

© 2019 г. В.Н. ТИМИН, канд. техн. наук (timin.victor@rambler.ru),
А.Ю. КУСТОВ, канд. физ.-мат. наук (arkadiykustov@yandex.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва),
А.П. КУРДЮКОВ, д-р техн. наук (akurd@ipu.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва,
МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва),
Д.А. ГОЛЬДИН, канд. техн. наук (goldind@ipu.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва),
Ю.А. ВЕРШИНИН (vershy@coventry.ac.uk)
(Университет Ковентри, Великобритания)

СУБОПТИМАЛЬНАЯ АНИЗОТРОПИЙНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ С НЕЦЕНТРИРОВАННЫМ ВНЕШНИМ ВОЗМУЩЕНИЕМ¹

Рассмотрена задача робастной анизотропийной фильтрации для линейной дискретной нестационарной системы на конечном временном интервале. Предполагается, что внешние возмущения, действующие на объект, имеют ограниченную сверху анизотропию и дополнительно удовлетворяют двум ограничениям на моменты. Решение задачи фильтрации основано на критерии ограниченности анизотропийной нормы в обратном времени и сводится к поиску решения задачи выпуклой оптимизации. На численном примере проиллюстрирована работа субоптимального анизотропийного оценщика.

Ключевые слова: анизотропийная фильтрация, нестационарные системы, нецентрированные случайные возмущения, выпуклая оптимизация, линейные матричные неравенства.

DOI: 10.1134/S000523101901001X

1. Введение

Одной из фундаментальных задач теории управления и обработки сигналов является задача оценивания выхода системы (в смысле минимизации желаемого критерия качества). К ее решению применялись различные методы (например, калмановская или $\mathcal{H}_2$ -фильтрация и $\mathcal{H}_\infty$ -фильтрация [1–3]), которые используют различные предположения о модели процесса и свойствах возмущающего сигнала. Каждая из этих теорий имеет некоторые недостатки, ввиду чего были предприняты попытки их обобщения, которые привели в том числе к появлению теории смешанной $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ -фильтрации (см., например, [4–6]). Решение задач $\mathcal{H}_2$ -, $\mathcal{H}_\infty$ - и смешанной $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ -фильтрации основывается в основном на решении уравнений Риккати (см., например, [7, 8]) и линейных матричных неравенств (см., например, [9–11]).

¹ Работа частично выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект РФФИ № 17-08-00185 А) и проекта DIONICOS “Dynamics of and in Complex System” университета Ковентри, проводимого в рамках программы CORDIS “Community Research and Development Information Service” (Marie Curie Action) (ID 612707).

Для линейных дискретных *стационарных* систем в отсутствие знания о вероятностном распределении внешнего возмущения в 1994 г. был предложен стохастический подход к $\mathcal{H}_\infty$ -оптимизации, учитывающий возможную неопределенность в возмущении и позднее названный анизотропийной теорией [12–17].

Задача анизотропийного анализа робастного качества *нестационарных* систем была решена в [18]. Аналогичный результат в терминах связанных уравнений Риккати в прямом и обратном времени для случая нецентрированного возмущения изложен в [19]. Решение задачи оптимальной анизотропийной фильтрации для линейных дискретных нестационарных систем на конечном горизонте было получено И.Г. Владимировым в 2001 г. [20]. Для нахождения оптимального анизотропийного оценщика необходимо решить разностное уравнение Риккати в прямом времени при ограничении в виде алгебраического уравнения специального вида.

На основе изложенных в [21] результатов в [22] решена задача субоптимальной анизотропийной фильтрации на конечном горизонте в терминах разностных линейных матричных неравенств в частном случае равенства размерностей оцениваемого выхода и внешнего возмущения. В [23] в общем случае сформулированы и доказаны достаточные условия ограниченности анизотропийной нормы в терминах разностных линейных матричных неравенств в прямом времени. На их основе поставлена и решена задача субоптимальной анизотропийной фильтрации на конечном временном интервале в прямом времени при отсутствии ограничений на первые два момента внешнего возмущения.

В [24] решены задача анизотропийного анализа и задача синтеза субоптимального анизотропийного управления для нестационарной системы с нецентрированным возмущением, на первый и второй момент которого были наложены дополнительные условия. Решение задачи анализа было получено в терминах прямого времени, а затем использовано для синтеза регулятора. Здесь стоит сразу отметить, что использование полученного решения задачи анализа (в терминах прямого времени) для решения задачи синтеза оценщика затруднено, в связи с чем необходимо получить аналогичное решение в обратном времени.

Структура данной работы следующая. В разделе 2 приводятся обозначения и сокращения, кратко излагаются базовые сведения по анизотропийной теории. Критерий ограниченности анизотропийной нормы для линейной нестационарной системы изложен в разделе 3. Постановка и решение задачи анизотропийной фильтрации излагаются в разделе 4. В разделе 5 на численном примере по предложенному алгоритму синтезирован анизотропийный оценщик.

2. Предварительные сведения

2.1. Сокращения и обозначения

В статье используются следующие сокращения и обозначения: $\mathbb{R}^m$ – множество векторов длины m с действительными компонентами; $\mathbb{R}^{n \times m}$ – множество матриц размера $n \times m$ с действительными компонентами; $\mathbb{L}_2^m$ – множе-

ство интегрируемых с квадратом случайных векторов со значениями в $\mathbb{R}^m$; $\mathbf{E}[\cdot]$ – оператор математического ожидания; $|x|$ – евклидова норма вектора x ; X^T – транспонирование матрицы или вектора X ; $0_{n \times m}$ и I_m – нулевая и единичная матрицы размеров $n \times m$ и $m \times m$ соответственно (для простоты 0 и I , если размерность ясна из контекста); $A \succ B$ ($A \succeq B$) означает, что $A - B$ – положительно (неотрицательно) определенная матрица; $\text{tr} A$ – след квадратной матрицы A ; $\det A$ – определитель квадратной матрицы A ; $*$ – симметричный относительно главной диагонали член матрицы; п.р.в. – плотность распределения вероятности.

2.2. Анизотропийная норма матрицы

В этом разделе приведены определения анизотропии случайного вектора и анизотропийной нормы матрицы, а также описан математический инструмент ее вычисления.

Рассмотрим два случайных вектора $W \in \mathbb{L}_2^m$ и $Z \in \mathbb{L}_2^p$, которые связаны друг с другом посредством матрицы $F \in \mathbb{R}^{p \times m}$ как $Z = FW$. Среднеквадратичный коэффициент усиления матрицы F определяется как $Q(F, W) = \sqrt{\frac{\mathbf{E}|FW|^2}{\mathbf{E}|W|^2}}$. Если никаких дополнительных ограничений на класс векторов-входов $W \in \mathbb{L}_2^m$ нет, то максимальное значение $Q(F, W)$ равно $\mathcal{H}_\infty$ -норме (т.е. наибольшему сингулярному числу) матрицы F :

$$\sup_{W \in \mathbb{L}_2^m} Q(F, W) = \|F\|_\infty = \sqrt{\max_{i=1, m} (\lambda_i(F^T F))}.$$

С другой стороны, если W принадлежит классу $\mathbb{G}^m(0; \lambda I_m)$ гауссовских случайных векторов с нулевым средним и скалярной ковариационной матрицей $\text{cov}(W) = \lambda I_m$ с п.р.в. $p_\lambda(w) = (2\pi\lambda)^{-m/2} \exp\left(-\frac{|w|^2}{2\lambda}\right)$, где $\lambda > 0$, то значение $Q(F, W)$ оказывается равным масштабированной $\mathcal{H}_2$ -норме (т.е. масштабированной фробениусовой нормой) матрицы F :

$$Q(F, W) = \frac{\|F\|_2}{\sqrt{m}} = \sqrt{\frac{\text{tr}(F^T F)}{m}}, \quad \text{если } W \sim \mathbb{G}^m(0; \lambda I_m) \quad \forall \lambda > 0.$$

