

УДК 521.1

РАЗЛОЖЕНИЕ КОМПЛАНАРНОГО ПОТЕНЦИАЛА КОЛЬЦА ГАУССА В РЯД ПО СТЕПЕНЯМ ЭКСЦЕНТРИСИТЕТА

© 2021 г. Б. П. Кондратьев^{a, b, *}, В. С. Корноухов^a, Н. Г. Трубицына^c^aМосковский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Физический факультет,
Государственный астрономический институт им. П.К. Штернберга, Москва, Россия^bГлавная (Пулковская) астрономическая обсерватория РАН, Санкт-Петербург, Россия^cУдмуртский государственный университет, Ижевск, Россия

*E-mail: work@boris-kondratyev.ru

Поступила в редакцию 08.11.2020 г.

После доработки 30.12.2020 г.

Принята к публикации 03.01.2021 г.

Поставлена и решена задача о разложении потенциала почти кругового эллиптического кольца Гаусса в ряд по степеням эксцентриситета. Гравитационный потенциал кольца представлен степенным рядом до членов e^4 включительно на всем множестве точек главной плоскости кольца. Основным результатом: получены два комплекта коэффициентов для степенных рядов потенциала внутри и вне кольца, которые выражаются через полные эллиптические интегралы первого и второго рода. Для контроля формул используются преобразования Ландена. Доказано, что в точке активного фокуса кольца четыре коэффициента первого комплекта обращаются в нуль. Результаты расчетов применяются для построения эквипотенциалов колец Гаусса, моделирующих орбиты планет Солнечной системы.

Ключевые слова: эллиптические кольца Гаусса, гравитационный потенциал, разложение в ряд по степеням эксцентриситета, эквипотенциалы, орбиты планет

DOI: 10.31857/S0320930X21030026

ВВЕДЕНИЕ

Для решения многих задач в небесной механике необходимо знать силовые поля гравитирующих тел разной формы. В русле современной динамической астрономии лежит исследование силовых полей тора (Кондратьев и др., 2009) и кольцевых структур (Субботин, 1968; Вашковьяк, 1982; М.А. Вашковьяк, С.Н. Вашковьяк, 2012). Это объясняется не только обилием наблюдаемых в Солнечной системе кольцевых структур, но и фундаментальным значением их теоретического описания для небесной механики.

Представление о специальных эллиптических кольцах ввел в 1818 г. Гаусс. Гауссово кольцо получается при “размазывании” точечной массы m , двигающейся вокруг массивного центрального тела по эллиптической орбите

$$r(\nu) = \frac{p}{1 + e \cos \nu}, \quad p = a_1(1 - e^2), \quad (1)$$

где ν — угол истинной аномалии, a_1 и e — большая полуось и эксцентриситет орбиты; при этом получается неоднородный материальный эллипс с

одномерной плотностью вещества, обратной скорости движения спутника на данном участке траектории. Элемент массы такого кольца на угловом интервале $d\nu$ равен

$$dm = \frac{m}{2\pi} \frac{(1 - e^2)^{\frac{3}{2}}}{(1 + e \cos \nu)^2} d\nu, \quad (2)$$

где m — полная масса кольца. Потенциал кольца в произвольной пространственной точке x_i дается интегралом (см. Дубошин, 1961):

$$\varphi(x) = \frac{Gm}{2\pi} (1 - e^2)^{\frac{3}{2}} \times \int_0^{2\pi} \frac{d\nu}{(1 + e \cos \nu)^2 \sqrt{(x_1 - r \cos \nu)^2 + (x_2 - r \sin \nu)^2 + x_3^2}}. \quad (3)$$

Сам Гаусс ограничился изучением компонент силы такого кольца, а потенциал кольца Гаусса в конечном аналитическом виде был найден срав-

нительно недавно (Кондратьев, 2007; 2012; см. также Антонов и др., 2008):

$$\Phi_{\text{кольца}}(x_1, x_2, x_3) = \frac{2Gm}{\pi\sqrt{\lambda - v}} \times \left\{ K(k) + \frac{ea_1(x_1 + ea_1)}{a_1^2 + v} [\Pi(n, k) - K(k)] \right\}, \quad (4)$$

$$n = \frac{a_1^2 + v}{v - \lambda}, \quad k = \sqrt{\frac{\mu - v}{\lambda - v}} \leq 1.$$

Здесь $K(k)$ и $\Pi(n, k)$ – стандартные полные эллиптические интегралы Лежандра первого и третьего рода

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}};$$

$$\Pi(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{(1 - n \sin^2 x) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}}. \quad (5)$$

В выражение (4) входят эллипсоидальные координаты пробной точки (μ, v, λ) , связанные с декартовыми координатами (x_1, x_2, x_3) формулами Виета

$$\begin{aligned} \lambda + \mu + v &= (x_1 + ea_1)^2 + x_2^2 + x_3^2 - a_1^2 - a_2^2, \\ \mu v + \mu \lambda + \lambda v &= \\ &= a_1^2 a_2^2 \left(1 - \frac{(x_1 + ea_1)^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} \right) - x_3^2 (a_1^2 + a_2^2), \quad (6) \\ \lambda \mu v &= x_3^2 a_1^2 a_2^2. \end{aligned}$$

Начало системы отсчета расположено в активном фокусе эллипса и уравнение кольца в декартовых координатах (см. также формулу (1)) имеет вид

$$\frac{(x_1 + ea_1)^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 1. \quad (7)$$

Для астрономических приложений важно учитывать, что орбиты у большинства планет и их спутников в Солнечной системе почти круговые, поэтому соответствующие этим орбитам кольца Гаусса также являются эллипсами с небольшими эксцентриситетами. Таким образом, для исследования вековой эволюции орбит планет и спутников в Солнечной системе достаточно иметь потенциал кольца Гаусса в виде ряда по степеням эксцентриситета e . Один из примеров применения потенциала кольца в виде степенного ряда дан в работе (Кондратьев, Корноухов, 2020), где было найдено выражение взаимной энергии двух гравитирующих компланарных колец Гаусса.

Представление потенциала кольца Гаусса в виде ряда по степеням эксцентриситета e является актуальной и, вместе с тем, сложной задачей.

