

УДК 523

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТРАНЗИТНЫХ ЭКЗОПЛАНЕТ ПО МАССЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЗАВИСИМОСТЕЙ МАССА-РАДИУС. СТРУКТУРИРОВАНИЕ ВНУТРИ ПЛАНЕТНЫХ СИСТЕМ

© 2021 г. О. Я. Яковлев^{a, b, *}, А. Е. Иванова^a, В. И. Ананьева^a, И. А. Шашкова^a,
А. В. Юдаев^c, Ж.-Л. Берто^d, А. В. Тавров^{a, c}

^aИнститут космических исследований РАН, Москва, Россия

^bМГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

^cМосковский физико-технический институт ГУ, Москва, Россия

^dЛаборатория атмосферных и космических исследований, Гюйанкур, Франция

*e-mail: yko-v@yandex.ru

Поступила в редакцию 21.10.2020 г.

После доработки 18.12.2020 г.

Принята к публикации 13.01.2021 г.

Большая часть (85%) транзитных экзопланет обнаружена космическим телескопом Kepler. И только примерно у 15% из них известна масса, измеренная преимущественно методом лучевых скоростей. Массу экзопланеты возможно оценить по ее радиусу, исходя из статистических зависимостей по наблюдательным данным, хотя нет однозначной зависимости между массой и радиусом планет. Вычисленные массы по четырем статистическим зависимостям массы от радиуса (Bashi и др., 2017; Chen и Kipping, 2017; Ning и др., 2018, и выведенная “Averaged”) для экзопланет, массы которых не известны, были добавлены в распределение с известными массами. Проведено исследование полученных таким образом распределений транзитных экзопланет по массе с учетом эффекта наблюдательной селекции транзитного метода. Распределения аппроксимируются степенным законом $\partial N/\partial M \sim M^\alpha$, $\alpha < 0$, где показатель степени α был определен методом максимального правдоподобия для выборок с использованием четырех зависимостей масса-радиус: -2.12 ± 0.03 , -2.09 ± 0.03 , -1.94 ± 0.03 , -2.27 ± 0.04 . Кроме того, для одного из этих распределений найдены параметры степенного закона, показатель степени в котором различается на трех интервалах (с границами 0.025, 0.28, 1.35 масс Юпитера): -1.99 , -0.62 , -2.88 . Дополнительно делается вывод об отсутствии доказательства зависимости между массой экзопланеты и ее средним расстоянием до родительской звезды (структурирования внутри планетных систем) на расстояниях до 1 а. е., а также исследуется зависимость показателя степени α от рассматриваемого интервала по массе. Приведенные выше результаты были получены для экзопланет, обнаруженных космическими телескопами Kepler и TESS (составляющие группу 1). Массы остальных транзитных экзопланет, обнаруженных преимущественно наземными инструментами (группа 2), были известны. Для этой группы показатель степени α оценен как -2.21 ± 0.04 . Полученные результаты в целом согласуются с результатами из предшествующих статистических и теоретических исследований. Ключевой идеей работы является применение модельных зависимостей массы от радиуса экзопланет для исследования распределения экзопланет по массе по актуальным наблюдательным данным.

Ключевые слова: экзопланеты, транзитный метод, распределение по массе, зависимость масса-радиус, статистическое исследование

DOI: 10.31857/S0320930X21030099

ВВЕДЕНИЕ

С ростом количества обнаруженных экзопланет появилась возможность статистического исследования характеристик экзопланет (массы и радиуса, орбитальных параметров и др.). Статистика экзопланет важна для сравнительной планетологии и для верификации теоретических моделей формирования и эволюции планетных си-

стем (например, модель популяционного синтеза Mordasini, 2018).

Масса является одним из основных параметров, характеризующих экзопланету, наряду с радиусом и с орбитальными параметрами. Табл. 1 резюмирует найденные публикации по исследованию распределений масс экзопланет. Авторами этих публикаций в качестве закона распределения экзопланет по массе был предложен степен-

Таблица 1. Характеристики распределений экзопланет по массам (по некоторым публикациям)

Источник	Показатель степени α в $\partial N/\partial M \sim M^\alpha$	$M/(M\sin(i))$	Диапазон масс, M_{J}^*	Количество планет (наблюдательная программа)	Учет наблюдательной селекции	
Marcy и др., 2005	−1.05	$M\sin(i)$	0.02–15	104	—	
Butler и др., 2006	−1.16		<15	167	—	
Cumming и др., 2008	−1.31 ± 0.2		>0.3	182	Учет полноты обзора	
Howard и др., 2010	−1.48 ^{+0.12} / _{−0.14}		0.01–3.15	166		
Иванова и др., 2019; Апануева и др., 2020; Ананьева и др., 2020	−2.12 ± 0.12	M	0.02–13	328 (Kepler)	Учет полноты обзора: разделение на две инструментальные группы; учет измеренности масс, учет вероятности транзитной конфигурации	
	−1.9 ± 0.06		0.68–13	210 (Наземные наблюдательные программы и CoRoT)		
Mordasini, 2018	−1		0.09–5	(Моделирование методом популяционного синтеза)		
	−2		<0.09, >5			

* Здесь и далее: M_J , R_J — масса и радиус Юпитера, M_E , R_E — масса и радиус Земли.

ной закон с отрицательным показателем степени α : $\partial N/\partial M \sim M^\alpha$, $\alpha < 0$, который различается как по годам исследования, так и по интервалам масс.

В первых работах (табл. 1) распределения экзопланет по массе определяли по проективной массе $M\sin(i)$, где i — угол наклона нормали плоскости орбиты планеты к направлению на наблюдателя. Характеристика $M/(M\sin(i))$ в табл. 1 показывает оценку, соответственно, по истинным массам M или по проективным массам $M\sin(i)$. При анализе существенно неоднородных данных наблюдений авторы некоторых публикаций учитывали наблюдательную селекцию, обусловленную особенностями инструментов обнаружения и наблюдательных программ. В последнем столбце таблицы отмечено указание авторов соответствующей публикации по проведению регуляризации наблюдательных и архивных данных и учета наблюдательной селекции.

Из серии первых публикаций (Marcy и др., 2005; Butler и др., 2006; Cumming и др., 2008; Howard и др., 2010), исследовавших распределение экзопланет по проективным массам (полученных методом лучевых скоростей), видно, что показатель степени уменьшается в хронологическом порядке приблизительно от –1 до –1.5, что, вероятно, объясняется анализом все более возрастающего числа экзопланет и более тщательной отстройкой от наблюдательной селекции.

В работах (Иванова и др., 2019; Ananyeva и др., 2020; Ананьева и др., 2020) была оценена закономерность распределения по истинной массе транзитных экзопланет с рассмотрением и коррекцией двух факторов наблюдательной селекции: фактора “измеренности массы” (для учета планет с неизвестной массой) и фактора “вероятности транзит-

ной конфигурации”¹, учитывающего вероятность обнаружения транзитных экзопланет. Было получено распределение по массам, которое приблизительно описывается законом $\partial N/\partial M \sim M^{-2}$ и не варьируется в зависимости от спектрального класса родительских звезд (рассмотрены спектральные классы F, G, K и M²). Степенные законы, обобщенно, без деления на спектральные классы родительских звезд, и по отдельности, с делением на спектральные классы (F, G, K и M), были получены аппроксимацией соответствующих гистограмм методом наименьших квадратов. Достоверность аппроксимации проверяли тестом Колмогорова-Смирнова.

В работе (Ananyeva и др., 2020) проведено сравнение найденной закономерности закона распределения экзопланет по массам с соответствующим модельным распределением (Mordasini, 2018), полученным методом популяционного синтеза (*англ.* planetary population synthesis). В результате моделирования (Mordasini, 2018) было получено распределение экзопланет по массе, различное в трех массовых интервалах: в двух интервалах (менее $30M_E \approx 0.1M_J$ и свыше $5M_J$) описывается законом $\partial N/\partial M \sim M^{-2}$, а в среднем интервале $0.1–5M_J$ — законом $\partial N/\partial M \sim M^{-1}$. При сравнении распределений по массам транзитных планет, полученных из Архива экзопланет (NASA Exoplanet Archive, 2019) и скорректированных для ослабления эф-

¹ Т.е. такого взаимного положения наблюдателя и плоскости орбиты экзопланеты, при котором возможно наблюдать транзит — прохождение экзопланеты по диску родительской звезды.

² По спектральному классу M данные по распределению масс получены из анализа данных лучевых скоростей (Tomi и др., 2019).

фектов наблюдательной селекции (Иванова и др., 2019; Ananyeva и др., 2020; Ананьева и др., 2020), с результатами (Mordasini, 2018) было отмечено, что распределения по массам имеют одинаковую тенденцию. Расхождение в среднем интервале масс было объяснено недостатком обнаруженных к настоящему времени долгопериодических транзитных экзопланет.

В качестве альтернативного подхода к фактору “измеренности массы”, используемого в серии работ (Иванова и др., 2019; Ananyeva и др., 2020; Ананьева и др., 2020), и для учета около 75% транзитных планет с неизвестной (еще не измеренной) массой, в настоящей работе рассмотрены и применены опубликованные модели зависимости масса-радиус³ экзопланет (Bashi и др., 2017; Chen и др., 2017; Ning и др., 2018), а также изучена модель, где масса M определяется усредненным наблюдательным данным $M(R)$, полученным из Архива экзопланет (NASA Exoplanet Archive, 2020). Для ослабления наблюдательной селекции коэффициент, учитывающий фактор вероятности транзитной конфигурации, рассчитывается аналогично (Ananyeva и др., 2020) (следуя Petigura и др., 2013), но учитывается для всех известных транзитных экзопланет (NASA Exoplanet Archive, 2020), а не только для планет с известной массой. Кроме того, в отличие от серии работ (Иванова и др., 2019; Ananyeva и др., 2020; Ананьева и др., 2020) распределения рассматриваются как непрерывные, и для определения параметров закона распределения используется метод максимального правдоподобия (Clauset и др., 2009).

Более подробно рассмотрен вопрос возможности наблюдения структурирования планет внутри планетных систем, предварительно обсуждаемый в (Ananyeva и др., 2020). Под структурированием внутри планетных систем подразумевается статистическая зависимость массы экзопланеты от большой полуоси ее орбиты. Такое структурирование наблюдается в Солнечной системе: более легкие планеты расположены ближе к звезде. Для определения наличия структурирования в планетных системах по имеющимся наблюдательным данным исследуется изменение распределения экзопланет по массе до коррекции селекции транзитного метода и после ее применения.