Первой работой по анизотропийной теории для линейных дискретных *стационарных* систем является статья [13] (версия для конференции появилась раньше — в 1994 г. [12]). Ее распространение на линейные дискретные *нестационарные* системы проведено в [18]. В рамках стохастического подхода, лежащего в основе этих работ, предполагается, что случайные векторы W имеют абсолютно непрерывные распределения вероятностей (с п.р.в. f) и конечные вторые моменты, и определенная для них анизотропия

$$\mathbf{A}(W) = \min_{\lambda > 0} \mathbf{D}(f \| p_\lambda) = \frac{m}{2} \ln \left(\frac{2\pi e}{m} \mathbf{E}|W|^2 \right) - \mathbf{h}(W)$$

не превосходит заданный пороговый уровень $a \geq 0$, где минимум относительной энтропии $\mathbf{D}(f \| p_\lambda)$ (или информационного отклонения Кульбака–

Лейблера) случайного вектора W с п.р.в. f относительно гауссовского случайного вектора с п.р.в. p_λ достигается при $\lambda_* = \mathbf{E}|W|^2/m$. Здесь $\mathbf{h}(W) = -\mathbf{E}[\ln f(x)]$ – дифференциальная энтропия случайного вектора W .

Потребуем дополнительно, что имеют место следующие ограничения на первый и второй моменты случайного вектора W :

$$(1) \quad |\mathbf{E}W| \geq \tau, \quad \mathbf{E}(|W - \mathbf{E}W|^2) \leq \sigma,$$

где $\tau \geq 0$ и $\sigma > 0$ – известные числа. Воспользовавшись свойством масштабной инвариантности анизотропии, утверждающим, что $\mathbf{A}(rW) = \mathbf{A}(W)$ для любого неслучайного числа $r \neq 0$, без ограничения общности положим, что $\tau^2 + \sigma = 1$. Таким образом, для определения ограничений (1) достаточно знания значения $\tau \in [0; 1)$, а значение второго момента (отмасштабированного оговоренным образом случайного вектора) будет ограничено числом $\sigma = 1 - \tau^2$.

Максимальное значение функционала $Q(F, W)$ на множестве случайных векторов с ограниченной числом $a \geq 0$ анизотропией $\mathbf{A}(W)$ и ограничениями (1) на первый и второй моменты с условием $\tau^2 + \sigma = 1$ называется (a, τ) -анизотропийной нормой матрицы F . Для нее далее используется обозначение

$$(2) \quad \|F\|_{a, \tau} = \sup_{W \in \mathbb{L}_2^m: (1) \wedge \mathbf{A}(W) \leq a} Q(F, W).$$

Для работы с (a, τ) -анизотропийной нормой матрицы F более удобно пользоваться следующей формулой, эквивалентной определению (2):

$$\|F\|_{a, \tau} = \sup_{\Sigma = \Sigma^T \succ 0} \left\{ \sqrt{\text{tr}(\Lambda \Sigma) + \|F\|_\infty^2 \tau^2} : \text{tr} \Sigma = 1 - \tau^2, \right. \\ \left. -\frac{1}{2} \ln(1 - \tau^2) \leq -\frac{1}{2} \ln \det(m \Sigma) \leq a \right\},$$

где $\Lambda = F^T F$.

Анизотропийная норма матрицы количественно отражает ее возможности к усилению случайных векторов-входов, чьи распределения и статистические характеристики известны лишь с точностью до ограничений (1) на первые два момента и ограничения на анизотропию $\mathbf{A}(W) \leq a$. Последнее ограничение выступает своего рода компромиссом между двумя граничными случаями – когда известно, что вектор-вход является неслучайным (т.е. имеет распределение вероятностей, полностью “сконцентрированное” в наихудшем направлении; это имеет место в $\mathcal{H}_\infty$ -теории), и когда известно, что вектор-вход с одинаковой вероятностью может принять значения в любых направлениях (т.е. когда с точностью до умножения на ненулевое неслучайное число он имеет стандартное нормальное распределение; это имеет место в $\mathcal{H}_2$ -теории).

Замечание 1. Далее на $(a, 0)$ -анизотропийную норму будем ссылаться посредством обозначения $\|F\|_a$, где условие $\tau = 0$ для краткости опущено.

2.3. Вычисление анизотропийной нормы нестационарной системы, представленной в пространстве состояний

Рассмотрим объект, заданный линейной дискретной нестационарной системой F на временном интервале $k = 0, \dots, N$,

$$(3) \quad F \sim \begin{cases} x_{k+1} = A_k x_k + B_k w_k, \\ z_k = C_k x_k + D_k w_k \end{cases}$$

с начальным условием $x_0 = 0$. Здесь $x_k \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния, $w_k \in \mathbb{R}^{m_w}$ – вектор внешнего возмущения, $z_k \in \mathbb{R}^{p_z}$ – вектор выхода. Вещественные матрицы A_k, B_k, C_k, D_k , зависящие от дискретного времени k , имеют согласованные с векторами размерности. Система (3) на каждом шаге дискретного времени k определяется четверкой матриц $F_k = (A_k, B_k, C_k, D_k)$ и ассоциируется с блочной нижнетреугольной матрицей

$$F_{0:N} = \text{block}_{0 \leq i, j \leq N} (f_{ij}) \in \mathbb{R}^{p_z(N+1) \times m_w(N+1)}$$

с элементами-блоками

$$f_{i,j} = \begin{cases} C_i T_{i,j+1} B_j, & \text{если } i > j, \\ D_j, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i < j, \end{cases}$$

где $T_{i,j} = A_{i-1} T_{i-1,j}$ и $T_{j,j} = I_n$.

Матрица $F_{0:N}$ задает вход-выходные соотношения системы F в виде $Z_{0:N} = F_{0:N} W_{0:N}$, где для краткости записи введены обозначения $W_{0:N} = (w_0^T, \dots, w_N^T)^T$ и $Z_{0:N} = (z_0^T, \dots, z_N^T)^T$. Согласно описанной эквивалентности в представлениях, под нормой системы F имеется в виду соответствующая норма матрицы $F_{0:N}$, в частности, $\|F\|_2 = \|F_{0:N}\|_2$, $\|F\|_{a,\tau} = \|F_{0:N}\|_{a,\tau}$ и $\|F\|_\infty = \|F_{0:N}\|_\infty$. Для гарантированного выполнения строгого неравенства $\|F\|_2 / \sqrt{m} < \|F\|_\infty$, где $m = m_w(N+1)$, предполагается, что справедливо неравенство $p_z < m_w$.

В следующей теореме приведены формулы вычисления (a, τ) -анизотропийной нормы $\|F\|_{a,\tau}$ нестационарной системы в пространстве состояний.