В данной работе эта задача решена для частного случая, когда пробные точки находятся в плоскости самого кольца. Решение задачи для потенциала получено в виде ряда до членов e^4 включительно и определено на всем множестве точек плоскости кольца внутри и вне его. Работа состоит из двух частей. В первой части разработан оригинальный метод решения поставленной задачи для *внутреннего* потенциала кольца Гаусса. Получены все пять коэффициентов степенного ряда. Далее решается аналогичная задача о разложении *внешнего* потенциала кольца Гаусса. Полученные формулы применяются для расчета эквипотенциалей орбит планет Солнечной системы.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ О РАЗЛОЖЕНИИ ВНУТРЕННЕГО ПОТЕНЦИАЛА КОЛЬЦА

Отправной для нас является основная формула (4) для пространственного потенциала кольца Гаусса (Кондратьев, 2012). Здесь мы изучаем частный случай, когда пробные точки лежат в главной плоскости кольца, т.е.

$$x_3 = 0. \quad (8)$$

Данная задача естественно распадается на две. Вначале рассмотрим задачу, когда потенциал определен на двумерном множестве пробных точек *внутри* кольца. В этом случае, как следует из формул (4) и (6), третью эллипсоидальную координату пробной точки следует положить равной нулю, $\lambda = 0$. Тогда эллипсоидальные координаты пробной точки будут связаны соотношениями

$$\begin{aligned} \lambda = 0, \quad \mu + v &= (x_1 + ea_1)^2 + x_2^2 - a_1^2 - a_2^2, \\ \mu v &= a_1^2 a_2^2 \left(1 - \frac{(x_1 + ea_1)^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} \right). \quad (9) \end{aligned}$$

С учетом этого, формула (4) несколько упрощается:

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{ring}}(x_1, x_2, 0) &= \frac{2Gm}{\pi\sqrt{-v}} \times \\ &\times \left\{ K(\tilde{k}) + \frac{ea_1(x_1 + ea_1)}{a_1^2 + v} [\Pi(n, \tilde{k}) - K(\tilde{k})] \right\}, \quad (10) \\ n &= \frac{a_1^2 + v}{v}, \quad \tilde{k} = \sqrt{\frac{\mu - v}{-v}}. \end{aligned}$$

Решая систему двух последних уравнений в (9), находим две эллипсоидальные координаты

пробной точки μ и ν , связанные неравенством $\mu > \nu$:

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{T_1}{2} + \sqrt{\frac{T_1^2}{4} - T_2}; \\ \nu &= \frac{T_1}{2} - \sqrt{\frac{T_1^2}{4} - T_2}; \\ T_1 &= (x_1 + ea_1)^2 + x_2^2 - a_1^2 - a_2^2 \leq 0; \\ T_2 &= a_1^2 a_2^2 \left(1 - \frac{(x_1 + ea_1)^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} \right) \geq 0.\end{aligned}\quad (11)$$

Требуется разложить потенциал (10) в пробной точке (x_1, x_2) внутри кольца в ряд по степеням малого e . Задачу будем решать поэтапно. Вначале раскладываем в ряды по e эллипсоидальные координаты (μ, ν) из (11); затем находим ряды для параметра n и для модуля эллиптических интегралов $\tilde{k}$ из (10). Далее проводится разложение в ряды самих эллиптических интегралов. В конце длинной цепочки расчетов результаты объединяются.

В данной работе разложение потенциала кольца Гаусса мы проводим до членов четвертой степени эксцентриситета e^4 включительно

$$\Phi_{ring} \approx \frac{2Gm}{\pi a_1} (\varphi_0 + \varphi_1 e + \varphi_2 e^2 + \varphi_3 e^3 + \varphi_4 e^4). \quad (12)$$

Необходимо следить за тем, чтобы на каждом этапе все расчеты проводились с требуемой точностью. В частности, ряды для эллипсоидальных координат пробной точки с точностью до e^3 (в связи с этим, см. Примечание 1) включительно имеют вид:

$$\begin{aligned}\nu &\approx -a_1^2 \left(1 - \frac{x_1^2}{r^2} e^2 - \frac{2a_1 x_1 x_2}{r^4} e^3 \right); \\ \frac{1}{\nu} &\approx -\frac{1}{a_1^2} \left(1 + \frac{x_1^2}{r^2} e^2 + \frac{2a_1 x_1 x_2}{r^4} e^3 \right); \\ \frac{1}{\sqrt{-\nu}} &\approx \frac{1}{a_1} + \frac{x_1^2}{2a_1 r^2} e^2 + \frac{x_1 x_2}{r^4} e^3; \\ \mu &\approx -a_1^2 + r^2 + 2a_1 x_1 e + a_1^2 \left(1 + \frac{x_2^2}{r^2} \right) e^2 - \frac{2a_1^3 x_1 x_2}{r^4} e^3; \\ r^2 &= x_1^2 + x_2^2.\end{aligned}\quad (13)$$

С учетом формул (13), ряды для параметра n и модуля эллиптических интегралов $\tilde{k}$ из (10) будут такими

$$n \approx -\frac{x_1^2}{r^2} e^2 - \frac{2a_1 x_1 x_2}{r^4} e^3; \quad (14)$$

$$\begin{aligned}\tilde{k} &\approx k + \frac{x_1}{r} e + s_2 e^2 + s_3 e^3; \quad k = \frac{r}{a_1}; \\ s_2 &= \frac{2x_2^2 - (1 - k^2)x_1^2}{2a_1^2 k^3}; \\ s_3 &= -x_1 \frac{x_2^2(6 - 2k^2) - x_1^2(1 + k^2)}{2a_1^3 k^5}.\end{aligned}\quad (15)$$

Из (14) видно, что параметр $n \sim e^2$ также мал, поэтому разность эллиптических интегралов в квадратных скобках в (10) достаточно представить с точностью до e^3 включительно в виде

$$\begin{aligned}\Pi(n, \tilde{k}) - K(\tilde{k}) &\approx n \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x dx}{(1 - n \sin^2 x) \sqrt{1 - \tilde{k}^2 \sin^2 x}} \approx \\ &\approx n \int_0^{\pi/2} \frac{(1 + n \sin^2 x) \sin^2 x dx}{\sqrt{1 - \tilde{k}^2 \sin^2 x}} \approx \\ &\approx n \int_0^{\pi/2} \frac{\left(1 - \frac{x_1^2}{r^2} e^2 \sin^2 x \right) \sin^2 x dx}{\sqrt{1 - \tilde{k}^2 \sin^2 x}}.\end{aligned}\quad (16)$$

Используя соотношение

$$\frac{n}{a_1^2 + \nu} = \frac{1}{\nu}, \quad (17)$$

во втором члене потенциала (10) можно исключить малый знаменатель $a_1^2 + \nu$; это позволит в дальнейших расчетах исключить операцию раскрытия сложной неопределенности типа $\frac{0}{0}$. Подставляя в (16) модуль $\tilde{k}$ из (14) и ряд для $\frac{1}{\nu}$ из (13), имеем

$$\begin{aligned}S &= \frac{\Pi(n, \tilde{k}) - K(\tilde{k})}{a_1^2 + \nu} \approx -\frac{1}{a_1^2} \times \\ &\times \int_0^{\pi/2} \left(1 + \frac{x_1^2}{r^2} e^2 \right) \frac{\left(1 - \frac{x_1^2}{r^2} e^2 \sin^2 x \right) \sin^2 x dx}{\sqrt{1 - \left(k + \frac{x_1}{r} e + s_2 e^2 \right)^2 \sin^2 x}}.\end{aligned}\quad (18)$$

Заметим, что при подстановке $\tilde{k}$ из (15) в (18) достаточно сохранить в самом модуле только члены до e^2 , так как в (10) перед S уже входит дополнительный малый множитель $ea_1(x_1 + ea_1)$.