Основной целью настоящей работы является исследование закона распределения транзитных экзопланет по массе, в которых масса планет с неизмеренной массой определяется из зависимости масса-радиус. Это позволило провести проверку

ранее полученных результатов (Иванова и др., 2019; Ananyeva и др., 2020; Ананьева и др., 2020).

Первые шесть разделов посвящены исследованию экзопланет, обнаруженных космическими телескопами Kepler и TESS, в седьмом разделе исследуются распределения для остальных транзитных экзопланет, преимущественно обнаруженных наземными средствами, масса которых известна. В первом разделе “Распределение транзитных экзопланет...” кратко описаны результаты и методика учета двух факторов наблюдательной селекции из серии работ (Иванова и др., 2019; Ananyeva и др., 2020; Ананьева и др., 2020), один из которых применяется далее, а на основании другого была предложена ключевая идея для настоящей работы об использовании зависимостей масса-радиус. Во втором разделе “Параметры экзопланет из архива 2020” систематизированы используемые в настоящей работе данные об экзопланетах, а также обосновывается разделение экзопланет на две группы и обсуждаются некоторые особенности их распределения по массе и по радиусу. В третьем разделе “Статистические зависимости масса-радиус...” дано краткое описание известных по публикациям зависимостей масса-радиус и выбраны зависимости, по которым в дальнейшем вычисляются массы экзопланет. Полученные распределения по массе (с учетом вычисленных масс) и аппроксимация степенным законом, а также сравнение их с результатами серии работ (Иванова и др., 2019; Ananyeva и др., 2020; Ананьева и др., 2020) приведены до учета селекции транзитного метода в четвертом разделе “Сравнение и анализ распределений...”, а в пятом разделе “Учет вероятности транзита...” — после учета селекции. Также в пятом разделе обсуждается вопрос о структурировании планетных систем. В шестом разделе “Исследование нижней границы...” представлены результаты проверки гипотезы о соответствии распределений степенному закону при варьировании минимального значения массы рассматриваемого интервала, а также аппроксимируются два полученных распределения ломанным степенным законом, параметры которых сравниваются с (Mordasini, 2018).

РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТРАНЗИТНЫХ ЭКЗОПЛАНЕТ С УЧЕТОМ НАБЛЮДАТЕЛЬНОЙ СЕЛЕКЦИИ: ИЗМЕРЕННОСТИ МАССЫ И ВЕРОЯТНОСТИ ТРАНЗИТА

В серии недавних работ (Иванова и др., 2019; Ananyeva и др., 2020; Ананьева и др., 2020) были рассмотрены известные на начало 2019 года транзитные экзопланеты, разделенные на две инструментальные группы: 2564 экзопланеты (группа 1), обнаруженные космическим телескопом Kepler, и 329 планеты (группа 2), обнаруженные назем-

³ Здесь и далее под выражением “зависимость масса-радиус” подразумевается функциональная зависимость между статистическими массой и радиусом, позволяющая оценить один из этих параметров по другому в статистически среднем случае.

ными средствами наблюдений и космическим телескопом CoRoT. Суммарно из 2893 планет масса была известна только у 539, причем в группе 2 масса была известна для всех планет, а в группе 1 — только для 210. Распределения по массе были определены независимо для планет каждой группы в интервалах масс $0.02\text{--}13M_J$ и $0.68\text{--}13M_J$ соответственно.

С целью ослабления наблюдательной селекции для статистического анализа группы 1 была привлечена информация о радиусах экзопланет. Рассматриваемые диапазоны значений массы и радиуса были разделены на равные в логарифмическом масштабе интервалы ΔM и ΔR , построены гистограммы $N(M) = \partial N / \partial M$ и $N(R) = \partial N / \partial R$. Далее в каждом интервале радиусов $\Delta R = i(R)$ была определена доля планет с известной массой k :

$$k(R) = \frac{N_{\text{meas.mass}}(i(R))}{N_{\text{all}}(i(R))}, \quad (1)$$

где $N_{\text{meas.mass}}$ и N_{all} — количество планет с известной массой и общее количество планет в интервале i соответственно; $i(R)$ — интервал радиусов, в котором находится планета с радиусом R .

Массу транзитных планет в большинстве случаев, за исключением TTV планет (обнаруженных методом transit-timing variation), определяли из последующего измерения лучевых скоростей. Для коррекции статистики экзопланет, получаемой из наблюдательных данных (NASA Exoplanet Archive, 2019), и очевидно искаженной наблюдательной селекцией, был введен коэффициент “измеренности массы” как функция $k(R)$ доли планет с известной массой от радиуса планеты R . Это искажение возникает вследствие того, что массу больших планет определить проще, чем малых. Функция $k(R)$ является преимущественно возрастающей в области значений от 0.02 до 1. Для малых планет радиусом $\sim 0.1R_J$ в подавляющем большинстве случаев масса не определена и $k \ll 1$, а для больших планет радиусом $1\text{--}13R_J$ — наоборот, масса определена для большего числа и $k \approx 1$. Каждой планете присваивался статистический вес $1/k(R)$. Таким образом, в каждом интервале по радиусу экзопланетам с неизвестной массой были присвоены значения массы в соответствии с распределением известных масс планет из этого интервала.

Кроме этого, (Иванова и др., 2019; Ananyeva и др., 2020; Ананьева и др., 2020), основываясь на работе (Petigura и др., 2013), учли фактор наблюдательной селекции, учитывающий вероятность транзитной конфигурации, т.к. транзитным методом обнаруживаются только те планеты, наклонение орбит которых мало отличается от 90° . Геометрическая вероятность наблюдения транзита p_{tr} (вероятность нахождения наблюдателя в

области, в которой возможно наблюдать транзит планеты) упрощенно определяется как отношение радиуса звезды r к большой полуоси орбиты a планеты: $p_{tr} \sim r/a$ (Winn и др., 2010). Из-за малой вероятности транзитной конфигурации наблюдательная селекция обуславливает недостаточное число зарегистрированных планет. Не находящиеся в транзитной конфигурации планеты учитывают гипотетически, их предполагают с массой, равной массе зарегистрированной планеты, так что в результате коррекции статистический вес каждой транзитной планеты увеличивается в k_1 раз:

$$k_1 = \frac{a}{r}. \quad (2)$$

Таким образом, (Иванова и др., 2019; Ananyeva и др., 2020; Ананьева и др., 2020) исследовали распределение по массе 393 экзопланет, и получили зависимость $\partial N / \partial M \sim M^{-2}$, скорректированную относительно наблюдательной селекции с помощью коэффициентов k и k_1 . Для статистической выборки планет Kepler (группа 1), которая охватывает большее число долгопериодических планет, чем выборка (группа 2) планет наземных наблюдений и CoRoT, визуально прослеживали характерное изменение зависимости числа планет от их массы в интервале $0.1\text{--}5M_J$ так, что показатель степени α степенного закона $\partial N / \partial M \sim M^\alpha$ увеличивался к значению -1 согласно теоретической модели популяционного синтеза (Mordasini, 2018).

ПАРАМЕТРЫ ЭКЗОПЛАНЕТ ИЗ АРХИВА 2020

Для настоящей работы мы использовали данные об экзопланетах из Архива Экзопланет НАСА по состоянию на июль 2020 года⁴ (NASA Exoplanet Archive, 2020), где было подтверждено 3169 экзопланет, обнаруженных транзитным методом. Радиус определен для всех планет по форме кривой блеска родительской звезды во время наблюдения транзита. В большинстве случаев для определения массы транзитной планеты требуются дополнительные спектроскопические измерения лучевой скорости родительской звезды, точность которых ограничена для более легких (и малых) транзитных планет, поэтому масса измерена только у 858 экзопланет (27%). При этом у 22 из них среднее относительное отклонение превышает значение массы, а для 65 планет известна только верхняя оценка массы.

В настоящей работе, кроме массы M и радиуса R экзопланет, используются большая полуось орбиты a и радиус r звезды для определения коэф-

⁴ <https://github.com/yko-v/exoplanets2020>.

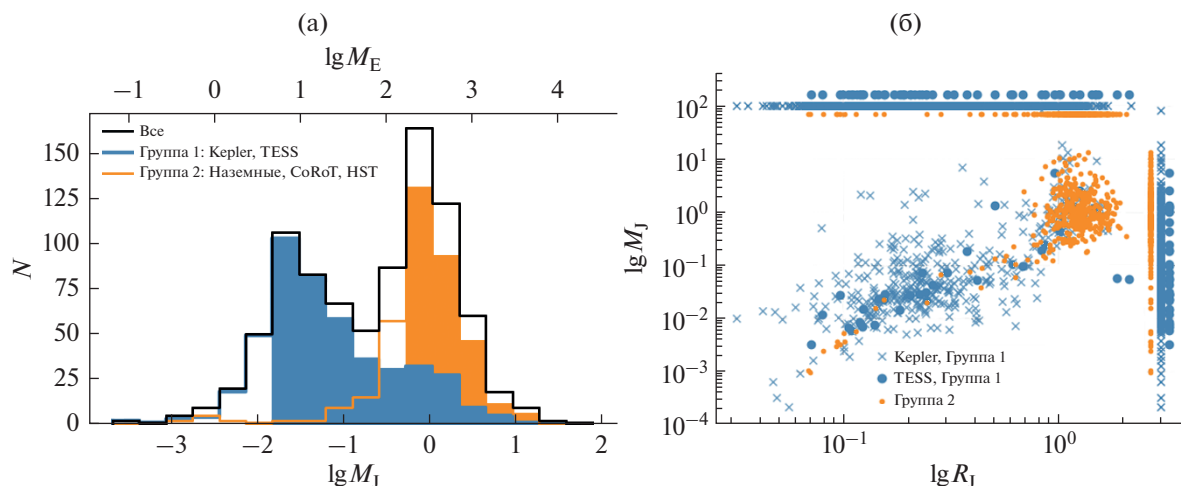


Рис. 1. Распределения числа экзопланет N по массе и зависимости массы от радиуса (R_J — в радиусах Юпитера): а — распределения экзопланет по массе $N(\lg M)$ для всех известных транзитных экзопланет (черная сплошная линия) и для двух рассматриваемых групп (1 — синяя линия и 2 — оранжевая линия), по отдельности. Закрашенные области соответствуют интервалам массы, в которых определялся закон распределения; б — транзитные экзопланеты в плоскости $\lg(R) - \lg(M)$, обнаруженные различными наблюдательными программами (группы 1 и 2 показаны цветом в соответствии с рис. 1а). Сверху и справа представлены проекции распределения на соответствующие оси.