Теорема 1 [19]. Пусть даны число $a \geq -\frac{m}{2} \ln(1 - \tau^2)$, где $\tau \in [0; 1)$, и система F с представлением в пространстве состояний (3). Тогда (a, τ) -анизотропийная норма системы F вычисляется согласно правилу $\|F\|_{a,\tau} = \mathcal{N}(\mathcal{A}^{-1}(a))$, где

$$(4) \quad \mathcal{N}(q) = (\mathcal{N}_0(q)(1 - \tau^2) + \|F\|_\infty^2 \tau^2)^{1/2}, \quad \mathcal{N}_0(q) = \frac{\Phi(q) - 1}{q\Phi(q)},$$

$$(5) \quad \mathcal{A}(q) = \mathcal{A}_0(q) - \frac{m}{2} \ln(1 - \tau^2), \quad \mathcal{A}_0(q) = \frac{m}{2} (\ln \Phi(q) - \Psi(q)),$$

$$(6) \quad \Phi(q) = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^N \text{tr}(L_k P_k L_k^T + S_k), \quad \Psi(q) = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^N \ln \det S_k.$$

Семейства матриц $\{L_k\}_{k=0}^N$, $\{S_k\}_{k=0}^N$ связаны с решением $\{P_k\}_{k=0}^N$ разностного уравнения Ляпунова

$$P_{k+1} = (A_k + B_k L_k) P_k (A_k + B_k L_k)^T + B_k S_k B_k^T, \quad P_0 = 0$$

и решением $\{Q_k\}_{k=0}^N$ разностного уравнения Риккати

$$Q_k = A_k^T Q_{k+1} A_k + q C_k^T C_k + L_k^T S_k^{-1} L_k, \quad Q_{N+1} = 0$$

выражениями

$$S_k = (I_m - B_k^T Q_{k+1} B_k - q D_k^T D_k)^{-1},$$

$$L_k = S_k (B_k^T Q_{k+1} A_k + q D_k^T C_k),$$

где $q = \mathcal{A}^{-1}(a)$.

Замечание 2. В силу зависимости функции $\mathcal{N}(q)$ от $\|F\|_\infty$ к приведенным в теореме выражениям формально необходимо добавить формулу вычисления $\mathcal{H}_\infty$ -нормы системы F . А в рамках условия ограниченности анизотропийной нормы $\|F\|_a$, о котором пойдет речь далее, добавить условие ограниченности $\|F\|_\infty$.

Замечание 3. При $\tau = 0$ формулы (4)–(6) задают правило вычисления $(a, 0)$ -анизотропийной нормы системы F , при этом $\mathcal{N}(q) = \mathcal{N}_0(q)$, $\mathcal{A}(q) = \mathcal{A}_0(q)$ и $\|F\|_a = \mathcal{N}_0(\mathcal{A}_0^{-1}(a))$.

3. Критерий ограниченности анизотропийной нормы

В данном разделе сформулирован критерий ограниченности анизотропийной нормы нестационарной системы в терминах обратного времени. Первоначально критерий ограниченности анизотропийной нормы нестационарной системы был сформулирован и доказан Максимовым Е.А., а чуть позже переформулирован Владимировым И.Г. в терминах прямого времени [21]. Однако результаты проделанной Максимовым Е.А. работы так и не были опубликованы в связи с его безвременной кончиной, поэтому кратко и без доказательства приводятся (с некоторыми изменениями) в данном разделе. Для начала сформулируем вспомогательное утверждение, вытекающее из теоремы 1 и замечания 3.

Теорема 2 [24]. Пусть задана линейная дискретная нестационарная система F с моделью в пространстве состояний (3). Пусть также заданы числа $\tau \in [0; 1)$, $a \geq -\frac{m}{2} \ln(1 - \tau^2)$ и $\gamma > 0$. Следующие утверждения эквивалентны:

- (a, τ) -анизотропийная норма $\|F\|_{a, \tau}$ системы F ограничена числом γ , т.е. $\|F\|_{a, \tau} \leq \gamma$;
- существуют такие числа $\gamma_1 > 0$ и $\gamma_2 > 0$, что $\|F\|_b \leq \gamma_1$, $\|F\|_\infty \leq \gamma_2$ и $\gamma_1^2(1 - \tau^2) + \gamma_2^2 \tau^2 \leq \gamma^2$, где $b = a + \frac{m}{2} \ln(1 - \tau^2)$.

Из этой теоремы, в частности, следует, что критерий ограниченности нестационарной системы с нецентрированным возмущением связан с критерием ограниченности той же системы с центрированным возмущением (вернее, с возмущением, удовлетворяющим условию $\tau = 0$ и соответствующим образом измененным ограничением на анизотропию) и его предельным случаем $\lim_{a \rightarrow \infty} \|F\|_a = \|F\|_\infty$.

В теореме ниже приведен критерий ограниченности анизотропийной нормы для нестационарной системы вида (3) с центрированным возмущением в терминах обратного времени. Принимая во внимание обозначение $F_k = (A_k, B_k, C_k, D_k)$ для четверки матриц системы (3), для краткости изложения введем функцию

$$\begin{aligned} \Phi(F_k, q, R) = & A_k^T R A_k + q C_k^T C_k + \\ & + (A_k^T R B_k + q C_k^T D_k)(I_m - B_k^T R B_k - q D_k^T D_k)^{-1} (B_k^T R A_k + q D_k^T C_k). \end{aligned}$$

Еще раз отметим, что основа этого утверждения принадлежит Е.А. Максимуму.

Теорема 3. Пусть задана линейная дискретная нестационарная система F с моделью в пространстве состояний (3). Пусть также заданы числа $a \geq 0$ и $\gamma > 0$. Следующие утверждения эквивалентны:

- *a -анизотропийная норма системы F ограничена числом γ , т.е. $\|F\|_a \leq \gamma$;*
- *существует такое число $q \geq 0$, что разностное уравнение Риккати $R_k = \Phi(F_k, q, R_{k+1})$, $R_{N+1} = 0$, имеет симметричное положительно определенное решение $R_k = R_k^T \succ 0$, удовлетворяющее неравенствам*

$$S_k = I_m - B_k^T R_{k+1} B_k - q D_k^T D_k \succ 0,$$

$$\sum_{k=0}^N \ln \det S_k \geq m \ln(1 - q\gamma^2) + 2a.$$

Доказательство. Доказательство данной теоремы включает в себя часть результатов работ [18, 21], которые не дублируются здесь, но к которым даются соответствующие отсылки. Все доказательство формально состоит из четырех частей. Во-первых, в [21] получены условия ограниченности анизотропийной нормы нестационарной системы в терминах *прямого* времени, но ход доказательства (до формулы (32)) сохраняет силу и в рассматриваемом здесь случае. Это в том числе приведет к тому, что решение задачи напрямую будет связано с матрицей $\Sigma(q) = (I - qF_{0:N}^T F_{0:N})^{-1}$, характеризующей “наихудшее” входное возмущение. Во-вторых, матрицу $\Sigma(q) = (I - qF_{0:N}^T F_{0:N})^{-1}$ можно факторизовать как $\Sigma(q) = G_{0:N}^{-T} G_{0:N}^{-1}$, что приводит к матричному уравнению $qF_{0:N}^T F_{0:N} + G_{0:N}^{-T} G_{0:N}^{-1} = I$, представимому в более компактном виде

$$\Theta^T \Theta = I, \quad \Theta = \begin{bmatrix} \sqrt{q} F_{0:N} \\ G_{0:N}^{-1} \end{bmatrix}.$$

Матрица Θ отождествима с системой с (A, B, C, D) -представлением

$$\Theta \sim \left[\begin{array}{c|c} A_k & B_k \\ \hline \sqrt{q}C_k & \sqrt{q}D_k \\ \hline -S_k^{-1/2}L_k & S_k^{-1/2} \end{array} \right].$$

В-третьих, если воспользоваться леммой 7 работы [18], то для выполнения условия $\Theta^T \Theta = I$ достаточно потребовать существования решения уравнения Риккати $R_k = \Phi(F_k, q, R_{k+1})$, $R_{N+1} = 0$, причем использованные выше вспомогательные матрицы L_k и S_k имеют вид

$$L_k = S_k^{-1}(B_k^T R_{k+1} A_k + q D_k^T C_k),$$

$$S_k = (I_m - B_k^T R_{k+1} B_k - q D_k^T D_k).$$

Наконец, возвращаясь снова к [21] (к заключительной части доказательства), получаем, что условие ограниченности анизотропии вектора $W_{0:N}$ входных сигналов может быть переписано в виде

$$\sum_{k=0}^N \ln \det S_k \geq m \ln(1 - q\gamma^2) + 2a,$$

что завершает доказательство.