Теперь предстоит вычислить интеграл (18). Раскладывая в ряд подынтегральное выражение в (18), после многих выкладок, с требуемой точностью находим

$$S \approx -\frac{1}{a_1^2} \left\{ I_{12} + \frac{kx_1}{r} I_{34} e + e^2 \times \right. \\ \left. \times \left[\frac{k^2 x_1^2 + 2x_2^2}{2r^2} I_{34} + \frac{3k^2 x_1^2}{2r^2} I_{56} + \frac{x_1^2}{r^2} (I_{12} - I_{14}) \right] \right\}. \quad (19)$$

Здесь через I_{ij} обозначены вспомогательные интегралы

$$I_{ij} = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{2j} x}{(1 - k^2 \sin^2 x)^{\frac{i}{2}}} dx. \quad (20)$$

Так как необходимые интегралы вида (20) в большинстве справочников отсутствуют (см., например, Прудников и др., 2008), мы приводим их ниже:

$$I_{10} = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}} = K(k); \quad (21)$$

$$I_{12} = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x dx}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}} = \frac{K(k) - E(k)}{k^2}; \quad (22)$$

$$I_{32} = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x dx}{(1 - k^2 \sin^2 x)^{\frac{3}{2}}} = \frac{E(k)}{k^2(1 - k^2)} - \frac{K(k)}{k^2}; \quad (23)$$

$$I_{14} = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^4 x dx}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}} = \\ = -\frac{2(1 + k^2)E(k)}{3k^4} + \frac{1(2 + k^2)K(k)}{3k^4}; \quad (24)$$

$$I_{34} = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^4 x dx}{(1 - k^2 \sin^2 x)^{\frac{3}{2}}} = \frac{(2 - k^2)E(k)}{k^4(1 - k^2)} - \frac{2K(k)}{k^4}; \quad (25)$$

$$I_{54} = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^4 x dx}{(1 - k^2 \sin^2 x)^{\frac{5}{2}}} = \\ = -\frac{2(1 - 2k^2)E(k)}{3k^4(1 - k^2)^2} + \frac{1(2 - 3k^2)K(k)}{3k^4(1 - k^2)}; \quad (26)$$

$$I_{56} = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^6 x dx}{(1 - k^2 \sin^2 x)^{\frac{5}{2}}} = \\ = -\frac{1}{3} \frac{(3k^4 - 13k^2 + 8)E(k)}{k^6(1 - k^2)^2} + \frac{1}{3} \frac{(8 - 9k^2)K(k)}{k^6(1 - k^2)}; \quad (27)$$

$$I_{76} = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^6 x dx}{(1 - k^2 \sin^2 x)^{\frac{7}{2}}} = \\ = -\frac{1}{15} \frac{(23k^4 - 23k^2 + 8)E(k)}{k^6(1 - k^2)^3} - \\ - \frac{1}{15} \frac{(15k^4 - 19k^2 + 8)K(k)}{k^6(1 - k^2)^2}. \quad (28)$$

Далее, в потенциале кольца (10) требуется вычислить также первый член

$$K(\tilde{k}) = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - \left(\frac{r}{a_1} + \frac{x_1}{r} e + s_2 e^2 + s_3 e^3 \right)^2 \sin^2 x}}. \quad (29)$$

Подчеркнем, что в (29) в выражении модуля $\tilde{k}$ необходимо сохранить дополнительный член с e^3 . Раскладывая в ряд подынтегральное выражение в (29), после выкладок, с требуемой точностью получим

$$K(\tilde{k}) \approx I_{10} + \frac{kx_1}{r} I_{32} e + \\ + \left[\frac{k^2 x_1^2 + 2x_2^2}{2r^2} I_{32} + \frac{3k^2 x_1^2}{2r^2} I_{54} \right] e^2 + \\ + x_1 \left[\frac{k^2 x_1^2 - (2 - k^2)x_2^2}{r^3 k} I_{32} + \right. \\ \left. + \frac{3(k^2 x_1^2 + 2x_2^2)}{2kra_1^2} I_{54} + \frac{5k^3 x_1^2}{2r^3} I_{76} \right] e^3. \quad (30)$$

Заключительный этап в намеченной цепочке расчетов состоит в нахождении степенного ряда для всего потенциала кольца (10). А именно, требуется представить в виде ряда по e выражение

$$\Phi_{ring} \approx \frac{2Gm}{\pi\sqrt{-v}} \{K(\tilde{k}) + S\}. \quad (31)$$

Подставляя в (31) ряд для $\frac{1}{\sqrt{-v}}$ из (13), а также найденные выше выражения для составляющих потенциала S из (19) и $K(\tilde{k})$ из (30), после перемножения рядов, с требуемой точностью находим (относительно члена $\Phi_4 e^4$, см. ниже Примечание 1)

$$\Phi_{ring} \approx \frac{2Gm}{\pi a_1} (\Phi_0 + \Phi_1 e + \Phi_2 e^2 + \Phi_3 e^3 + \Phi_4 e^4). \quad (32)$$

Здесь $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4$ — коэффициенты ряда. С учетом интегралов I_{ij} из (21)–(28), в итоге находим все коэффициенты ряда (32):

$$k = \frac{r}{a_1}, \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}; \quad (33)$$

$$\varphi_0 = K(k); \quad \varphi_1 = \frac{x_1}{k^2 a_1} \left(\frac{2-k^2}{1-k^2} E(k) - 2K(k) \right); \quad (34)$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{2k^4 a_1^2} \left\{ \left(-\frac{4-7k^2+k^4}{(1-k^2)^2} x_1^2 + 2 \frac{2-k^2}{1-k^2} x_2^2 \right) \times \right. \\ \left. \times E(k) + \left(\frac{4-5k^2}{1-k^2} x_1^2 - 4x_2^2 \right) K(k) \right\}; \quad (35)$$