фициента k_1 . Для 1479 экзопланет значение a явно не содержится в Архиве, поэтому мы использовали значения орбитального периода P и массы звезды m для расчета большой полуоси по известному соотношению (Seager и Mallen-Ornelas, 2002) для движущейся по эллиптической орбите материальной точки в центральном гравитационном поле с пренебрежением массы планеты:

$$a^3 = \frac{Gm}{4\pi^2} P^2 \quad (3)$$

где G — гравитационная постоянная.

Значения перечисленных выше параметров, а также их предельных отклонений взяты из расширенной таблицы Архива (Extended⁵), в которой для каждой экзопланеты приведены параметры экзопланет и их родительских звезд из открытых публикационных источников. В настоящей работе используются те значения параметров, которым соответствуют их минимальные средние относительные отклонения.

Следуя подходу (Иванова и др., 2019; Ananyeva и др., 2020; Ананьева и др., 2020), в настоящей работе все рассматриваемые экзопланеты также разделены на две группы. В обновленном Архиве содержатся и учтены нами: 2773 экзопланеты, обнаруженные космическими телескопами Kepler и TESS (1 группа), и остальные 396 планеты, обнаруженные 22 наземными инструментами и космическими телескопами CoRoT и Hubble Space Telescope (HST) (2 группа). Неразделенные и разделенные на группы 1 и 2 архивные распределе-

ния экзопланет по массе $N(M)$ и соответствующие зависимости массы от радиуса $M(R)$ приведены на рис. 1а и 1б, соответственно.

Рис. 1а показывает, что без разделения на группы 1 и 2 распределение экзопланет по массам (показано черным цветом, сплошная линия) имеет два ярко выраженных максимума, происхождение которых обусловлено, главным образом, наблюдательной селекцией — неравному инструментальному охвату современными наблюдательными средствами разных групп (1 и 2) экзопланет: телескопами Kepler и TESS или наземными наблюдательными программами (а также телескопами CoRoT и HST), соответственно. Первый максимум в интервале $[1.5, 4.4] \times 10^{-2} M_J$ ($[4.8, 14] M_E$) совпадает с максимумом в распределении экзопланет группы 1; второй максимум в интервале $[0.54, 1.57] M_J$ соответствует максимуму для группы 2. В частности из этого следует, что так называемая пустыня суб-сатурнов (Ida и Lin, 2004; Mordasini и др., 2009) — минимум в интервале масс $[0.1, 0.3] M_J$ ($[-1, -0.5] \lg M_J$) скорее всего эффект наблюдательной селекции.

Также, на рис. 1а показаны закрашенные цветом интервалы масс, где наблюдения для групп 1 и 2 имели полноту. Неполнота наблюдений телескопов Kepler⁶ и TESS начинается для экзопланет с массами менее $\approx 0.02 M_J$. Неполнота наземных (и

⁵ https://exoplanetarchive.ipac.caltech.edu/docs/API_exomultpars_columns.html.

⁶ Неполнота наблюдений телескопа Kepler начинается для планет с периодом больше 400 дней и радиусом менее $0.178 R_J$ ($2 R_E$) (Petigura и др., 2013). Большая часть экзопланет с таким радиусом (из Архива, а также по зависимостям масса-радиус (см. раздел “Статистические зависимости масса-радиус...”) соответствует массам в диапазоне $[0.01, 0.03] M_J$.

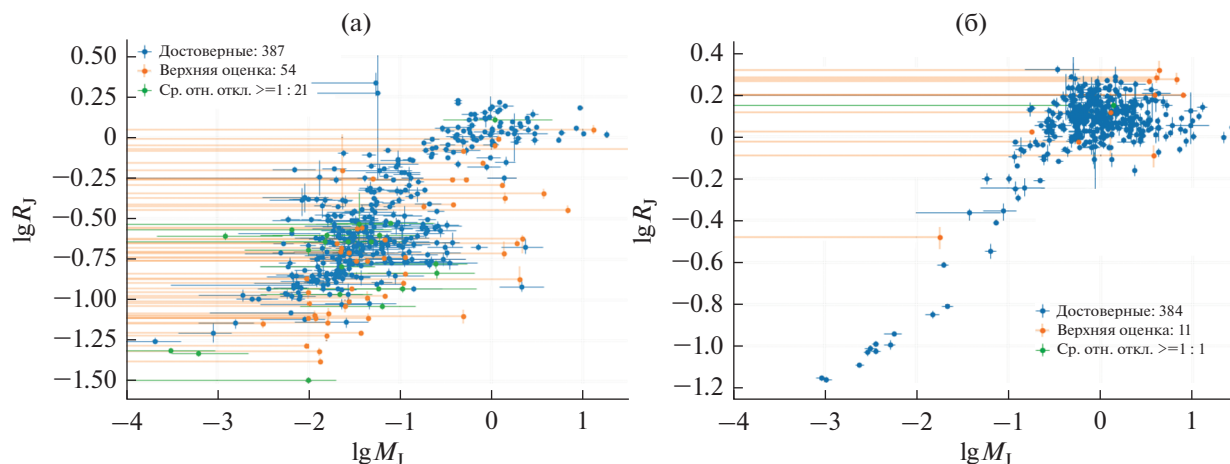


Рис. 2. Экзопланеты группы 1 (а) и группы 2 (б) в плоскости $\lg M - \lg R$ (показаны точками) с погрешностями измерения массы и радиуса (показаны линиями). Оранжевым цветом обозначены экзопланеты, для которых указаны только верхние оценки массы, зеленым цветом — планеты, среднее отклонение которых превышает значение массы планеты (см. раздел “Методика вычислений”, подраздел “Вычисление масс экзопланет”), а синим цветом — остальные планеты (с более достоверно известными массами). “Уходящие” влево за край графика линии означают, что нижняя оценка значения массы близка или равна нулю (в некоторых случаях меньше нуля, см. (Marcy и др., 2014)).

CoRoT, HST) наблюдений транзитных экзопланет начинается для экзопланет с массами менее $\approx 0.68 M_J$ (Иванова и др., 2019; Ananyeva и др., 2020; Ананьева и др., 2020). В интервалах масс, где есть полнота наблюдений, зависимости числа планет от их массы $N(M)$ имеют ярко выраженную степенную зависимость, характеристики которой уточняли последующим анализом более тонких эффектов наблюдательной селекции.

Рис. 1б демонстрирует различные инструментальные охваты космических инструментов Kepler (и TESS) и наземных инструментов (CoRoT, HST) по глубине транзита, зависящие от радиуса планеты. Так, экзопланеты группы 2 сконцентрированы в основном (94%) в области $[0.63, 13] M_J$, $[0.1, 2] R_J$, в то время как экзопланетам группы 1 соответствует более широкий диапазон значений массы и радиуса.

На рис. 2 показаны экзопланеты групп 1 и 2 в плоскости $\lg M - \lg R$. При анализе распределения экзопланет в плоскости масса-радиус (рис. 2) следует отметить следующие особенности:

1) наличие двух интервалов с различной зависимостью — для малых каменных планет массой менее $0.1 M_J$ и радиусом менее $0.1 R_J$ ($-0.44 \lg R_J$) (Bashi и др., 2017) характерна более явная зависимость между массой и радиусом в отличие от области планет гигантов;

2) значительный разброс (на несколько порядков) по массе планет, соответствующих малому интервалу по радиусу, обусловлен в первую очередь их различиями по составу для каменных планет и по величине теплового потока от роди-

тельской звезды для планет газового состава (Weiss и др., 2013);

3) в диапазоне масс $[-4, 1.5] \lg M$ значения по радиусу определены более точно, чем по массе, поэтому чаще определяют зависимость $R(M)$, а не обратную $M(R)$;

4) неоднородность ошибок измерений обусловлена тем, что параметры больших планет измерены лучше, им соответствуют меньшие значения относительных отклонений по сравнению с малыми планетами.

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ЗАВИСИМОСТИ МАССА-РАДИУС, ВЫБРАННЫЕ ДЛЯ ОЦЕНКИ МАСС ЭКЗОПЛАНЕТ ПО ИХ РАДИУСАМ

Как уже было замечено ранее (см. раздел “Параметры экзопланет из Архива 2020”), для всех транзитных экзопланет радиус известен, в то время как масса известна только для небольшой их части (858 из 3169). С целью включения в исследуемое распределение по массе как можно большего количества экзопланет, в настоящей работе оценены статистические значения неизвестных масс (2311) экзопланет с помощью зависимостей масса-радиус (по моделям, примененным к Архивным наблюдательным данным). Зависимости массы от радиуса, построенные на основе физических моделей, например, (Zeng и др., 2016; Otegi и др., 2019), в настоящей работе не рассмотрены.

Зависимость между массой и радиусом планеты определяется плотностью вещества, из которого она состоит. Плотность, в свою очередь, зависит от состава планеты и (для газовых планет)

Таблица 2. Параметрические модели зависимости масса–радиус по некоторым публикациям

№	Показатель степени α в выражении $R(M) \sim M^\alpha$	Интервалы по		Название модели в этой работе (Публикация)
		массе, M_J	радиусу, R_J	
Детерминированные				
1	0.53	<0.47	—	(Weiss и др., 2013)
	−0.04	≥ 0.47	—	
2	0.55	<0.39	<1.08	<i>Bashi17</i> (Bashi и др., 2017)
	0.01	$[0.39, 13]$	≥ 1.08	
Вероятностные*				
3	0.56**	—	≤ 0.71	(Wolfgang и др., 2016)
4	0.28	$<6 \times 10^{-3}$	—	<i>Chen17</i> (Chen и Kipping, 2017)
	0.59	$[6 \times 10^{-3}, 0.41]$	—	
	−0.04	$[0.41, 13]$	—	

* Для вероятностных моделей представлены математические ожидания α ; для модели № 5 представлены математические ожидания граничных значений интервалов массы.

** Показатель степени получен из зависимости $M(R)$.

от внешних условий (орбитальные параметры, параметры звезды). Среднюю плотность или приблизительный состав планеты невозможно узнать напрямую по фотометрическим наблюдениям, поэтому, строго говоря, определить массу экзопланеты по ее радиусу (или наоборот) невозможно. Однако между массой и радиусом планет существует некоторая корреляция, что позволяет в первом приближении оценить статистическую (вероятную или среднюю) массу планеты по ее радиусу на основании наблюдательных данных.

Найденные в литературных источниках зависимости масса–радиус экзопланет, определенные по наблюдательным данным (порядка 10 публикаций, многие из которых перечислены и обсуждаются в (Chen и Kipping, 2017; Ning и др., 2018)), можно разделить по моделям на параметрические и на непараметрические.