В [24, теорема 3] был приведен похожий результат, но, поскольку в ней решалась задача управления, его формулировка дана в терминах решения уравнений Риккати в прямом (а не обратном) времени.

Следующая теорема устанавливает достаточные условия ограниченности анизотропийной нормы нестационарной системы в терминах разностных неравенств Риккати в обратном времени.

Теорема 4. Пусть задана линейная дискретная нестационарная система F с моделью в пространстве состояний (3). Пусть также заданы числа $\tau \in [0; 1)$, $a \geq -\frac{m}{2} \ln(1 - \tau^2)$ и $\gamma > 0$. Следующие утверждения эквивалентны:

- *(a, τ) -анизотропийная норма $\|F\|_{a, \tau}$ системы F ограничена числом γ , т.е. $\|F\|_{a, \tau} \leq \gamma$;*
- *существуют такие числа $\gamma_1 > 0$ и $\gamma_2 > 0$, связанные условием $\gamma_1^2(1 - \tau^2) + \gamma_2^2 \tau^2 \leq \gamma^2$, и такое число $q \geq 0$, что разностные неравенства Риккати $P_k \succ \Phi(F_k, q, P_{k+1})$, $P_{N+1} = 0$ и $\tilde{P}_k \succ \Phi(F_k, q, \tilde{P}_{k+1})$, $\tilde{P}_{N+1} = 0$ имеют положительно определенные решения $P_k \succ 0$, $\tilde{P}_k \succ 0$, удовлетворяющие неравенствам*

$$Q_k = I_m - B_k^T P_{k+1} B_k - q D_k^T D_k \succ 0,$$

$$\sum_{k=0}^N \ln \det Q_k \geq m \ln(1 - \tau^2) + 2b,$$

$$\text{где } b = a + \frac{m}{2} \ln(1 - \tau^2).$$

Доказательство теоремы основано на хорошо известных свойствах монотонности решения разностных уравнений Риккати.

Следующим стандартным в рамках анизотропийной теории шагом является переход от строгих формул вычисления анизотропийной нормы с использованием решения уравнений Риккати к условию ее ограниченности, опирающемуся на матричные неравенства Риккати, полученные из соответствующих уравнений в силу свойства монотонности их решения. К полученным неравенствам применяется лемма Шура, в результате чего имеем достаточные условия ограниченности анизотропийной нормы в терминах линейных матричных неравенств. Данные выкладки достаточно громоздки и потому опущены, но их аналоги, связанные с решением задачи управления, можно проследить в [24]. Таким образом, достаточные условия ограниченности анизотропийной нормы нестационарной системы имеют следующий вид.

Теорема 5. Пусть задана линейная дискретная нестационарная система F с моделью в пространстве состояний (3). Пусть также заданы $b = a + \frac{m}{2} \ln(1 - \tau^2) \geq 0$ и $\gamma > 0$. Анизотропийная норма системы удовлетворяет ограничению $\|F\|_b \leq \gamma$, если существуют число $\eta \geq 0$ и такие положительно определенные матрицы M_k и Ψ_k , что линейные матричные неравенства

$$\begin{bmatrix} M_k & * & * & * \\ 0 & \eta I_m & * & * \\ M_{k+1}A_k & M_{k+1}B_k & M_{k+1} & * \\ C_k & D_k & 0 & I_p \end{bmatrix} \succ 0 \quad \text{при } k < N, \quad \begin{bmatrix} M_N & * & * \\ 0 & \eta I_m & * \\ C_N & D_N & I_p \end{bmatrix} \succ 0,$$

$$\begin{bmatrix} \eta I_m - \Psi_k & * & * \\ M_{k+1}B_k & M_{k+1} & * \\ D_k & 0 & I_p \end{bmatrix} \succ 0 \quad \text{при } k < N, \quad \begin{bmatrix} \eta I_m - \Psi_N & * \\ D_N & I_p \end{bmatrix} \succ 0$$

разрешимы, а их решения дополнительно удовлетворяют условию

$$\exp\left(-\frac{2b}{m}\right) (\det \Psi_k)^{1/m_w} \geq \eta - \gamma^2.$$

На основе сформулированной выше теоремы найдем коэффициенты субоптимального анизотропийного оценивателя для нестационарной системы.

4. Постановка и решение задачи фильтрации

Постановка и решение задачи субоптимальной анизотропийной фильтрации на конечном горизонте в прямом времени для случая $\tau = 0$ была представлена с доказательствами, рассмотрением предельных случаев и анализом численного примера в [23].

Рассмотрим линейную дискретную нестационарную систему F , заданную на конечном интервале времени $k = 0, \dots, N$, следующего вида:

$$(7) \quad \begin{aligned} x_{k+1} &= A_k x_k + B_k w_k, \\ y_k &= C_{y,k} x_k + D_{y,k} w_k, \\ z_k &= C_{z,k} x_k + D_{z,k} w_k, \end{aligned}$$

где $x_k \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния, $w_k \in \mathbb{R}^{m_w}$ – вектор внешнего возмущения, $y_k \in \mathbb{R}^{p_y}$ – измеряемый выход, $z_k \in \mathbb{R}^{p_z}$ – оцениваемый выход. Вещественные матрицы $A_k, B_k, C_{y,k}, D_{y,k}, C_{z,k}, D_{z,k}$ имеют согласованные с векторами размерности. На множество сигналов внешнего возмущения наложено ограничение в виде уровня анизотропии $\mathbf{A}(W) \leq a$ и задано число $\tau \in (0; 1)$.

Систему-оценитель векторов z_k будем искать в виде

$$(8) \quad \begin{aligned} \hat{x}_{k+1} &= (A_k - K_k C_{y,k}) \hat{x}_k + K_k y_k, \\ \hat{z}_k &= (C_{z,k} - L_k C_{y,k}) \hat{x}_k + L_k y_k, \end{aligned}$$

где $\hat{x}_k$ – состояние оценителя, а K_k и L_k – матрицы, подлежащие нахождению.

Система $T_{\tilde{z}w}$, связывающая на интервале времени $k = 0, \dots, N$ векторы w_k внешнего возмущения системы (7) и векторы ошибки $\tilde{z}_k = z_k - \hat{z}_k$, имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{k+1} &= (A_k - K_k C_{y,k}) \tilde{x}_k + (B_k - K_k D_{y,k}) w_k, \\ \tilde{z}_k &= (C_{z,k} - L_k C_{y,k}) \tilde{x}_k + (D_{z,k} - L_k D_{y,k}) w_k, \end{aligned}$$

где $\tilde{x}_k = x_k - \hat{x}_k$ – вектор ошибки состояния.