$$\varphi_3 = \frac{x_1}{6k^6 (1-k^2)^2 a_1^3} \times \\ \times \left\{ \left[\frac{16-42k^2+35k^4+k^6-2k^8}{1-k^2} x_1^2 - \right. \right. \\ \left. - 6(8-13k^2+3k^4) x_2^2 \right] E(k) - \\ \left. - \left[(16-34k^2+21k^4+k^6) x_1^2 - \right. \right. \\ \left. - 6(8-9k^2)(1-k^2) x_2^2 \right] K(k) \right\}; \quad (36)$$

$$\varphi_4 = \frac{1}{8k^8 (1-k^2)^3 a_1^4} \{ Q_K K(k) - Q_E E(k) \}, \\ Q_E = \left[\frac{16-58k^2+75k^4-43k^6+k^8+k^{10}}{1-k^2} 2x_1^4 - \right. \\ \left. - (48-126k^2+99k^4-11k^6-2k^8) 4x_1^2 x_2^2 + \right. \\ \left. + (1-k^2)(8-13k^2+3k^4) 4x_2^4 \right]; \quad (37) \\ Q_K = \left[(32-100k^2+106k^4-45k^6-k^8) x_1^4 - \right. \\ \left. - (48-102k^2+57k^4+k^6) 4x_1^2 x_2^2 + \right. \\ \left. + (1-k^2)^2 (8-9k^2) 4x_2^4 \right].$$

Теперь коэффициенты (33)–(37) для степенного ряда потенциала кольца Гаусса во внутренней точке нам известны. Отметим, что все коэффициенты (33)–(37) выражаются через стандартные полные эллиптические интегралы Лежандра первого $K(k)$ и второго $E(k)$ рода, модуль k в которых равен нормированному расстоянию пробной точки от активного фокуса эллипса.

Примечание 1. В указанных расчетах акцент делался на получении четырех коэффициентов ($\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$). Пятый коэффициент φ_4 из (37) получается аналогичным путем и для краткости изложения приводится здесь без подробных выкладок.

Очевидно, для круглого кольца сохраняется только первый член ряда (32), что дает хорошо известный внутренний потенциал однородного круглого колечка

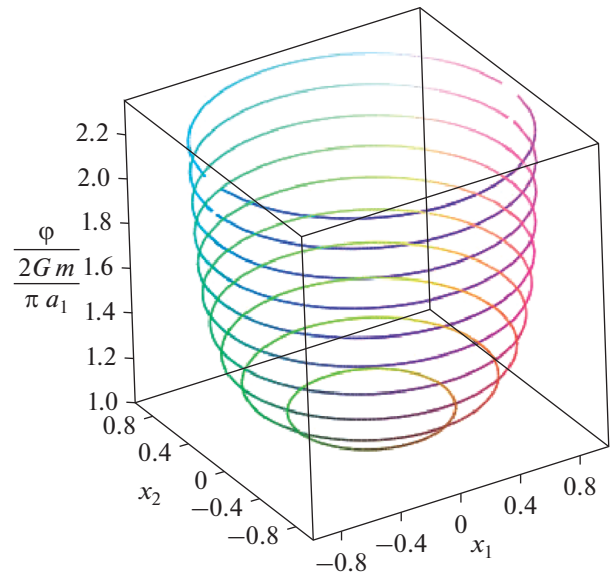


Рис. 1. 3D-поверхность потенциальной ямы внутри круглого кольца Гаусса.

$$\varphi_{ring} \approx \frac{2Gm}{\pi a_1} K\left(\frac{r}{a_1}\right). \quad (38)$$

Трехмерное изображение внутреннего потенциала круглого кольца Гаусса показано на рис. 1.

АСИМПТОТИКА КОЭФФИЦИЕНТОВ (33)–(37) В ОКРЕСТНОСТИ ФОКУСА КОЛЬЦА

Обратим внимание на то, что в знаменатели коэффициентов $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ из (33)–(37) входят степени модуля эллиптических интегралов k . Так как k равен нормированному расстоянию пробной точки от активного фокуса эллипса, необходимо дополнительно проверить, как ведут себя коэффициенты ряда (32) в окрестности точки фокуса, т.е. в пределе $k \rightarrow 0$. Для этого, положив вначале $x_2 = 0$, запишем выражения указанных коэффициентов ряда в точках главной оси кольца Ox_1 , а затем находим разложения этих коэффициентов в окрестности указанной точки $k = \frac{x_1}{a_1}$:

$$\varphi_1 \approx \frac{3\pi}{16} k^3 + O(k^5); \quad (39)$$

$$\varphi_2 \approx \frac{3\pi}{16} k^2 + O(k^4); \quad (40)$$

$$\varphi_3 \approx \frac{15}{32} \pi k^3 + O(k^5). \quad (41)$$

$$\varphi_4 \approx \frac{15}{64} \pi k^2 + O(k^4). \quad (42)$$

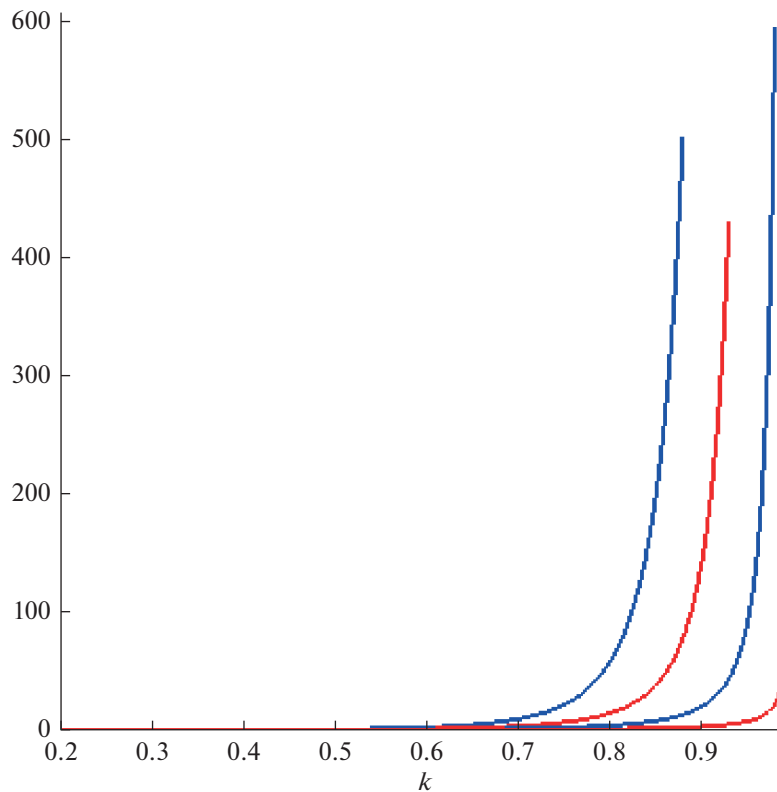


Рис. 2. Зависимость коэффициентов φ_2, φ_4 (синим цветом, графики справа налево) и φ_1, φ_3 (красным цветом, графики справа налево) от $k = x_1/a_1$ вдоль главной оси кольца Гаусса Ox_1 . Начало отсчета расположено в активном фокусе эллипса.