К параметрическим (приведены в табл. 2) относятся модели, в которых зависимость масса–радиус аппроксимируется кусочно-степенным законом $M \sim R^\alpha$ или $R \sim M^\alpha$. При этом используются два подхода: 1) детерминированный (Weiss и др., 2013; Bashi и др., 2017), в котором определяется однозначная зависимость между массой и радиусом; 2) вероятностный (Wolfgang и др., 2016; Chen и Kipping, 2017), в котором определенному значению радиуса соответствует некоторое распределение по массе и искомое значение массы является реализацией из этого распределения.

В непараметрической модели, описанной в (Ning и др., 2018), наблюдательные данные аппроксимируются детерминированной функцией из пространства с базисом полиномов Берштейна. Кроме этих моделей дополнительно рассмат-

ривается параметрическая зависимость массы от радиуса, найденная усреднением исследуемых в настоящей работе данных из Архива (см. раздел “Методика вычислений”, подраздел “Вывод зависимости масса–радиус Averaged”).

В (Weiss и др., 2013) определяли зависимость радиуса от массы $R(M)$ для 138 транзитных экзопланет (подтвержденных на сентябрь 2012 г.) с помощью метода наименьших квадратов. В (Bashi и др., 2017) использовали параметры 274 транзитных экзопланет (подтвержденных на март 2016 г.) также для определения зависимости радиуса от массы $R(M)$ планет. Здесь использовался более общий подход — метод полных наименьших квадратов, учитывающий ошибки измерений по обоим параметрам, а также были учтены неоднородность ошибок измерений и неоднородность распределения экзопланет по массе. В этих двух публикациях (№ 1, 2 табл. 2) зависимости масса–радиус приблизительно одинаковые в интервале легких планет: $R \sim M^{0.53}$ и $R \sim M^{0.55}$ соответственно. Интервалу массивных планет ($M > 0.47M_J$ и $M > 0.39M_J$ соответственно), преимущественно газовых гигантов, соответствует слабая и неявная зависимость масса–радиус ($R \sim M^{-0.04}$ и $R \sim M^{0.01}$) вследствие значительной зависимости радиуса планет от величины усредненного теплового потока звезды (Weiss и др., 2013) на орбите планеты. В (Bashi и др., 2017) переходная точка между этими интервалами рассматривалась как свободный параметр, а в (Weiss и др., 2013) переходную точку определяли априори на основании наблюдательных данных и физических соображений. Вывод зависимости масса–радиус *Bashi17* основывается на более поздних данных, а также является более

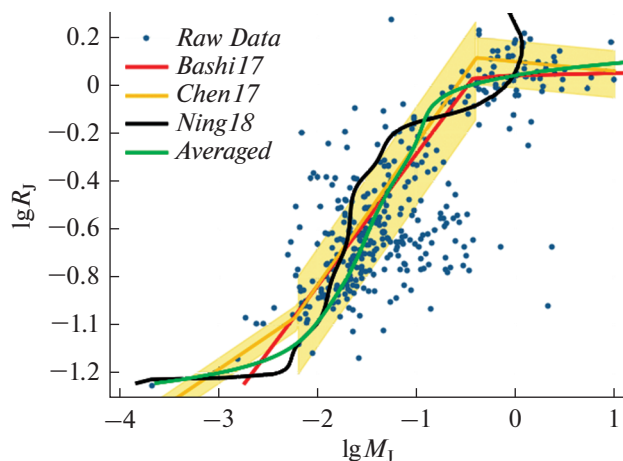


Рис. 3. Зависимости масса-радиус, используемые для вычисления статистической массы экзопланет (группы 1), показанные на фоне данных из Архива о транзитных экзопланетах с измеренными массами: в плоскости $\lg M - \lg R$. Точками показаны экзопланеты группы 1 (*Raw Data* — 386 планеты с массой $M \leq 13 M_J$, обнаруженные космическими телескопами Kepler и TESS) по данным Архива (NASA Exoplanet Archive, 2020) и используемые в работе зависимости масса-радиус *Bashi17* (Bashi и др., 2017), *Chen17* (Chen, Kipping, 2017), *Ning18* (Ning и др., 2018), *Averaged* (найденная усреднением данных из Архива). Для модели *Chen17* линиями показана зависимость для математического ожидания показателя степени в закрашенной области $3\sigma_R$. Тип и принадлежность линий указаны на рисунке.

проработанным, поэтому в настоящей работе из моделей № 1 и 2, табл. 2, мы рассмотрим только модель № 2, *Bashi17*.

В вероятностных моделях (Wolfgang и др., 2016) и (Chen, Kipping, 2017) (№ 3, 4 табл. 2) использовалось Байесовское иерархическое моделирование. Модель № 3 ограничена максимальным значением радиуса $0.71 R_J$, а радиусы исследуемых планет достигают значения $1.6 R_J$, поэтому в настоящей работе мы не применяем модель № 4, недостаточную (по диапазону) для проводимого анализа.

В (Chen, Kipping, 2017) моделируют зависимость масса-радиус в интервале $\sim [0.01, 100] R_J$, который более чем достаточен для настоящего анализа. В этой модели (№ 4 табл. 2) диапазон по массе разделен на четыре интервала: $[10^{-3}, 6 \times 10^{-3}] M_J$ для землеподобных планет и суперземель, $[6 \times 10^{-3}, 0.41] M_J$ для Нептунов, $[0.41, 83.8] M_J$ для Юпитеров и коричневых карликов, а также для звезд ($> 83.8 M_J$) (не указан в табл. 2). Аналогично рассмотренным выше моделям, в (Chen, Kipping, 2017) получена зависимость радиуса от массы $R(M)$, но в этой модели радиус является случайной функцией. Любому заданному значению

массы соответствует нормально распределенное значение радиуса:

$$R \sim N(\mu = CM^\alpha, \sigma_R), \quad (4)$$

где μ — математическое ожидание в виде степенной функции, σ_R — стандартное отклонение, C — константа. Математическое ожидание показателя степени α и граничных значений интервалов масс указано в табл. 2.

На рис. 3 показаны зависимости масса-радиус, с помощью которых вычислялись массы экзопланет группы 1 с неизвестной массой: усредненная модель *Averaged* и модели по публикациям (Bashi и др., 2017) *Bashi17*, (Chen, Kipping, 2017) *Chen17*, а также непараметрическая модель (Ning и др., 2018) *Ning18*.

СРАВНЕНИЕ И АНАЛИЗ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ТРАНЗИТНЫХ ЭКЗОПЛАНЕТ ПО МАССЕ, ПОЛУЧЕННЫХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МОДЕЛЕЙ МАССА-РАДИУС

Функция плотности распределения степенного закона определяется⁷ (Clauset и др., 2009):

$$p(m) = Cm^\alpha, \quad C = \frac{(1 + \alpha)}{m_{\min}^{1+\alpha}}, \quad \alpha < 0, \quad (5)$$

где C — нормирующая константа, α , $m_{\min}$ — параметры распределения — показатель степени и минимальное значение массы в рассматриваемом интервале.

Оценки параметра α и соответствующего ему стандартного отклонения σ для выборки $\mathbf{M} = \{m_i\}$, $i = 1 \dots n$ с заданным значением $m_{\min}$ определяются с использованием метода максимального правдоподобия следующим образом (Clauset и др., 2009):

$$\hat{\alpha} = 1 + n \left(\sum_{m_{\min}}^n \ln \frac{m_i}{m_{\min}} \right)^{-1}, \quad \hat{\sigma} = -\frac{\hat{\alpha} + 1}{\sqrt{n}}. \quad (6)$$

Для 2311 экзопланет с неизвестной массой группы 1 (обнаруженные космическими телескопами Kepler и TESS) массы были рассчитаны (результаты моделирования см. в “Методика вычислений”, подраздел “Вычисление масс экзопланет”) по описанным выше моделям $M(R)$ № 2 и 4 (из табл. 2), *Averaged* (см. раздел “Методика вычислений”, подраздел “Вывод зависимости масса-радиус *Averaged*”) и (Ning и др., 2018). Были исследованы распределения следующих пяти выборок экзопланет 1 группы: выборка из необработанных данных (*Raw Data*) по данным Архива 2020; четыре выборки экзопланет, каждая из которых содержит планеты *Raw Data* и остальные планеты

⁷ Или $p(m) = C_1 m^{-\alpha}$, $\alpha > 0$. Для сравнения показателя степени с результатами в других публикациях принимается указанный вариант в выражении (5).

Таблица 3. Показатель степени α в законе $\partial N/\partial M \sim M^\alpha$ для исследуемых выборок в интервале $[0.02, 13] M_J$, а также невязка со сравниваемым значением $\alpha_{19} = -1.90 \pm 0.06$, полученное в (Иванова и др., 2019; Анапуева и др., 2020; Ананьева и др., 2020)

Выборка планет, модель	$\hat{\alpha} \pm \hat{\sigma}$	$\min(\alpha - \alpha_{19})$	Количество планет в интервале $[0.02, 13] M_J$	
			всего	с вычисленной массой по зависимости масса-радиус
<i>Raw Data</i>	-1.50 ± 0.03	0.32	253	0
<i>Averaged</i>	-2.12 ± 0.03	0.13	1515	1256
<i>Bashi17</i>	-2.09 ± 0.03	0.10	1174	918
<i>Chen17</i>	-1.89 ± 0.03	—	1070	810
<i>Ning18</i>	-2.27 ± 0.04	0.27	1115	861

1 группы с вычисленными по моделям массами № 2 и 4 (из табл. 2), *Averaged* и (Ning и др., 2018) (далее соответственно: *Bashi17*, *Chen17*, *Averaged* и *Ning18*). Планеты с радиусом менее $0.178 R_J$ или периодом более 400 дней (1188 экзопланеты) были исключены из выборок из-за неполноты данных телескопа Kepler. Поэтому из 2773 экзопланет 1 группы остается для рассмотрения 1561.

Для каждой из этих выборок в интервале масс $[0.02, 13] M_J$ определены оценки показателя степени α , представленные в табл. 3, рис. 4. В исследуемом интервале в выборках оказалось различное количество⁸ планет, что обусловлено использованием различных зависимостей масса-радиус.