Задача 1. Для заданной системы F с моделью в пространстве состояний (7), числа $\tau \in (0; 1)$ и уровня анизотропии $a \geq -\frac{m}{2} \ln(1 - \tau^2)$ найти параметры оценителя с моделью в пространстве состояний (8), минимизирующие значение γ , где

$$\|T_{\tilde{z}w}\|_{a,\tau} \leq \gamma.$$

Применим к системе $T_{\tilde{z}w}$ утверждение теоремы 5. Тогда для ограниченности анизотропийной нормы системы в ошибках должны существовать число $\eta \geq 0$ и положительно определенные матрицы M_k и Ψ_k , удовлетворяющие линейным матричным неравенствам

$$\begin{bmatrix} M_k & * & * & * \\ 0 & \eta I_m & * & * \\ M_{k+1}(A_k - K_k C_{y,k}) & M_{k+1}(B_k - K_k D_{y,k}) & M_{k+1} & * \\ C_{z,k} - L_k C_{y,k} & D_{z,k} - L_k D_{y,k} & 0 & I_p \end{bmatrix} \succ 0 \quad \text{при } k < N,$$

$$\begin{bmatrix} M_N & * & * \\ 0 & \eta I_m & * \\ C_{z,N} - L_N C_{y,N} & D_{z,N} - L_N D_{y,N} & I_p \end{bmatrix} \succ 0,$$

$$\begin{bmatrix} M_k & * & * & * \\ 0 & \gamma_2^2 I_m & * & * \\ M_{k+1}(A_k - K_k C_{y,k}) & M_{k+1}(B_k - K_k D_{y,k}) & M_{k+1} & * \\ C_{z,k} - L_k C_{y,k} & D_{z,k} - L_k D_{y,k} & 0 & I_p \end{bmatrix} \succ 0 \quad \text{при } k < N,$$

$$\begin{bmatrix} M_N & * & * \\ 0 & \gamma_2^2 I_m & * \\ C_{z,N} - L_N C_{y,N} & D_{z,N} - L_N D_{y,N} & I_p \end{bmatrix} \succ 0,$$

$$\begin{bmatrix} \eta I_m - \Psi_k & * & * \\ M_{k+1}(B_k - K_k D_{y,k}) & M_{k+1} & * \\ (D_{z,k} - L_k D_{y,k}) & 0 & I_p \end{bmatrix} \succ 0 \quad \text{при } k < N,$$

$$\begin{bmatrix} \eta I_m - \Psi_N & * \\ D_{z,N} - L_N D_{y,N} & I_p \end{bmatrix} \succ 0,$$

причем их решения должны удовлетворять условиям

$$\gamma_1^2(1 - \tau^2) + \gamma_2^2\tau^2 \leq \gamma^2, \quad \exp\left(-\frac{2b}{m}\right) (\det \Psi_k)^{1/m_w} \geq \eta - \gamma_1^2.$$

Проведем замену $M_{k+1}K_k = Y_{k+1}$, в результате чего получим следующую задачу выпуклой оптимизации, в соответствии с решением которой определяются матрицы K_k и L_k оценщика:

$$\gamma^2 \rightarrow \min_{M_k, Y_k, \Psi_k, \eta, \gamma_1, \gamma_2}$$

при ограничениях

$$M_k = M_k^T \succ 0, \quad \Psi_k = \Psi_k^T \succ 0, \quad \eta \geq 0,$$

$$\begin{bmatrix} M_k & * & * & * \\ 0 & \xi I_{m_w} & * & * \\ M_{k+1}A_k - Y_{k+1}C_{y,k} & M_{k+1}B_k - Y_{k+1}D_{y,k} & M_{k+1} & * \\ C_{z,k} - L_k C_{y,k} & D_{z,k} - L_k D_{y,k} & 0 & I_{p_z} \end{bmatrix} \succ 0 \quad \text{при } k < N,$$

$$\begin{bmatrix} M_N & * & * \\ 0 & \xi I_{m_w} & * \\ C_{z,N} - L_N C_{y,N} & D_{z,N} - L_N D_{y,N} & I_{p_z} \end{bmatrix} \succ 0,$$

где в последних двух семействах матричных неравенств должны быть сделаны подстановки $\xi = \eta$ и $\xi = \gamma_2^2$,

$$\begin{bmatrix} \eta I_{m_w} - \Psi_k & * & * \\ M_{k+1}B_k - Y_{k+1}D_{y,k} & M_{k+1} & 0 \\ D_{z,k} - L_k D_{y,k} & 0 & I_{p_z} \end{bmatrix} \succ 0 \quad \text{при } k < N,$$

$$\begin{bmatrix} \eta I_{m_w} - \Psi_N & * \\ D_{z,N} - L_N D_{y,N} & I_{p_z} \end{bmatrix} \succ 0,$$

$$\gamma_1^2(1 - \tau^2) + \gamma_2^2 \tau^2 \leq \gamma^2, \quad \exp\left(-\frac{2b}{m}\right) (\det \Psi_k)^{1/m_w} \geq \eta - \gamma_1^2.$$

Если решение этой задачи найдено, то матрицы K_k оценивателя находятся как $K_k = M_{k+1}^{-1} Y_{k+1}$.

5. Пример

В рамках примера рассмотрим систему

$$\begin{aligned} x_{1,k+1} &= -0,3x_{2,k} + \sin(3k)w_k, \\ x_{2,k+1} &= 0,2(1 + \sin(3k))x_{1,k} - 0,3x_{2,k} - 0,03w_k, \\ z_k &= 0,5x_{1,k} + 0,5\sin(3k)x_{2,k}, \\ y_{1,k} &= (-2 + 0,3\sin(5k))x_{1,k} + 0,5x_{2,k} + 0,1\sin(3k)w_k, \\ y_{2,k} &= x_{2,k} + 0,2w_k \end{aligned}$$

с начальным состоянием $x_1(0) = 0,26$, $x_2(0) = -0,2$.

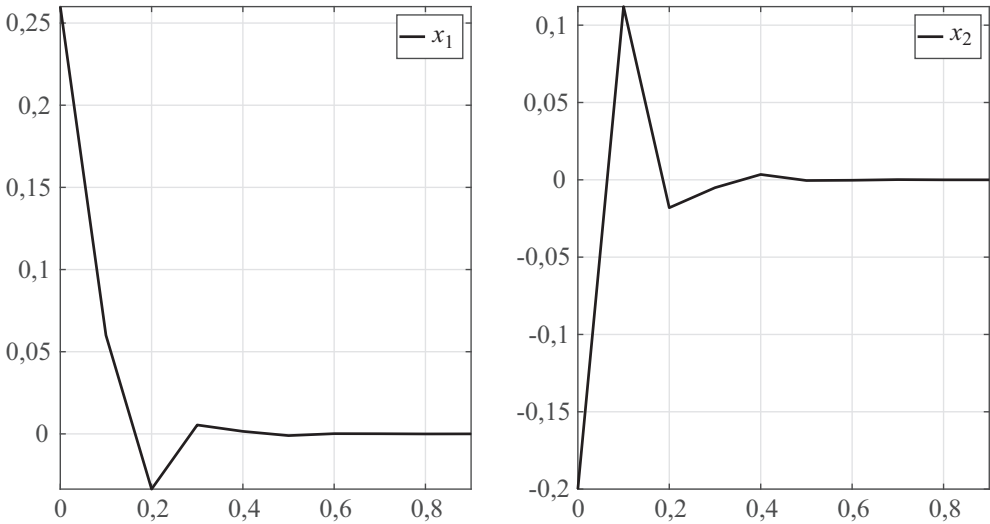


Рис. 1. Динамика переменных x_1 и x_2 в отсутствие внешнего возмущения (представлена только первая секунда времени).