Как следует из формул (39)–(42), коэффициенты $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ в пределе $k \rightarrow 0$ действительно обращаются в нуль. Это позволяет использовать найденные формулы для расчета потенциала кольца во всех его внутренних точках. Этот вывод дополнен расчетом графиков коэффициентов на рис. 2. Как видно, все коэффициенты положительные, вблизи начала координат очень малы, но обладают разной степенью возрастания при $k \rightarrow 1$.

Как и следовало ожидать, первый член ряда (32) $\varphi_0 = K(k)$ при $k \rightarrow 0$ в нуль не обращается, а сам потенциал кольца в точке активного фокуса будет равен

$$\varphi(0) = \frac{Gm}{a_1}. \quad (43)$$

Этот результат совпадает с тем, который был получен ранее в работе (Кондратьев, 2012).

РЯД ДЛЯ ВНЕШНЕГО ПОТЕНЦИАЛА КОЛЬЦА

В рамках поставленной задачи рассмотрим второй вариант, когда потенциал определен на

множестве точек главной плоскости *вне кольца Гаусса*. В этом случае, как следует из формул (6), нулю будет равна уже вторая эллипсоидальная координата пробной точки $\mu = 0$, а две другие эллипсоидальные координаты будут связаны соотношениями

$$\begin{aligned} \mu &= 0, \\ \lambda + v &= (x_1 + ea_1)^2 + x_2^2 - a_1^2 - a_2^2, \\ \lambda v &= a_1^2 a_2^2 \left(1 - \frac{(x_1 + ea_1)^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} \right). \end{aligned} \quad (44)$$

Формулы (11) остаются в силе, только вместо μ теперь стоит λ .

Основная формула для потенциала кольца (4) примет теперь вид

$$\begin{aligned} \varphi_{ring}(x_1, x_2, x_3) &= \frac{2Gm}{\pi\sqrt{\lambda - v}} \times \\ &\times \left\{ K(\tilde{k}) + \frac{ea_1(x_1 + ea_1)}{a_1^2 + v} [\Pi(n, \tilde{k}) - K(\tilde{k})] \right\}, \\ n &= \frac{a_1^2 + v}{v - \lambda}, \quad \tilde{k} = \sqrt{\frac{-v}{\lambda - v}}. \end{aligned} \quad (45)$$

Разложение потенциала в плоскости кольца Гаусса во *внешней* области также проводим до членов четвертой степени эксцентриситета e^4 включительно. После многих расчетов, в итоге, вместо формулы (12) получим

$$\begin{aligned} \Phi_{ring}(x_1, x_2) &\approx \\ &\approx \frac{2Gm}{\pi r} (\bar{\Phi}_0 + \bar{\Phi}_1 e + \bar{\Phi}_2 e^2 + \bar{\Phi}_3 e^3 + \bar{\Phi}_4 e^4). \end{aligned} \quad (46)$$

Коэффициенты ряда (46) также выражаются в конечном аналитическом виде через эллиптические интегралы первого и второго рода:

$$\bar{k} = \frac{a_1}{r} = \frac{a_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \leq 1; \quad (47)$$

$$\bar{\Phi}_0 = K(\bar{k}); \quad (48)$$

$$\bar{\Phi}_1 = \frac{x_1}{a_1} \left(\frac{1 - 2\bar{k}^2}{1 - \bar{k}^2} E(\bar{k}) - K(\bar{k}) \right); \quad (49)$$

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_2 = \frac{\bar{k}^2}{2a_1^2} &\left\{ \left(-\frac{1 - 7\bar{k}^2 + 4\bar{k}^4}{(1 - \bar{k}^2)^2} x_1^2 + 2 \frac{1 - 2\bar{k}^2}{1 - \bar{k}^2} x_2^2 \right) \times \right. \\ &\times E(\bar{k}) + \left. \left(\frac{1 - 2\bar{k}^2}{1 - \bar{k}^2} x_1^2 - 2x_2^2 \right) K(\bar{k}) \right\}; \end{aligned} \quad (50)$$

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_3 = \frac{\bar{k}^2 x_1}{6(1 - \bar{k}^2) a_1^3} &\left\{ \frac{2 - \bar{k}^2 - 35\bar{k}^4 + 42\bar{k}^6 - 16\bar{k}^8}{(1 - \bar{k}^2)^2} x_1^2 - \right. \\ &- \left[-\frac{6\bar{k}^2(3 - 13\bar{k}^2 + 8\bar{k}^4)}{1 - \bar{k}^2} x_2^2 \right] E(\bar{k}) - \\ &- \left[\frac{2(1 - 7\bar{k}^4 + 4\bar{k}^6)}{1 - \bar{k}^2} x_1^2 - 6\bar{k}^2(3 - 4\bar{k}^2) x_2^2 \right] K(\bar{k}) \right\}; \end{aligned} \quad (51)$$

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_4 = \frac{\bar{k}^4}{8(1 - \bar{k}^2) a_1^4} &\times \{ \bar{Q}_K K(\bar{k}) - \bar{Q}_E E(\bar{k}) \}, \\ \bar{Q}_E = &\left[\frac{(1 + \bar{k}^2 - 43\bar{k}^4 + 75\bar{k}^6 - 58\bar{k}^8 + 16\bar{k}^{10})}{(1 - \bar{k}^2)^3} 2x_1^4 - \right. \\ &- \frac{(2 + 11\bar{k}^2 - 99\bar{k}^4 + 126\bar{k}^6 - 48\bar{k}^8)}{(1 - \bar{k}^2)^2} 4x_1^2 x_2^2 + \\ &+ \frac{(3 - 13\bar{k}^2 + 8\bar{k}^4)}{1 - \bar{k}^2} 4x_2^4 \Big]; \\ \bar{Q}_K = &\left[\frac{(2 + 3\bar{k}^2 - 41\bar{k}^4 + 44\bar{k}^6 - 16\bar{k}^8)}{(1 - \bar{k}^2)^2} x_1^4 - \right. \\ &- \frac{(1 + 6\bar{k}^2 - 21\bar{k}^4 + 12\bar{k}^6)}{1 - \bar{k}^2} 8x_1^2 x_2^2 + \\ &+ 4\bar{k}^2(3 - 4\bar{k}^2) x_2^4 \Big]. \end{aligned} \quad (52)$$

