны фазовые портреты для задачи максимизации энергии, на рис. 8,в и 8,г – для соответствующей задачи быстрогодействия. Начальное значение фазовых координат для задачи быстрогодействия выбрано $a = q(T)$, $b = -p(T)$ равным оптимальным значениям, полученным при решении задачи максимизации энергии.

Множество точек (a, b) фазовой плоскости осциллятора с равной энергией представляет собой окружность $\omega^2 a^2 + b^2 = \text{const}$, являющуюся ограниченным замкнутым множеством. Значение T^* как функция начальных условий (a, b) достигает на этом множестве своих верхней и нижней граней. Нижняя грань T_l , как сказано ранее, есть $T_l = T$. Верхняя грань T_h может быть

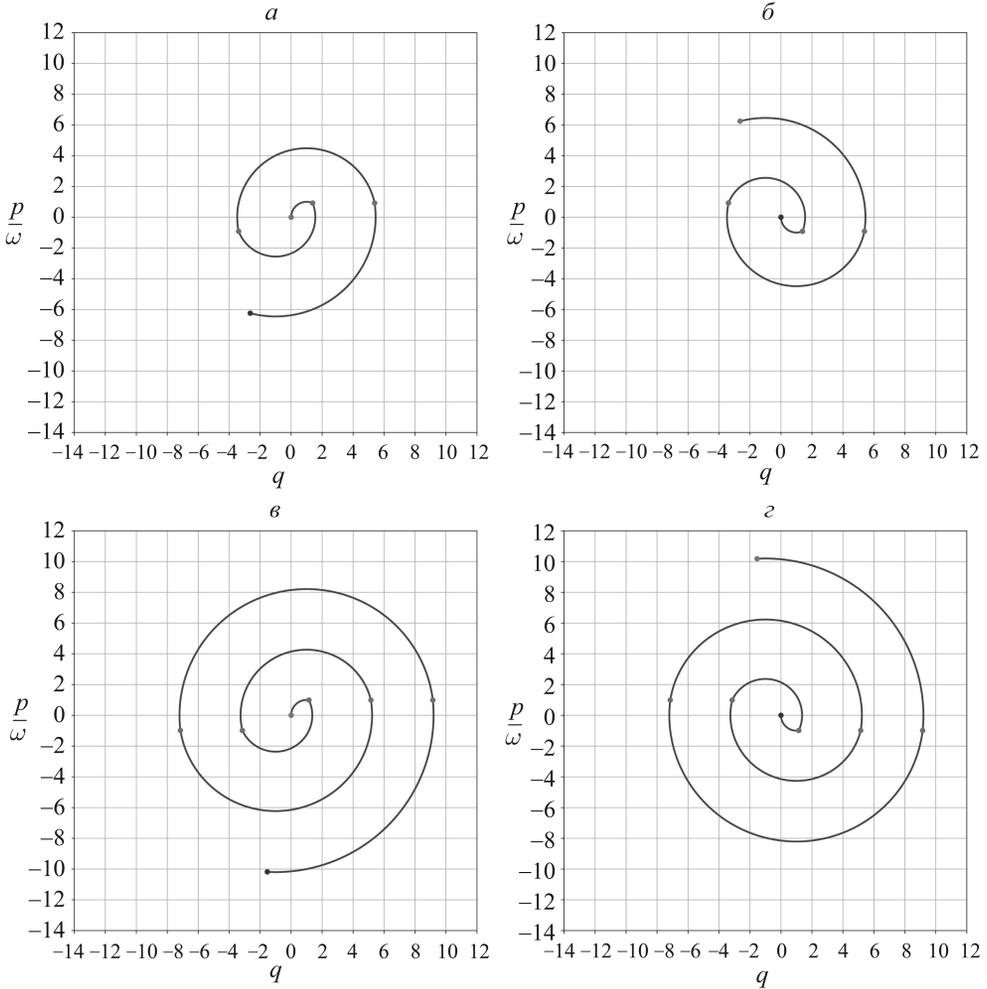


Рис. 8. Разгон маятника до максимальной энергии и приведение его в состояние покоя из точки с полученной энергией за минимальное время.

найдена как решение задачи $T^* \rightarrow \max_{(a,b)}$ при условии $\omega^2 a^2 + b^2 = \text{const}$, а численно – например, перебором по всем точкам окружности соответствующей энергии. Приведем значения T_h для некоторых значений T_l .

$$\begin{aligned}
 T_l = 9,92477796077, & \quad T_h = 10,5273991806; \\
 T_l = 4,44159265359, & \quad T_h = 5,1503994477; \\
 T_l = 17,407963268, & \quad T_h = 17,8359447879.
 \end{aligned}$$

5. Заключение

В статье исследована и решена задача управления осциллятором по критерию максимизации его энергии в заданный фиксированный момент времени. Аналитически получены вид оптимального управления и значения времен переключения управления, а также формулы конечного оптимального значения

энергии как функции времени T , отведенного на решение задачи. Разработаны программные модули на языке Python для решения задачи оптимального управления при максимизации энергии, задачи быстродействия и для экспериментальной проверки лемм 1, 2 и 3. Полученное решение расширяет набор классических решений для задачи оптимального ограниченного скалярного управления одиночным осциллятором, дает понимание структуры полученных законов управления и дополняет решение задачи быстродействия.

В будущем планируется применить разработанный подход для решения задачи максимизации энергии системы осцилляторов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Болтянский В.Г.* Математические методы оптимального управления. М.: Наука, 1969.
2. *Гамкрелидзе Р.В.* Открытие Принципа Максимума Понтрягина (ПМП). 2013. 9–10 апреля. Докл. в Тулонском университете. Франция.
3. *Аграчев А.А., Сачков Ю.Л.* Геометрическая теория управления. М.: Физматлит, 2005.
4. *Галыев А.А.* Задача оптимального управления осциллятором с целью обнуления его энергии при ограничении на управляющее воздействие // *АиТ.* 2009. № 3. С. 24–33.
Galyaev A.A. Problem of Optimal Oscillator Control for Nulling its Energy under Bounded Control Action // *Autom. Remote Control.* 2009. V. 70. No. 3. P. 366–374.
5. *Чернуосько Ф.Л.* Управление колебаниями. М.: Наука, 1980.
6. *Галыев А.А.* Скалярное управление группой несинхронных осцилляторов // *АиТ.* 2016. № 9. С. 3–18.
Galyaev A.A. Scalar Control of a Group of Free-running Oscillators // *Autom. Remote Control.* 2016. V. 77. No. 9. P. 1511–1523.
7. *Fedorov A., Ovseevich A.I.* Asymptotic Control Theory for a System of Linear Oscillators // *Moscow Math. J.* 16. 2016. P. 561–598.
8. *Ovseevich A.I.* Complexity of the Minimum-time Damping of a Physical Pendulum // *SIAM J. Control Optim.* 2014. V. 52. No. 1. P. 82–96.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Е.Я. Рубиновичем.

Поступила в редакцию 18.01.2018

После доработки 25.05.2018

Принята к публикации 08.11.2018