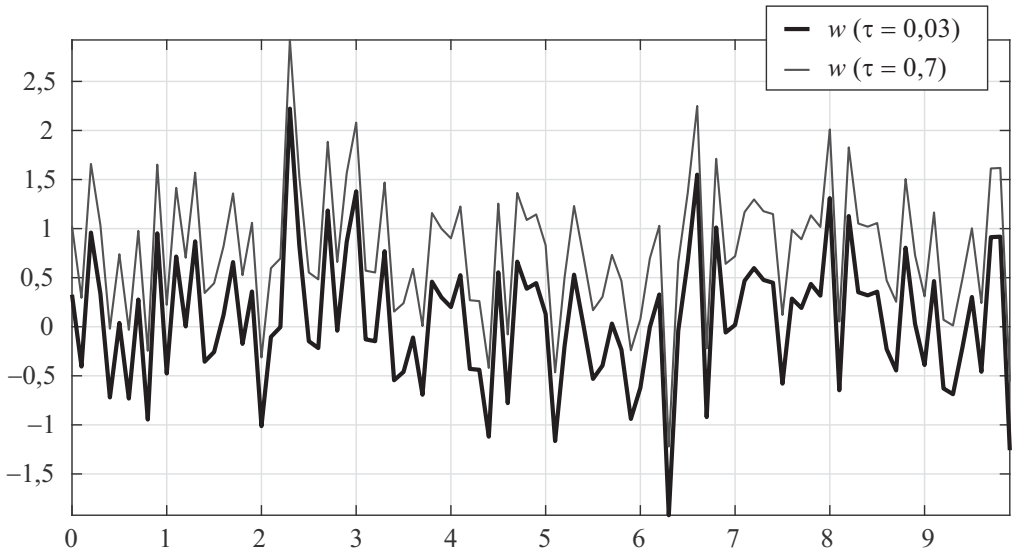


Рис. 2. Внешнее возмущение w . Случаи $\tau = 0,03$, $a = 10$ и $\tau = 0,7$, $a = 40$.

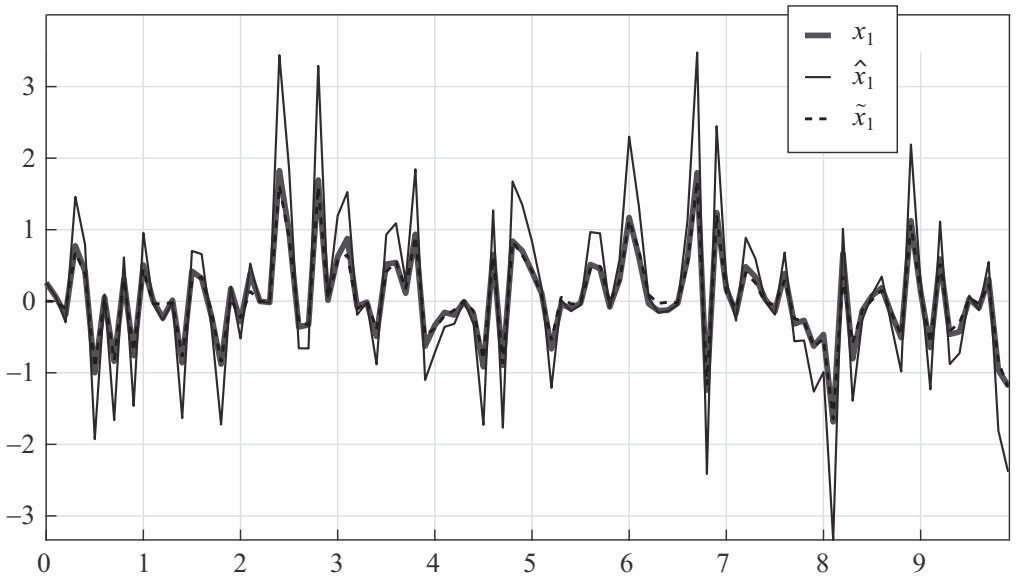


Рис. 3. Динамика переменной x_1 . Случаи $\tau = 0,03$, $a = 10$.

Для расчета были выбраны следующие данные: интервал времени $T = 10$ с, шаг дискретизации $\Delta t = 0,1$ с, значения анизотропии возмущения при $\tau = 0,03$ выбираются равными $a = 0,05$, $a = 10$ и $a = 100$ соответственно, значения анизотропии возмущения при $\tau = 0,7$ выбираются равными $a = 35$, $a = 40$ и $a = 100$ соответственно. Расчеты произведены в среде программирования MATLAB с использованием пакетов Yalmip и Sedumi [25, 26].

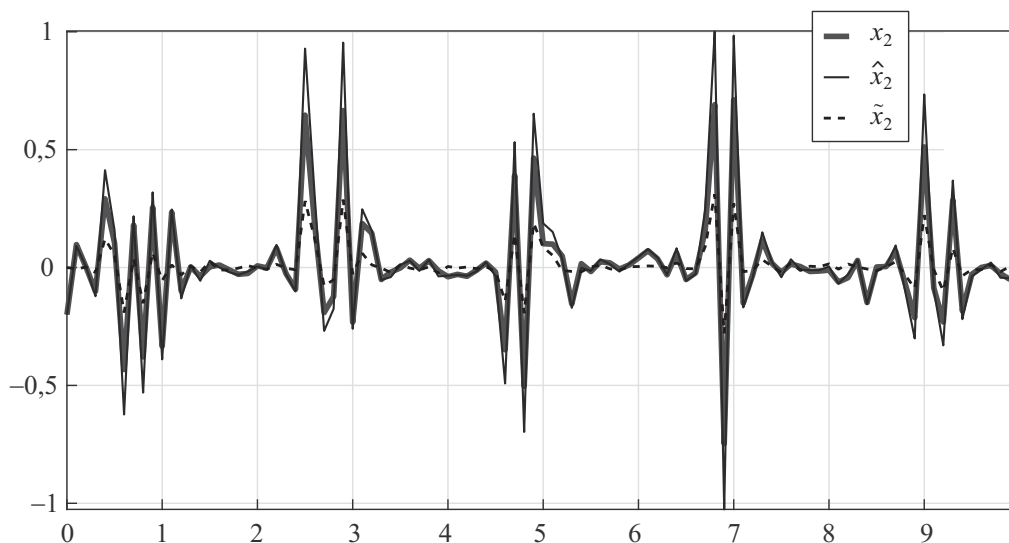


Рис. 4. Динамика переменной x_2 . Случай $\tau = 0,03$, $a = 10$.

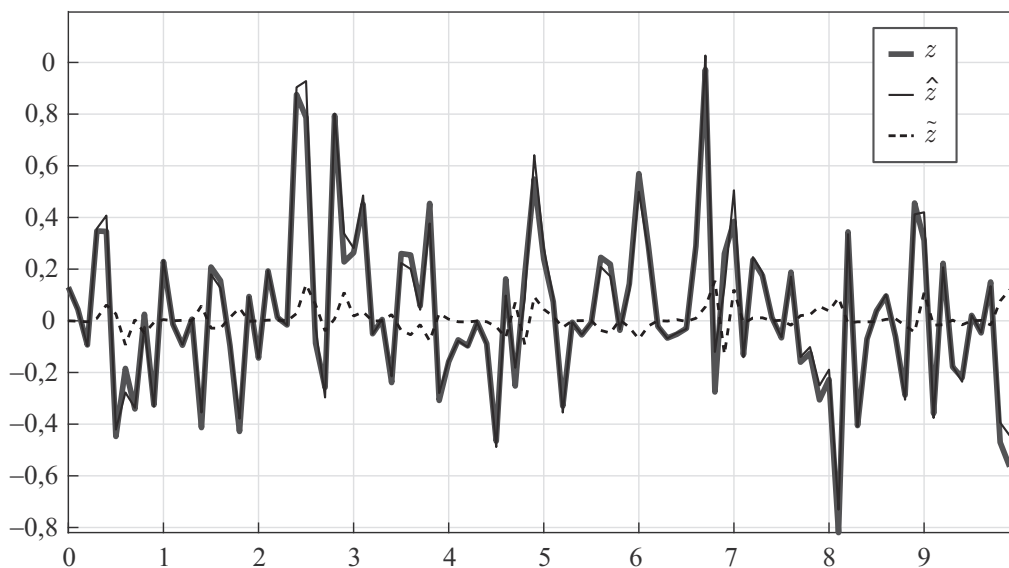


Рис. 5. Динамика переменной z . Случай $\tau = 0,03$, $a = 10$.