Примечание 2. Коэффициенты (47)–(52) для внешнего потенциала связаны с коэффициентами (33)–(37) преобразованиями (см., например, Сикорский, 2006)

$$\begin{aligned} K(k) &= \bar{k} K(\bar{k}); \\ E(k) &= \frac{1}{k} E(\bar{k}) - \left(\frac{1}{k} - \bar{k} \right) K(\bar{k}). \end{aligned} \quad (53)$$

ПРИЛОЖЕНИЕ МЕТОДА КОЛЕЦ ГАУССА К РАСЧЕТУ ЭКВИПОТЕНЦИАЛЕЙ ДЛЯ ОРБИТ ПЛАНЕТ СОЛНЕЧНОЙ СИСТЕМЫ

Метод колец Гаусса изначально был предназначен для расчета вековых и долгопериодических возмущений в движении планет и спутников планет. С помощью полученных в этой работе выражений для внутреннего (формулы (33)–(37)) и внешнего (формулы (47)–(52)) потенциалов кольца Гаусса мы рассчитали кривые равного потенциала для орбит планет Солнечной системы. Эти эквипотенциали показаны на рис. 3–5 и 7.

Все необходимые данные об орбитах планет мы взяли из работы (Simon и др., 1994).

Для орбит с наибольшим эксцентриситетом (Меркурий, Марс, Юпитер, Сатурн) характерным является существование такой незамкнутой эквипотенциали, которая начинается и заканчивается в точках самого кольца; внутренняя же часть этой эквипотенциали совпадает со штриховой линией. Отдельно на рис. 6 показаны эквипотенциали для суперпозиции планет-гигантов Юпитера и Сатурна. Очевидно, смещение крестиков в разных направлениях на этом рисунке происходит из-за разной ориентации апсидальных осей орбит Юпитера и Сатурна. В целом, эквипотенциали показывают, каким образом действуют возмущающие силы на малые тела в окрестности орбит планет. Очевидно, что компонента возмущающей силы, касательная к кривой равного потенциала, всегда равна нулю.

ОБСУЖДЕНИЕ

В данной работе поставлена и решена задача о разложении потенциала гравитирующего (или заряженного статическим электрическим зарядом) почти кругового эллиптического кольца Гаусса в ряд по степеням эксцентриситета e . Здесь мы ограничились случаем, когда потенциал определен на множестве точек плоскости данного эллиптического кольца. Разложение проведено с точностью до членов e^4 включительно, что потребовало с необходимой точностью рассчитывать

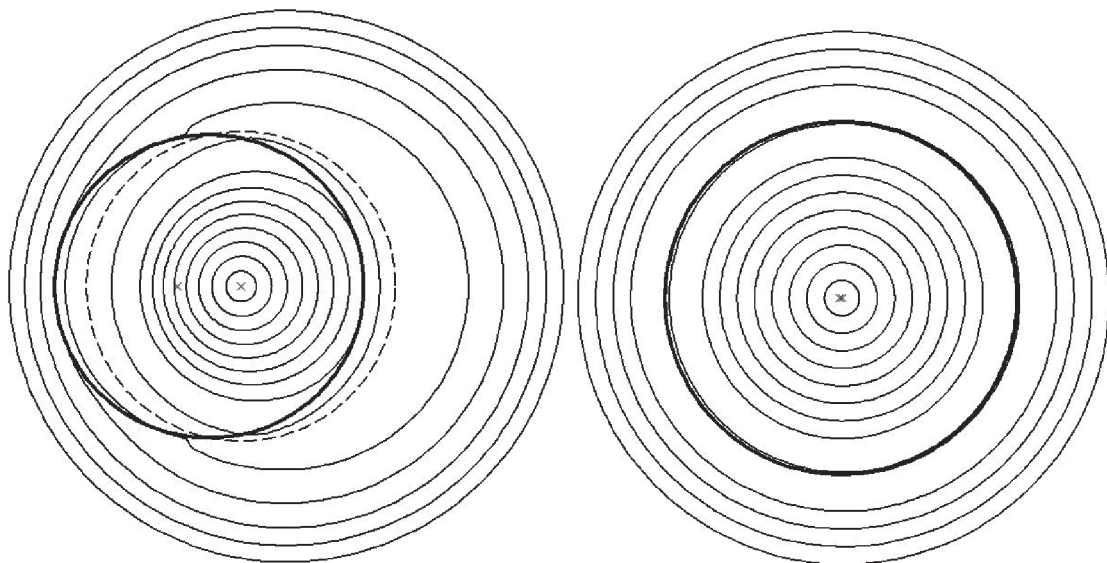


Рис. 3. Эквипотенциалы (показаны тонкими серыми линиями) для орбит Меркурия и Венеры (показаны жирными кривыми). Крестиками показаны фокусы эллиптического кольца; для сплюснутой орбиты Меркурия эти фокусы заметно расходятся, для Венеры почти совпадают. Штрихами показана окружность, в точках которой потенциал имеет логарифмическую сингулярность.

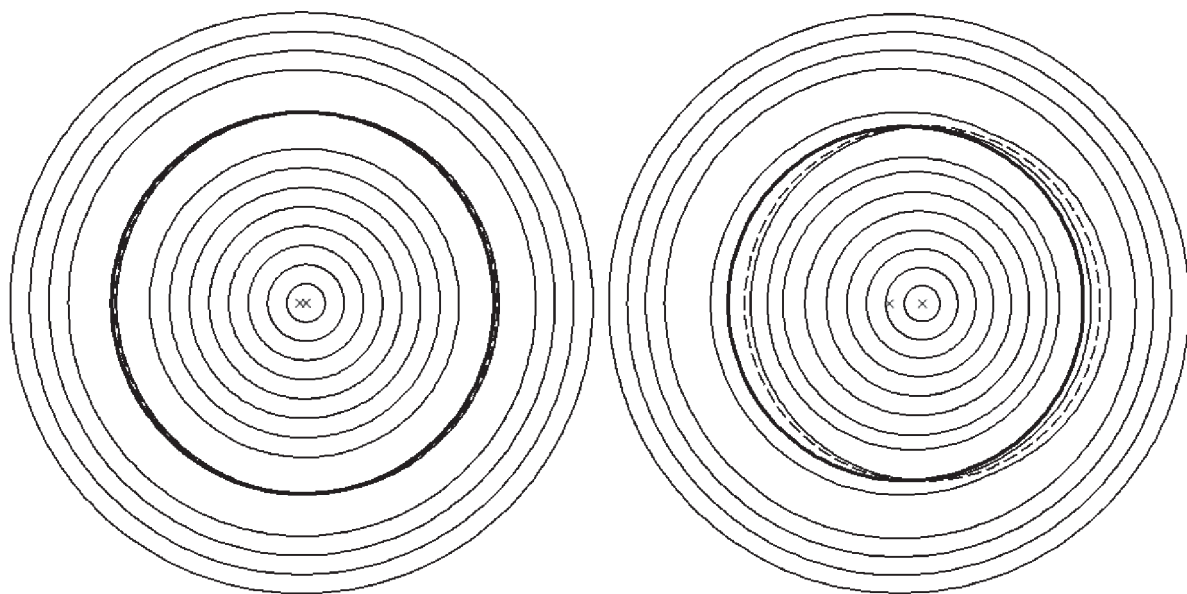


Рис. 4. То же самое, что на рис. 3, но для орбит: Земли (слева) и Марса (справа).