В серии работ (Иванова и др., 2019; Анапуева и др., 2020; Ананьева и др., 2020) массу экзопланет не вычисляли по радиусу, но распределение по массе из Архива 2019 (NASA Exoplanet Archive, 2019) корректировали с помощью коэффициента “измеренности массы” (см. раздел “Распределение транзитных экзопланет...”). В результате скорректированное распределение экзопланет по их массам соответствовало степенному закону с показателем степени $\alpha_{19} = -1.90 \pm 0.06$, что совпадает с результатом выборки *Chen17* и близко к *Bashi17*. Минимальная невязка соответствует выборке *Bashi17* (0.1), для *Averaged* и *Ning18* составляет менее 12%.

При проверке на однородность исследуемых выборок между собой попарно (*Averaged* с *Bashi17*, *Averaged* с *Chen17* и т.д.) гипотеза о принадлежности их одной генеральной совокупности отвергается, т.е. при использовании разных зависимостей масса-радиус получаются статистически различные распределения экзопланет по массе. Соответствие распределений степенно-

му закону проверяется в разделе “Исследование нижней границы...” далее.

УЧЕТ ВЕРОЯТНОСТИ ТРАНЗИТА КАК ФАКТОРА НАБЛЮДАТЕЛЬНОЙ СЕЛЕКЦИИ

Как уже обсуждалось выше (см. раздел “Распределение транзитных экзопланет...”), вслед-

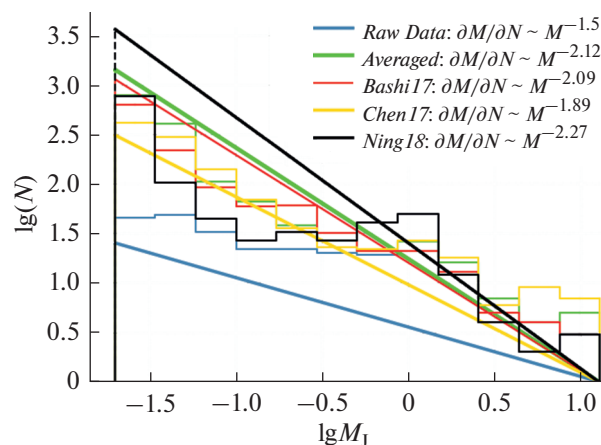


Рис. 4. Гистограммы⁹ распределений по массе экзопланет группы 1 (*Raw Data* — экзопланеты, обнаруженные космическими телескопами Kepler и TESS) по данным Архива (NASA Exoplanet Archive, 2020), а также полученных с добавлением в выборку *Raw Data* масс экзопланет, вычисленных по зависимостям масса-радиус: *Averaged* (найденная усреднением данных), *Bashi17* (Bashi и др., 2017), *Chen17* (Chen, Kipping, 2017), *Ning18* (Ning и др., 2018) в интервале масс $[0.02, 13] M_J$. Тип и цвет линий указан, наклонными линиями показаны соответствующие аппроксимации степенным законом с различными показателями степени.

⁸ Количество масс, взятых из Архива, в выборках с вычисленными массами не совпадает с количеством в *Raw Data*, т.к. в последнюю включены только достаточно достоверные значения (см. раздел “Статистические зависимости...”).

⁹ Гистограммы на рис. 4 приведены только для визуализации исследуемых распределений, вид которых зависит от разбиения по интервалам; степенные законы не были получены их аппроксимацией, а были получены с использованием метода максимального правдоподобия (6).

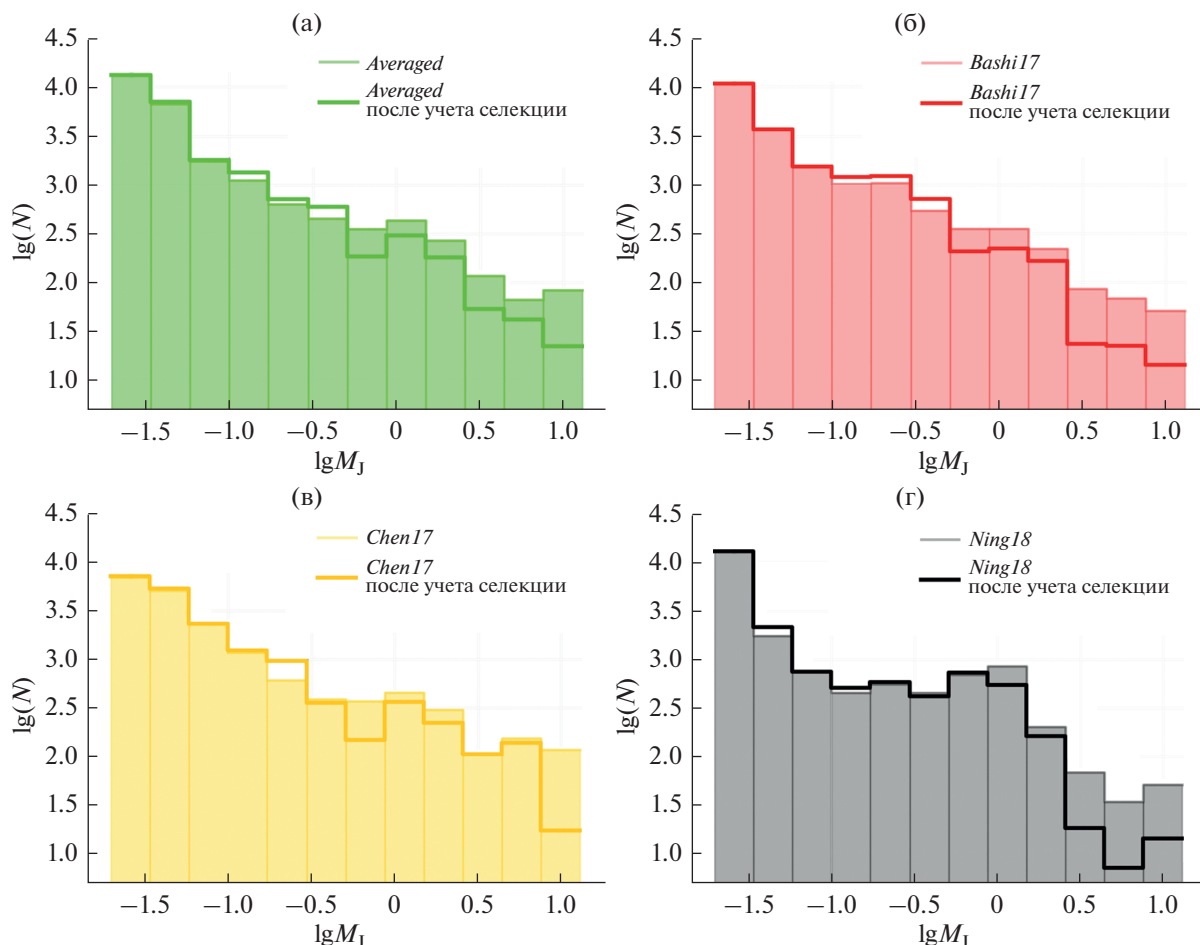


Рис. 5. Гистограммы распределений по массе экзопланет группы 1 (планеты с массой $M \leq 13M_J$, обнаруженные космическими телескопами Kepler и TESS) с добавленными экзопланетами со статистическими массами, вычисленными по зависимостям масса-радиус до учета вероятности транзита (закрашенные гистограммы) и после (незакрашенные): а) *Averaged* (найденная усреднением данных), б) *Bashi17* (Bashi и др., 2017), в) *Chen17* (Chen, Kipping, 2017), г) *Ning18* (Ning и др., 2018).

ствие малой вероятности транзитной конфигурации p_{tr} наблюдательная селекция обуславливает недостаточное число зарегистрированных экзопланет. Транзитным методом невозможно обнаружить не находящиеся в транзитной конфигурации планеты (не вызывающие падения блеска звезды для наблюдателя с Земли), которые, тем не менее, составляют большинство. Для их учета статистический вес каждой транзитной планеты может быть умножен на коэффициент $k_1 > 1$, введенный формулой (2) (Petigura и др., 2013), т.е. предполагается, что каждой обнаруженной экзопланете статистически соответствует некоторое множество планет с такой же массой в количестве, обратно пропорциональном p_{tr} (Иванова и др., 2019; Ananyeva и др., 2020; Ананьева и др., 2020).

Распределения экзопланет по массе, полученные выше по моделям $M(R)$ (в разделе “Статисти-

ческие зависимости масса-радиус...”), представлены на рис. 5 для планет группы 1, обсуждавшихся в разделе “Сравнение и анализ распределений...”, до учета наблюдательной селекции и после, скорректированные с помощью коэффициента k_1 .

Для каждой выборки в отдельности был проведен тест Колмогорова-Смирнова на однородность до и после учета селекции (фактор k_1) в результате которого для всех выборок, кроме *Chen17*, гипотеза о принадлежности распределений одному закону распределения до и после учета селекции не отклоняется. Для выборки *Chen17* после учета селекции показатель степени изменяется на $\alpha = -1.94 \pm 0.03$ ($\alpha = -1.89 \pm 0.03$ без учета k_1). Это значение совпадает с $\alpha = -1.99 \pm 0.08$, найденное в (Иванова и др., 2019; Ananyeva и др., 2020; Ананьева и др., 2020) после коррекции распределения с помощью коэффициента измерения массы и аналогичного учета вероятности

транзита. Так как статистически распределения для исследуемых выборок (кроме *Chen17*) не отличаются, показатели степени для них также не будут отличаться (табл. 3). Поэтому, после учета наблюдательной селекции, показатель степени совпадает с $\alpha = -1.99 \pm 0.08$ и у выборки *Bashi17* ($\alpha = -2.09 \pm 0.03$), а для выборок *Averaged* и *Ning18* невязка уменьшилась до 0.01 и 0.16 соответственно по сравнению со значениями, полученными до учета селекции.

На основании проведенного теста на однородность можно заключить, что учет наблюдательной селекции транзитного метода для рассматриваемых экзопланет (с большой полуосью $a \leq 1$ а. е.) статистически незначительно изменяет вид распределения экзопланет по массе. Отличие наблюдается (рис. 5) только в области больших масс $M > 3.16 M_J$ ($0.5 \lg M_J$), где количество планет мало. В этом диапазоне после коррекции количество планет уменьшилось. Для $M > 0.1 M_J$ распределения не изменили вид, за исключением выборки *Ning18*.