На рис. 1 показаны переменные x_1 и x_2 системы (в первую секунду времени) в отсутствие внешних возмущений. На рис. 2 показаны используемые при моделировании возмущения w для случаев $\tau = 0,03$, $a = 10$ и $\tau = 0,7$, $a = 40$. На рис. 3 показаны переменная x_1 , ее оценка и ошибка оценивания; на рис. 4 – переменная x_2 , ее оценка и ошибка оценивания; на рис. 5 – выход z , а также его оценка и ошибка оценивания. Все графики приведены для случая $\tau = 0,03$, $a = 10$. На рис. 6–8 приведены аналогичные переменные для случая

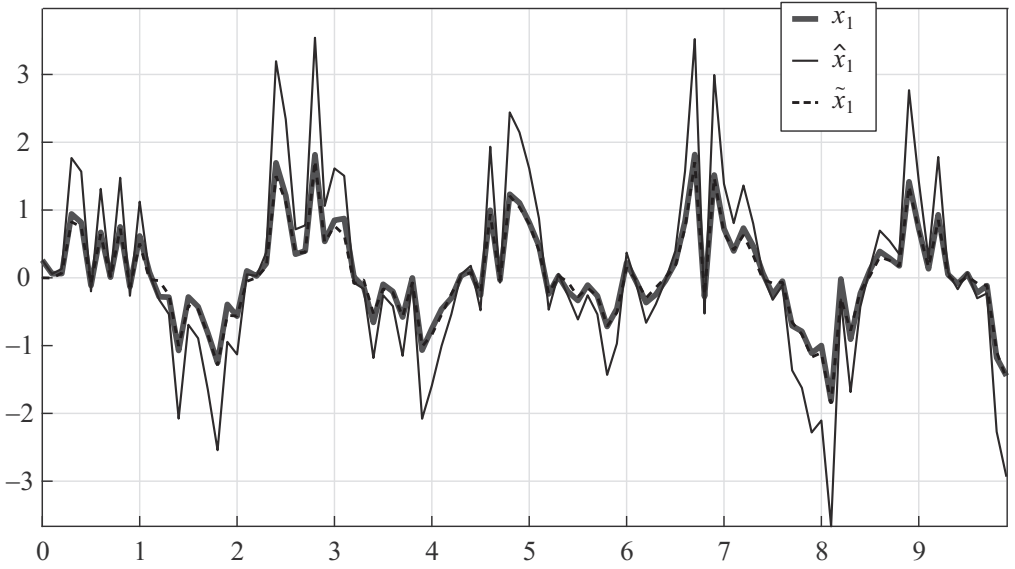


Рис. 6. Динамика переменной x_1 . Случай $\tau = 0,7$, $a = 40$.

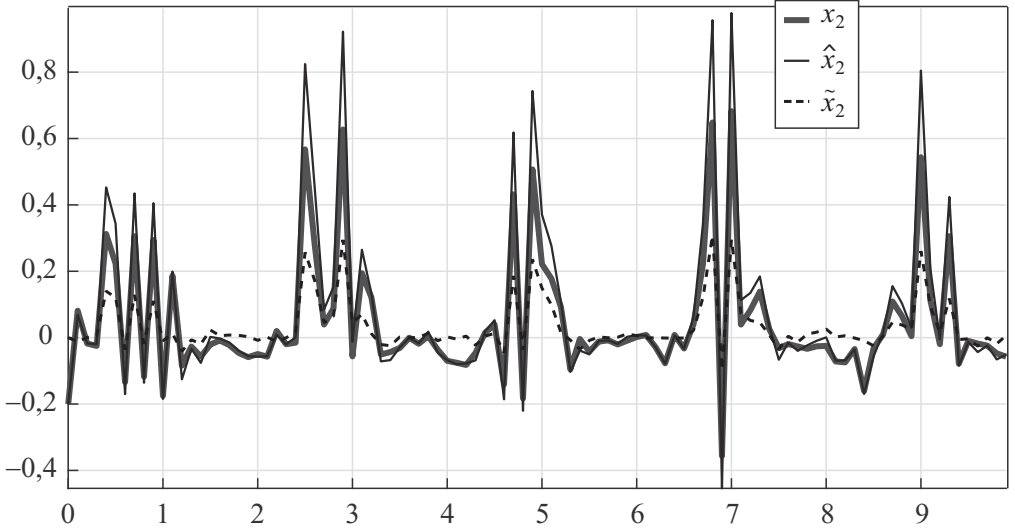


Рис. 7. Динамика переменной x_2 . Случай $\tau = 0,7$, $a = 40$.

$\tau = 0,7$, $a = 40$. Из рисунков следует, что анизотропный оценщик адекватно оценивает выход системы как при наличии (почти) центрированного возмущения, так и в случае нецентрированного.

Для сравнения значений анизотропной нормы системы для разных случаев с ее границами ($\|T_{zw}\|_2/\sqrt{m} = 0,0511$, $\|T_{zw}\|_\infty = 0,0970$) приведена таблица, из которой наглядно видно, что анизотропная норма занимает промежуточное положение между масштабированной $\mathcal{H}_2$ - и $\mathcal{H}_\infty$ -нормами.

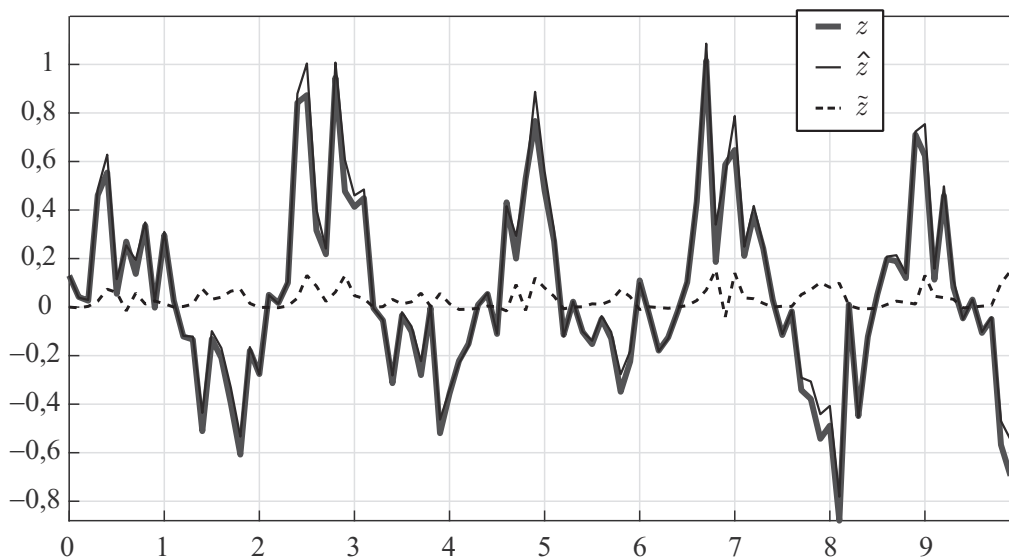


Рис. 8. Динамика переменной z . Случай $\tau = 0,7$, $a = 40$.