ряды для эллипсоидальных координат пробной точки.

Основной результат работы — получены два комплекта коэффициентов для степенных рядов потенциала внутри и вне кольца, которые выражаются через полные эллиптические интегралы первого и второго рода и, кроме того, через координаты пробной точки. Для контроля этих фор-

мул используются преобразования Ландена. Важно подчеркнуть, что трудный для численных расчетов интеграл третьего рода $\Pi(n, k)$, входящий в выражение полного потенциала (4), в коэффициентах найденных рядов отсутствует. Это заметно облегчает практическое использование найденных рядов для изучения орбит реальных небесных тел в Солнечной системе. Отметим, что в си-

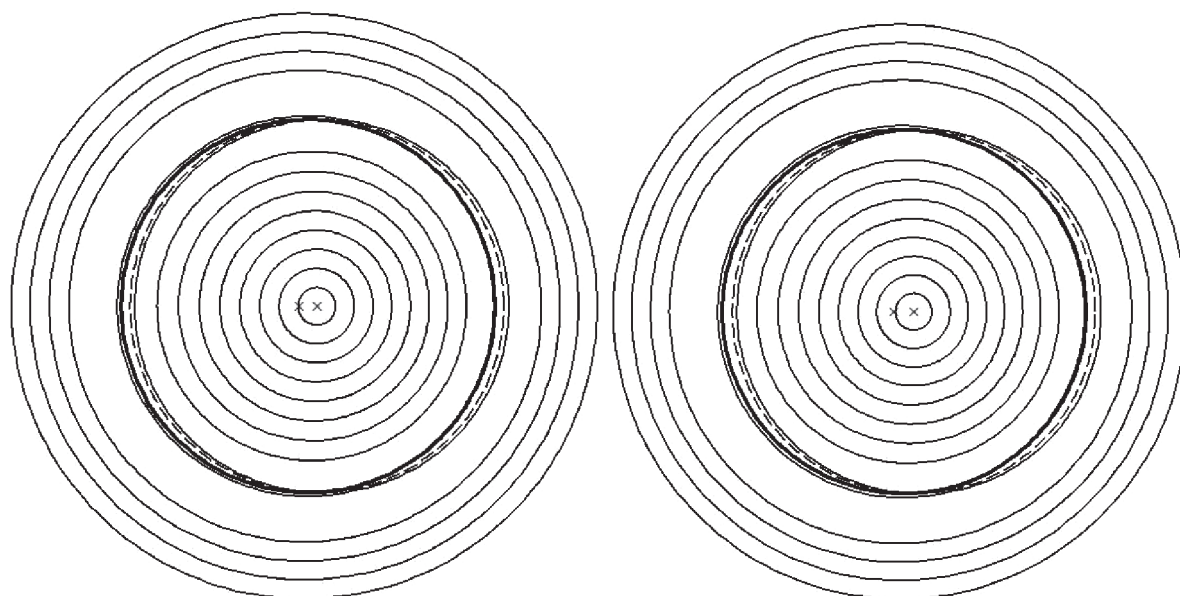


Рис. 5. То же самое, что на рис. 3, но для орбит Юпитера (слева) и Сатурна (справа).

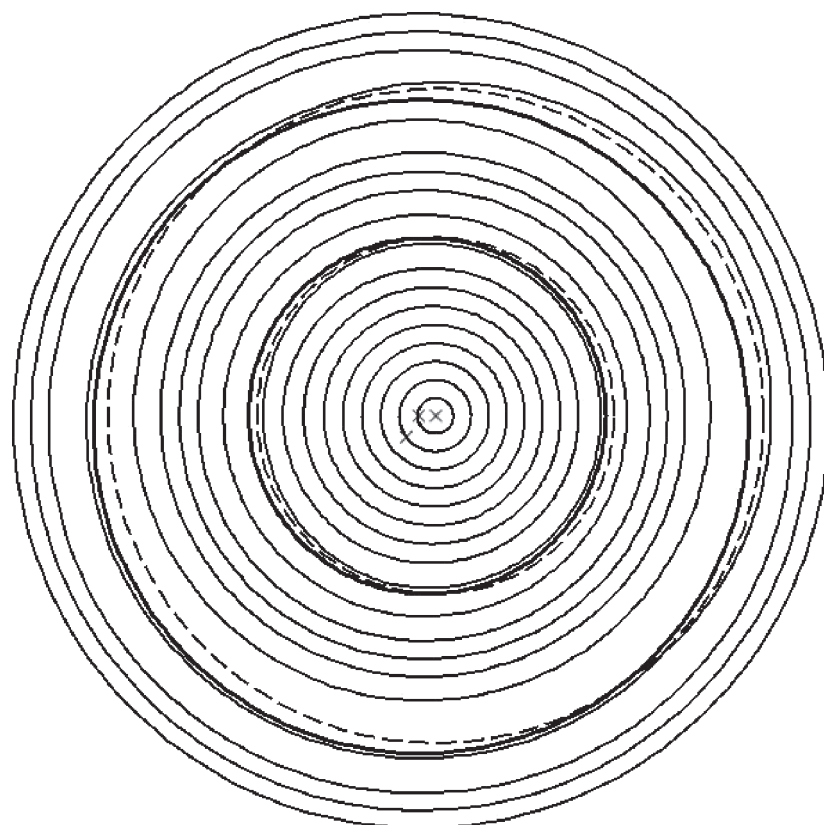


Рис. 6. Эквипотенциали (тонкими серыми линиями) для суперпозиции гравитационных полей колец Гаусса планет (жирными эллипсами) Юпитера и Сатурна. Фокусы (крестики) эллиптических колец расположены на разных направлениях из-за несовпадения линий апсид у орбит планет.