При коррекции селекции транзитного метода, (фактор k_1 , обратно пропорциональный вероятности транзитной конфигурации) в статистическое распределение добавляются планеты с массами, распределенными в малом интервале совместного распределения $\partial^2 N / (\partial r \partial a)$ радиуса звезды r и большой полуоси орбиты экзопланеты a в соответствии с наблюдаемым в нем распределением экзопланет по массе (количество добавленных планет определенной массы для малого интервала (r, a) пропорционально количеству планет в этом интервале с такой массой). Если бы вероятность обнаружения экзопланеты зависела от ее массы, то после коррекции наблюдалось бы значительное увеличение числа экзопланет с массами, вероятность которых обнаружить мала, по сравнению с теми, вероятность которых обнаружить велика, что привело бы к значительному изменению распределения по массе после коррекции. Вероятность обнаружения $p_r \sim r/a$ в первую очередь зависит от большой полуоси, радиус звезды варьируется в меньшей степени. Поэтому, хотя между массой и большой полуосью экзопланет статистической зависимости не наблюдается, наличие зависимости распределения планет по массе от близости к звезде могло бы косвенно свидетельствовать о структурировании в планетных системах. Относительное уменьшение числа планет с большой массой (что слабо просматривается на рис. 5) после коррекции могло бы свидетельствовать о большей вероятности их обнаружения, а значит преимущественно более близком расположении по сравнению с легкими планетами. Однако на основании теста на однородность распределений, среди исследуемых выборок различие наблюдается только для одной

модельной зависимости *Chen17*. На основании этого нельзя утверждать о каком-либо структурировании для экзопланет, большая полуось которых менее ≈ 1 а. е. Обнаруженные транзитные планеты, удаленные от звезды на большие расстояния, единичны из-за ограниченности транзитного метода, что является причиной статистической неполноты в детектировании долгопериодических планет.

Кроме того, для звезд большого радиуса вероятность обнаружения экзопланеты больше, чем для меньших звезд при заданном значении большой полуоси. При этом звезды большого радиуса менее распространены, поэтому вероятность обнаружения экзопланет у таких звезд должна быть больше, чем в случае равномерного распределения звезд по радиусу. Т.е. неучет зависимости распространенности звезд разного радиуса может завышать вероятность обнаружения экзопланет у больших звезд и занижать ее для малых. В рассматриваемой выборке экзопланеты, обнаруженные телескопами Kepler и TESS, вращаются преимущественно вокруг солнцеподобных звезд (радиус $\approx 90\%$ рассматриваемых звезд лежит в диапазоне $r \in [0.4, 1.8] r_{\text{sun}}$), поэтому, скорее всего, этот фактор незначительно влияет на распределение по массе и в настоящей работе он не учитывается.

ИССЛЕДОВАНИЕ НИЖНЕЙ ГРАНИЦЫ В РАСПРЕДЕЛЕНИЯХ ЭКЗОПЛАНЕТ ПО МАССЕ И СРАВНЕНИЕ С РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ, ПОЛУЧЕННЫМ МЕТОДОМ ПОПУЛЯЦИОННОГО СИНТЕЗА

Параметрами распределения экзопланет по массам аппроксимированного степенным законом являются показатель степени α и нижняя граница масс $m_{\min}$ (см. раздел “Сравнение и анализ распределений...”). В предыдущем разделе “Учет вероятности транзита...” мы полагали $m_{\min} = 0.02 M_J$ с целью сравнения с результатами работ (Иванова и др., 2019; Ananyeva и др., 2020; Ананьева и др., 2020) полученными при $m_{\min} = 0.02 M_J$, а также на основании области полноты наблюдения телескопа Kepler (см. раздел “Параметры экзопланет из архива 2020”). Однако, полученные распределения можно аппроксимировать степенным законом и с $m_{\min} > 0.02 M_J$, а также ломанным степенным законом, что было получено в (Mordasini, 2018).

Так, на рис. 6 для каждой из исследуемых модельных выборок (см. раздел “Учет вероятности транзита...”) получены зависимости $\alpha(m_{\min})$ — показателя степени закона распределения α от нижней границы рассматриваемого интервала масс $m_{\min}$. Применение критерия Колмогорова-Смирнова позволило определить для каждой модель-

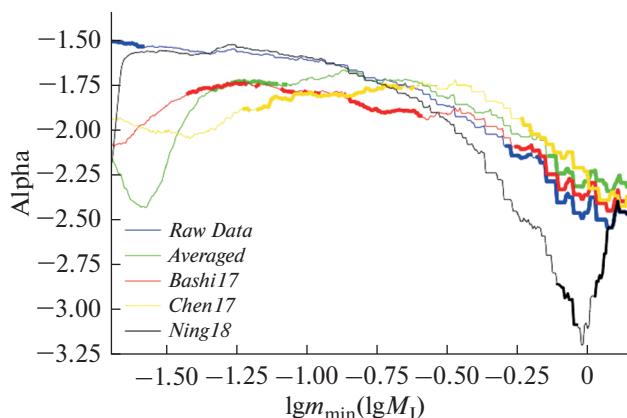


Рис. 6. Зависимость показателя степени от нижней границы масс $\alpha(m_{\min})$, для выборок: экзопланеты группы 1 (*Raw Data* — экзопланеты, обнаруженные космическими телескопами Kepler и TESS) по данным Архива (NASA Exoplanet Archive, 2020), а также полученных с добавлением в выборку *Raw Data* масс экзопланет, вычисленных по зависимостям масса-радиус: *Averaged* (найденная усреднением данных), *Bashi17* (Bashi и др., 2017), *Chen17* (Chen, Kipping, 2017), *Ning18* (Ning и др., 2018). Утолщенной линией показаны значения α , при которых распределение соответствует степенному закону, согласно тесту Колмогорова-Смирнова.

ной выборки оптимальные значения параметров распределения α , $m_{\min}$ и проверить гипотезу о соответствии распределений выборок степенному закону для всех значений $m_{\min}$ (результаты моделирования см. раздел “Методика вычислений”, подраздел “Тест на соответствие степенному закону”). Значения $\alpha(m_{\min})$, при которых гипотеза о соответствии степенному закону не отвергается, показаны на рисунке утолщенной линией.

На отрезке $[0.03, 0.15]M_J$ ($[-1.5, -0.8]\lg M_J$) близкое поведение функции наблюдается для выборок *Raw Data*, *Ning18* ($\alpha \approx -1.55$) и *Averaged*, *Bashi17*, *Chen17* ($\alpha \approx -2.0 \dots -1.7$). Далее, при смещении нижней границы до $\approx 0.3M_J$ ($-0.5\lg M_J$) $\alpha \in [-1.7, -2]$ для всех выборок. На отрезке $[0.3, 1.17]M_J$ ($[-0.8, 0.69]\lg M_J$) для выборки *Ning18* $\alpha \in [-2, -3.25]$ значительно отличается от $\alpha \in [-1.7, -2.5]$ для остальных выборок. Для $m_{\min} > 1.17$ различия между выборками *Raw Data* и *Ning18* нет, при этом поведение всех функций идентично. При увеличении $m_{\min}$ значительно уменьшается количество планет в выборке. Для $m_{\min} = 0.17M_J$ ($-0.75\lg M_J$) количество планет в зависимости от выборки варьируется от 101 до 169, из которых архивных 101, а в интервал $[1, 13]M_J$ уменьшается до 31...57.

На отрезке $[0.046, 0.061]M_J$ ($[-1.34, -1.21]\lg M_J$) статистически не различимы распределения *Averaged* и *Bashi17*, а на $[0.093, 0.14]M_J$ ($[-1.03, -0.85]\lg M_J$) — *Bashi17*, *Chen17*. На отрезке $[0.058,$

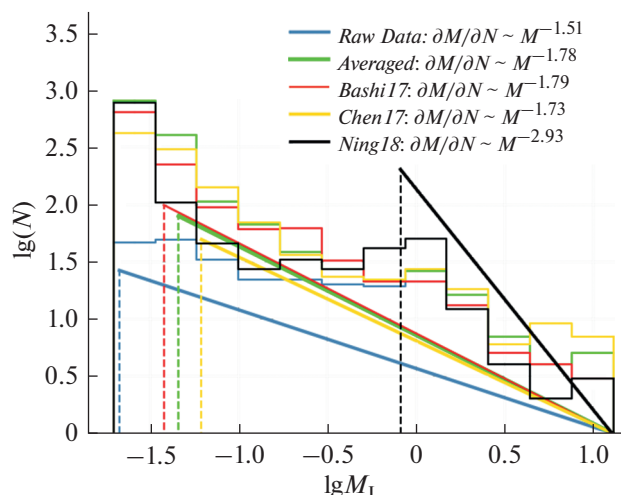


Рис. 7. Гистограммы распределений по массе экзопланет группы 1 (*Raw Data* — экзопланеты, обнаруженные космическими телескопами Kepler и TESS) по данным Архива (NASA Exoplanet Archive, 2020), а также полученных с добавлением в выборку *Raw Data* масс экзопланет, вычисленных по зависимостям масса-радиус: *Averaged* (найденная усреднением данных), *Bashi17* (Bashi и др., 2017), *Chen17* (Chen, Kipping, 2017), *Ning18* (Ning и др., 2018). Тип линий указан на вкладке. Пунктирными вертикальными линиями обозначены минимальные значения $m_{\min}$ (указаны на вкладке), которые соответствуют оптимальному значению α показателя степени в законе распределения $\partial N / \partial M \sim M^\alpha$, показанным наклонными линиями на соответствующем интервале.

$0.08]M_J$ ($[-1.24, -1.10]\lg M_J$) выборки *Averaged*, *Bashi17*, *Chen17* распределены в соответствии со степенным законом одновременно (за исключением двух малых интервалов *Bashi17*, см. раздел “Методика вычислений”, подраздел “Тест на соответствие степенному закону”), при этом $\alpha \in [-1.88, -1.72]$.

Полученные оптимальные параметры (в смысле соответствия степенному закону, см. раздел “Методика вычислений”, подраздел “Тест на соответствие степенному закону”) распределений исследуемых выборок (рис. 7) представлены в табл. 4.