Значения анизотропийной нормы для различных пар (a, τ)

τ	0,03			0,7		
a	0,05	10	100	35	40	100
$\ T_{zw}\ _{a,\tau}$	0,0513	0,0683	0,0931	0,0791	0,0818	0,0930

6. Заключение

В работе кратко приводятся результаты, касающиеся вычисления и критерия ограниченности анизотропийной нормы нестационарной системы. На их основе приводится решение задачи синтеза субоптимального анизотропийного оценителя в обратном времени. Показано, что решение этой задачи соответствует решению некоторой задачи выпуклой оптимизации. Для демонстрации качества работы оценителя для простой системы приведен численный пример.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Anderson B.D.O., Moore J.B.* Optimal filtering. Englewood Cliffs. N.J.: Prentice Hall, 1979.
2. *Hassibi B., Sayed A., Kailath T.* Indefinite Quadratic Estimation and Control: A Unified Approach to $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ Theories. SIAM, Philadelphia, 1999.
3. *Simon D.* Optimal State Estimation: Kalman, $\mathcal{H}_\infty$, and Nonlinear Approaches. New Jersey: John Wiley and Sons, 2006.
4. *Zhou K., Glover K., Bodenheimer B., Doyle J.* Mixed H_2 and H_∞ performance objectives I: Robust performance analysis // IEEE Trans. Automat. Control. 1994. V. 39. P. 1564–1574.
5. *Haddad W.M., Bernstein D.S., Mustafa D.* Mixed-norm $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ regulation and estimation: the discrete-time case // Syst. Control Lett. 1991. V. 16. No. 4. P. 235–247.

6. *Khargonekar P.P., Rotea M.A., Baeyens E.* Mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ filtering // Int. J. Robust Nonlinear Control. 1996. V. 6. P. 313–330.
7. *Bernstein D.S., Haddad W.M.* Steady-state Kalman filtering with an $\mathcal{H}_\infty$ error bound // Syst. Control Lett. 1989. V. 12. P. 9–16.
8. *Limebeer D.J.N., Anderson B.D.O., Hendel B.* Mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ filtering by the theory of Nash games/ Proc. Workshop Robust Control. Tokyo. Japan. 1992. P. 9–15.
9. *Huaizhong Li., Minyue Fu.* A Linear Matrix Inequality Approach to Robust $\mathcal{H}_\infty$ Filtering // IEEE Trans. Signal Proc. 1997. V. 45. No. 9. P. 2338–2350.
10. *Wang Z., Unbehauen H.* Robust $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ state estimation for systems with error variance constraints: The continuous-time case // IEEE Trans. Automat. Control 1999. V. 44. P. 1061–1065.
11. *Palhares R.M., Peres P.L.D.* LMI approach to the mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ filtering design for discrete-time uncertain systems // IEEE Trans. Aerospace Electron. Syst. 2001. V. 37. No. 1. P. 292–296.
12. *Semyonov A.V., Vladimirov I.G., Kurdjukov A.P.* Stochastic approach to H_∞ -optimization // Proc. 33 IEEE Conf. Decision Control. Florida(USA). 1994. P. 2249–2250.
13. *Владимиров И.Г., Курдюков А.П., Семенов А.В.* Стохастическая проблема H_∞ -оптимизации // Докл. РАН. 1995. Т. 343. № 5. С. 607–609.
14. *Владимиров И.Г., Курдюков А.П., Семенов А.В.* Анизотропия сигналов и энтропия линейных стационарных систем // Докл. АН. 1995. Т. 342. № 5. С. 583–585.
15. *Vladimirov I.G., Kurdjukov A.P., Semyonov A.V.* On computing the anisotropic norm of linear discrete-time-invariant systems // Proc. 13 IFAC World Congr., San-Francisco, California, USA, June 30–July 5. 1996.
16. *Vladimirov I.G., Kurdjukov A.P., Semyonov A.V.* State-space solution to anisotropy-based stochastic $\mathcal{H}_\infty$ -optimization problem // Proc. 13 IFAC World Congr. San-Francisco(USA). 1996. P. 427–432.
17. *Vladimirov I.G.* Anisotropy-based optimal filtering in linear discrete time invariant systems // CADSMAP Res. Report 01-03, 2001, arXiv: 1412.3010 [completed in 2001].
18. *Владимиров И.Г., Даймонд Ф., Клоеден П.* Анизотропный анализ робастного качества линейных нестационарных дискретных систем на конечном временном интервале // АиТ. 2006. № 8. С. 92–111.
Vladimirov I.G., Diamond P., Kloeden P. Anisotropy-based Robust Performance Analysis of Finite Horizon Linear Discrete Time Varying Systems // Autom. Remote Control. 2006. V. 67. No 8. P. 1265–1282.
19. *Кустов А.Ю., Тимин В.Н.* Анизотропный анализ нестационарных систем на конечном интервале времени при нецентрированном возмущении // АиТ. 2017. № 6. С. 18–35.
Kustov A.Yu., Timin V.N. Anisotropy-based Analysis for Finite Horizon Time-varying Systems with Non-centered Disturbances // Autom. Remote Control. 2017. V. 78. No. 6. P. 974–988.
20. *Vladimirov I., Diamond P.* Robust filtering in finite horizon linear discrete time varying systems by minimum anisotropic norm criterion // CADSMAP Res. Report 01-05, 2001. [completed in 2001].
21. *Maximov E.A., Kurdjukov A.P., Vladimirov I.G.* Anisotropic Norm Bounded Real Lemma for Linear Time-Varying System // Preprint 18-th IFAC World Congr. Milano. 2011. P. 4701–4706.

22. *Yaesh I., Stoica A.-M.* Linear Time-Varying Anisotropic Filtering its Application to Nonlinear Systems State Estimation // Proc. Eur. Control Conf. Strasburg. 2014. June 24-27. P. 975-980.
23. *Тимин В.Н., Курдюков А.П.* Субоптимальная анизотропийная фильтрация на конечном горизонте // АиТ. 2016. № 1. С. 5-29.
Timin V.N., Kurdyukov A.P. Suboptimal Anisotropic Filtering in a Finite Horizon // Autom. Remote Control. 2016. V. 77. No. 1. P. 1-20.
24. *Kustov A.Yu., Timin V.N.* Suboptimal Anisotropy-based Control for Linear Discrete Time Varying Systems with Noncentered Disturbances // Proc. 13th IFAC World Congr., Toulouse, France, July 9-14. 2017. P. 6296-6301.
25. *Lofberg J.* YALMIP: A Toolbox for Modeling and Optimization in MATLAB // Proc. CACSD Conf. Taipei, Taiwan. 2004.
Available from <http://users.isy.liu.se/johanl/yalmip/>
26. *Sturm J.F.* Using SeDuMi 1.02, a MATLAB Toolbox for Optimization Over Symmetric Cones // Optim. Methods Software. 1999. V. 11. P. 625-653.

Статья представлена к публикации членом редколлегии П.С. Щербаковым.

Поступила в редакцию 29.12.2017

После доработки 26.04.2018

Принята к публикации 08.11.2018