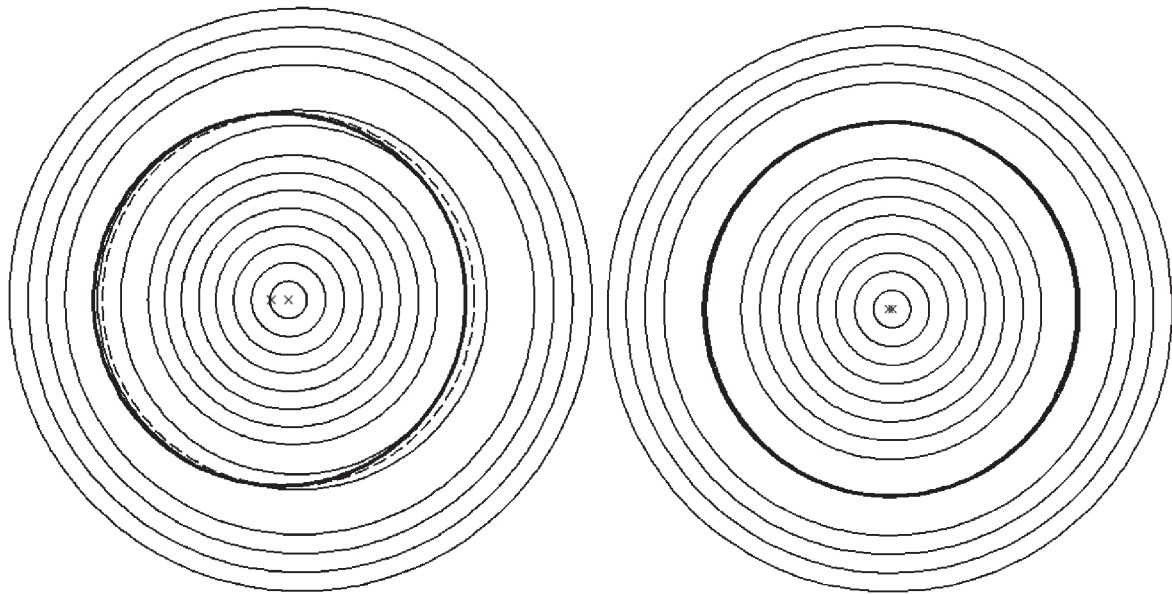


Рис. 7. То же самое, что на рис. 3, но для орбит Урана (слева) и Нептуна (справа).

лу геометрической асимметрии в распределении плотности вещества на кольце Гаусса, все нечетные коэффициенты для внутреннего (φ_1 из (34) и φ_3 из (36)), и для внешнего (φ_1 из (49) и φ_3 из (51)) потенциалов пропорциональны координате x_1 в первой степени.

Пример теоретического применения потенциала кольца в виде степенного ряда был дан в работе (Кондратьев, Корноухов, 2020), где было найдено выражение взаимной энергии двух гравитирующих колец Гаусса. Применение взаимной энергии колец облегчает трудные расчеты при нахождении вековых возмущений в небесной механике.

Расчет по полученным формулам эквипотенциалов для колец, соответствующих орбитам планет Солнечной системы, показывает ориентацию возмущающей силы, действующей на малые небесные тела в окрестности орбит планет. В частности, по рисункам эквипотенциалов видно, что из двух компонент возмущающей силы надо учитывать только нормальную к этим кривым компоненту возмущающей силы, так как касательная компонента заведомо должна быть равна нулю. Отдельно на рис. 6 был сделан расчет эквипотенциалов для суперпозиции колец Гаусса планет-гигантов Юпитера и Сатурна.

Конфликта интересов у авторов нет.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Антонов В.А., Никифоров И.И., Холшевников К.В. Элементы теории гравитационного потенциала и некоторые случаи его явного выражения. СПб.: СПбГУ, 2008. 207 с.
- Вашковьяк М.А. Эволюция орбит в плоской ограниченной эллиптической двукратно осредненной задаче трех тел // Космич. исслед. 1982. Т. 20. Вып. 3. С. 332. (Vashkov'yak M.A. Orbit Evolution in Flat Constrain Ellipsoid Binary Averaged Three Body Problem // Kosm. Issl. 1982. V. 20. № 3. P. 332.)
- Вашковьяк М.А., Вашковьяк С.Н. Силовая функция слабоэллиптического материального гауссова кольца и ее обобщение на почти компланарную систему колец // Астрон. вестн. 2012. Т. 46. № 1. С. 69–77. (Vashkov'yak M.A., Vashkov'yak S.N. Force function of a slightly elliptical Gaussian ring and its generalization to a nearly coplanar system of rings // Sol. Syst. Res. 2012. V. 46. № 5. P. 352–362.) <https://doi.org/10.1134/S0038094611060098>
- Дубошин Г.Н. Теория притяжения. М.: Наука, 1961. 288 с.
- Кондратьев Б.П. Теория потенциала. Новые методы и задачи с решениями. М.: Мир, 2007. 512 с.
- Кондратьев Б.П., Дубровский А.С., Трубицына Н.Г., Мухаметшина Э.Ш. Разложение потенциала однородного кругового тора в ряд Лапласа // Журн. техн. физ. 2009. Т. 78. № 2. С. 17–21. (Kondratyev B.P., Dubrovsky A.S., Trubitsyna N.G., Mukhametshina E.Sh. // Technical Physics, 2009. V. 54. № 2. P. 176–181.) <https://doi.org/10.1134/S1063784209020042>
- Кондратьев Б.П. Потенциал кольца Гаусса. Новый подход // Астрон. вестн. 2012. Т. 46. № 5. С. 380–391. (Kondratyev B.P. Potential of a Gaussian ring. A new approach // Sol. Syst. Res. 2012. V. 46. № 5. P. 352–362.)
- Кондратьев Б.П., Корноухов В.С. Взаимная гравитационная энергия колец Гаусса и проблема возмуще-

- ний в небесной механике // Астрон. журн. 2020. Т. 97. № 5. С. 408–420. (*Kondratyev B.P., Kornoukhov V.S.* Mutual Gravitational Energy of Gaussian Rings and the Problem of Perturbations in Celestial Mechanics // Astron. Rep. 2020. V. 64. № 5. P. 434–446. <https://doi.org/10.1134/S1063772920060037>). <https://doi.org/10.31857/S0004629920060031>
- Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Элементарные функции. Т. 1. М.: Физматлит, 2008. 632 с.
- Сикорский Ю.С.* Элементы теории эллиптических функций: С приложениями к механике. М.: КомКнига, 2006. 368 с.
- Субботин М.Ф.* Введение в теоретическую астрономию. М.: Наука, 1968. 800 с.
- Simon J.L., Bretagnon P., Chapront J., Chapront-Touze M., Francou G., Laskar J.* Numerical expressions for precession formulae and mean elements for the Moon and the planets // Astron. and Astrophys. 1994. V. 282. № 2. P. 663–683.