Полученный результат о соответствии степенному закону выборок *Averaged*, *Bashi17*, *Chen17* в большей степени по сравнению с *Raw Data*, *Ning18* подтверждается также видом распределений на рис. 7. Распределения *Raw Data*, *Ning18* имеют значительно отличающийся вид на интервале примерно $[0.1, 0.56]M_J$ ($[-1, -0.22]\lg M_J$), вследствие чего гипотеза о соответствии их степенному закону (рис. 6) справедлива только в области тяжелых планет (для *Raw Data* также есть небольшой интервал при $m_{\min} \in [0.02, 0.03]M_J$). Подобный вид закона распределения — ломаный степенной с тремя участками — получен в (Mordasini, 2018). Кроме того, при $m_{\min} \in [0.31,$

Таблица 4. Оптимальные параметры законов распределения для исследуемых выборок экзопланет

Выборка планет, модель	Показатель степени α в законе $\partial N/\partial M \sim M^\alpha$	Минимальное значение $m_{\min}, M_J$	Количество планет в интервале $[m_{\min}, 13]M_J$	
			всего	с вычисленной массой
<i>Raw Data</i>	-1.51 ± 0.03	0.021	248	0
<i>Averaged</i>	-1.78 ± 0.04	0.046	400	215
<i>Bashi17</i>	-1.79 ± 0.04	0.038	459	259
<i>Chen17</i>	-1.73 ± 0.04	0.062	333	176
<i>Ning18</i>	-2.93 ± 0.22	0.82	76	30

Таблица 5. Параметры ломанного степенного закона распределения для начальной выборки *Raw Data* и для выборки *Ning18*, а также полученные в (Mordasini, 2018)

Название выборки	Нижняя граница $m_{\min}, M_J$	Переходные точки, M_J		Показатель степени		
		M_{T1}	M_{T2}	α_1	α_2	α_3
<i>Mordasini, 2018</i>	—	0.094	5	—	−1	−2
<i>Raw Data</i>	0.025	0.28	1.35	−1.47	−0.97	−2.88
<i>Ning18</i>	0.025	0.16	1.04	−1.99	−0.62	−2.88

0.56], согласно тесту Колмогорова-Смирнова, ни одно из распределений не соответствует степенному закону, что указывает в целом на необходимость исследования более сложного закона распределения, показатель степени которого может различаться на двух или более интервалах. Согласно полученному распределению методом популяционного синтеза (Mordasini, 2018), мы проверили аппроксимацию распределения экзопланет по массам тремя степенными законами на трех интервалах.

Математически такой закон распределения определяется 6 параметрами: минимальное значение в рассматриваемом интервале масс $m_{\min}$; две переходные точки, определяющих границы среднего интервала M_{T1} , M_{T2} ; показатели степени α_1 , α_2 , α_3 в законе распределения $\partial N/\partial M \sim M^\alpha$ на трех интервалах $[m_{\min}, M_{T1}]$, $[M_{T1}, M_{T2}]$, $[M_{T2}, 13M_J]$ соответственно. С помощью метода максимального правдоподобия (6) варьированием параметров α_1 , α_2 , α_3 , $m_{\min}$, M_{T1} , M_{T2} были определены оптимальные значения этих параметров, представленные в табл. 5, для выборок *Raw Data* и *Ning18* (рис. 8), наилучшим образом соответствующие такому закону распределения (соответствие под-

тверждено описанным в разделе “Методика вычислений”, подразделе “Тест на соответствие степенному закону” образом).

В обеих выборках наблюдается недостаток планет на интервале $M > 1 M_J$ аналогично (Иванова и др., 2019; Апануева и др., 2020; Ананьева и др., 2020). Переходная точка M_{T1} распределения *Ning18* находится ближе, чем у *Raw Data*, относительно M_{T1} (Mordasini, 2018), при этом для M_{T2} — наоборот. Показатель степени на первом интервале α_1 с хорошей точностью совпадает со сравниваемым законом для *Ning18*, на втором интервале α_2 — для *Raw Data*. На третьем интервале *Raw Data* лучше соответствует (Mordasini, 2018), чем *Ning18* (меньшее отличие показателя степени). Хотя на втором интервале у (Mordasini, 2018) $\alpha_2 = -1$, в этом распределении также, как и в распределении *Ning18*, наблюдается увеличение (в логарифмических осях) плотности распределения при увеличении массы. Кроме того, разница (суммарная и максимальная) между дискретными функциями распределения (Mordasini, 2018) и *Ning18* меньше, чем аналогичная для *Raw Data*. Таким образом можно заключить, что распределение *Ning18* в большей степени соответствует (Mordasini, 2018).

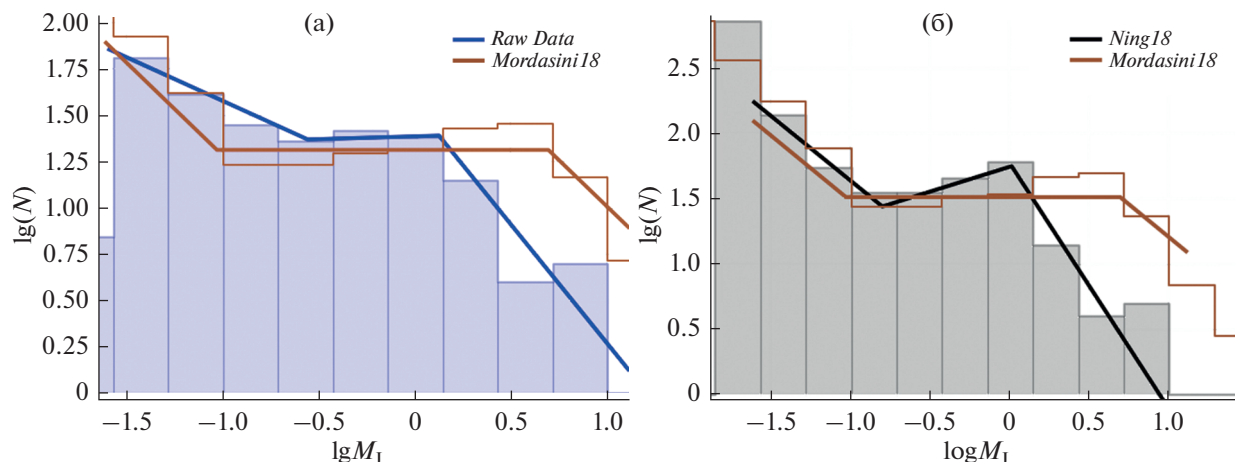


Рис. 8. Гистограммы распределений по массе экзопланет группы 1 и соответствующие им ломанные степенные законы распределения из (Mordasini, 2018) *Mordasini18* и а) по данным Архива (NASA Exoplanet Archive, 2020) *Raw Data* — экзопланеты, обнаруженные космическими телескопами Kepler и TESS, б) полученное с добавлением в выборку *Raw Data* масс, вычисленных по зависимости масса-радиус Ning18 (Ning и др., 2018).

ИССЛЕДОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПО МАССЕ ЭКЗОПЛАНЕТ, ОБНАРУЖЕННЫХ НАЗЕМНЫМИ ИНСТРУМЕНТАМИ И КОСМИЧЕСКИМИ ТЕЛЕСКОПАМИ COROT И HST

Массы всех 396 экзопланет группы 2 (обнаруженных наземными инструментами и космическими телескопами CoRoT и HST) известны по архивным данным NASA (Exoplanet Archive, 2020), поэтому зависимости масса-радиус для них

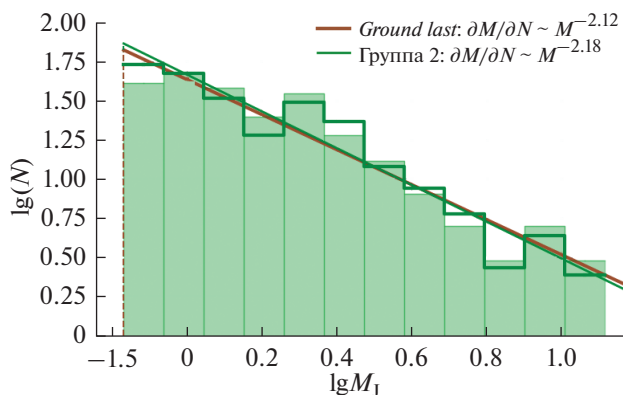


Рис. 9. Гистограммы распределения по массе экзопланет группы 2 (365 планеты с массой $M \in [0.1, 13M_J]$, обнаруженные наземными инструментами и космическими телескопами CoRoT и HST) по данным Архива (NASA Exoplanet Archive, 2020), до учета наблюдательной селекции (закрашенная) и после (линия), а также найденные законы распределения $\partial N/\partial M \sim M^\alpha$ (наклонные линии, пунктирными линиями обозначены минимальные значения $m_{\min}$): в (Иванова и др., 2019; Ananyeva и др., 2020; Ананьева и др., 2020) (*Ground last*) и в настоящей работе (Группа 2).

не применялись. Рассматриваются 384 экзопланеты с достаточно достоверно известными массами группы 2 (см. “Параметры экзопланет из архива 2020”), 243 из которых находятся в рассматриваемом интервале $[0.68, 13]M_J$. Аналогичным образом, как и для предыдущих выборок, были определены параметры степенного закона, соответствующего распределению экзопланет этой группы (группа 2 на рис. 9) до учета наблюдательной селекции и после.

В серии работ (Иванова и др., 2019; Ananyeva и др., 2020; Ананьева и др., 2020) для аналогичной выборки экзопланет, известных на март 2019 года (NASA Exoplanet Archive, 2019), распределение соответствовало степенному закону с показателем степени $\alpha = -2.12 \pm 0.12$ (*Ground last* на рис. 9) при $m_{\min} = 0.68M_J$, что совпадает с полученным результатом: $\alpha = -2.18 \pm 0.08$ при $m_{\min} = 0.68M_J$ или $\alpha = -2.22 \pm 0.08$ при $m_{\min} = 0.71M_J$ (оптимальный вариант). Учет наблюдательной селекции транзитного метода (см. раздел “Учет вероятности транзита...”) статистически незначительно изменяет исследуемое распределение на основании проведенного теста типа Колмогорова-Смирнова на однородность распределений ($\alpha = -2.21 \pm 0.04$ при $m_{\min} = 0.68M_J$, $\alpha = -2.25 \pm 0.04$ при $m_{\min} = 0.71M_J$), что также согласуется с результатом (Иванова и др., 2019; Ananyeva и др., 2020; Ананьева и др., 2020) для экзопланет этой группы после учета наблюдательной селекции ($\alpha = -2.171 \pm 0.12$). Гипотезы о соответствии степенному закону для этих значений $m_{\min}$ принимаются на основании проведенного теста (см. раздел “Методика вычислений”, подраздел “Тест на соответствие степенному закону”).

Таблица 6. Коэффициенты a_i полинома $Y(X)$

Зависимость	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
$R(M)$	-7.02×10^{-3}	6.67×10^{-2}	-1.87×10^{-1}	-3.69×10^{-3}	3.85×10^{-1}	-2.07×10^{-2}	5.01×10^{-2}	3.66×10^{-2}
$M(R)$	7.94	337.7	580.2	512.5	245.4	61.7	8.49	-0.42

МЕТОДИКА ВЫЧИСЛЕНИЙ

Вывод зависимости масса-радиус Averaged

Усредненная зависимость *Averaged* получена следующим образом:

1) интервалы значений по радиусу разбиваются на n равных интервалов в логарифмическом масштабе;

2) для планет в каждом интервале определяется среднее логарифмическое значение массы и радиуса:

$$\begin{aligned} \lg(M_{av\_i}) &= \frac{1}{n_i} \sum_{k=1}^{n_i} \lg(M_k), \\ \lg(R_{av\_i}) &= \frac{1}{n_i} \sum_{k=1}^{n_i} \lg(R_k), \end{aligned} \quad (7)$$

где R, M — радиусы и массы планет с $R \in dR$;

3) полученные средние значения аппроксимируются полиномом k -степени:

$$F_k(a, R) = \sum_{i=0}^k a_i (\lg R_{av})^{k-i}, \quad (8)$$

где коэффициенты a_i (результат вычислений см. в табл. 6) определяются методом наименьших квадратов.

Вычисление масс экзопланет по их радиусу

После вычисления массы экзопланет 1 группы по моделям, описанным в разделе “Статистические зависимости масса-радиус...”, вносятся две поправки, обусловленные недостоверностью данных. У 21 планеты с известной массой $M_{\Delta m^-}^{\Delta m^+}$ ($M_{\min} = M - \Delta m^-$, $M_{\max} = M + \Delta m^+$) среднее относительное отклонение превышает значение массы ($\delta M = (\Delta m^+ + \Delta m^-)/(2M) \geq 1$), поэтому при моделировании для них принимается полученное по модели значение M^* при условии: $M^* \in [M_{\min}, M_{\max}]$. Если вычисленное значение не попадает в этот интервал, то принимается ближайшее значение из него M^* : $M = \min(|M^* - M_{\min}|, |M^* - M_{\max}|)$. Кроме того, для 53 планет с массой $M < 13M_J$, у которых известна только верхняя оценка массы $M_{\max}$, принимается минимальное значение из $M_{\max}$ и M^* : $M = \min(M_{\max}, M^*)$.

Эти 74 планеты (21 и 53 планеты, указанные выше) можно отнести к “промежуточной” группе между группами планет с достаточно достоверно известной массой и с неизвестной массой. Результаты моделирования представлены на рис. 11. Как видно из рисунка, для одной и той же экзопланеты из “промежуточной” группы (точки, не лежащие на прямой для моделей *Averaged* и *Bashi17*) в зависимости от модели будет использоваться рассчитанное значение или значение из Архива.

При исследовании экзопланет группы 2 были исключены из расчета 12 (11 со средним отклонением больше значения массы и 1 с верхней оценкой массы) экзопланеты из аналогичной “промежуточной” группы.

Тест на соответствие степенному закону

Статистика типа Колмогорова–Смирнова определяется (Лемешко, 2014) как:

$$D = \max |F_E(M) - F_T(M | \alpha, m_{\min})|, \quad (9)$$

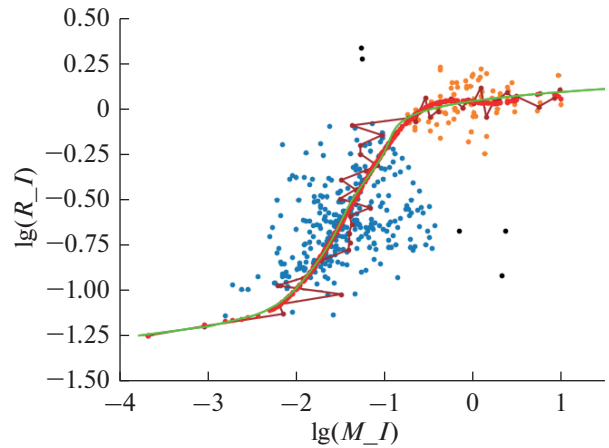


Рис. 10. Функции $M(R)$ (зеленая линия), $R(M)$ (красные точки), среднее логарифмическое значение массы и радиуса (коричневая линия с точками). Точками показаны экзопланеты группы 1 (*Raw Data* — 386 планеты с массой $M \leq 13M_J$, обнаруженные космическими телескопами Kepler и TESS) по данным Архива (NASA Exoplanet Archive, 2020). Для планет малых масс (синие) разбиение осуществляется по радиусу, для гигантов (оранжевые) — по массе. Пять планет считаются выбросами и их не учитывали (черные), т.к. каждая из них оказывают значительное влияние на искомую зависимость.

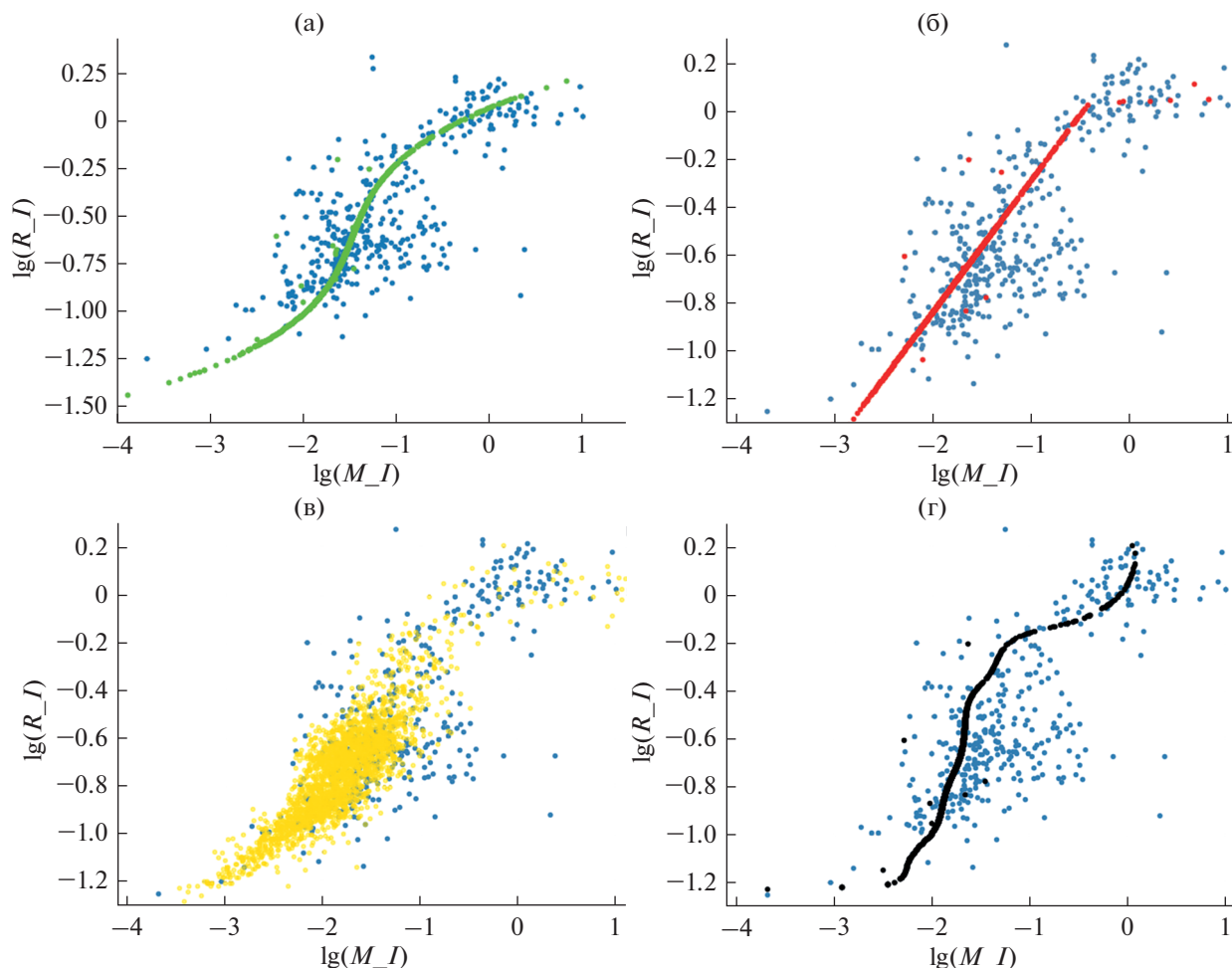


Рис. 11. Экзопланеты группы 1 (планеты с массой $M \leq 13 M_J$, обнаруженные космическими телескопами Kepler и TESS) в плоскости $\lg M - \lg R$ (синие точки) с добавленными экзопланетами со статистическими массами, вычисленными по зависимостям масса-радиус: а) *Averaged* (найденная усреднением данных), б) *Bashi17* (Bashi и др., 2017), в) *Chen17* (Chen, Kipping, 2017), г) *Ning18* (Ning и др., 2018).

где $F_E(M)$ — функция распределения рассматриваемой выборки (эмпирической) $\mathbf{M} = \{m_i\}$, $i = 1 \dots n$; $F_T(M|\alpha, m_{\min})$ — теоретическая функция распределения с параметрами $(\alpha, m_{\min})$, определенными по распределению выборки $\mathbf{M}$. Выдвигается гипотеза H_0 о том, что эмпирическая выборка $\mathbf{M}$ соответствует теоретическому степенному закону $F_T(M|\alpha, m_{\min})$. Такая гипотеза является сложной — параметры $\alpha, m_{\min}$ определены по этой же выборке, согласие которой проверяется, поэтому критерий согласия не обладает свойством “свободы от распределения” (на закон распределения статистики влияют вид закона распределения, метод оценивания параметров и их значения, см. (Лемешко, 2014, Clauset и др., 2009)). В этом случае возможно проверить гипотезу по сгенерированному закону распределения статистики. Реализуется N искусственных выборок $\mathbf{M}_j = \{m_i\}$, $i = 1 \dots n$, $j = 1 \dots N$ подобных исследуемой (Clauset и др., 2009):

1) определяется количество масс n_{power} из выборки $\mathbf{M}$, для которых $m \geq m_{\min}$;

2) N раз с вероятностью $p_{\text{power}} = n_{\text{power}}/n$ генерируется значение m_i , соответствующее степенному закону распределения $F(\alpha, m_{\min})$ с полученными параметрами по выборке $\mathbf{M}$, и с вероятностью $p_{\text{uniform}} = 1 - p_{\text{power}}$ случайным образом выбирается значение m_i из выборки $\mathbf{M}$ в диапазоне $[M_{\min}, m_{\min})$.

После чего также, как и было сделано для эмпирической выборки $\mathbf{M}$, для каждой искусственной выборки $\mathbf{M}_j$ определяются параметры $\alpha_j, m_{\min,j}$ и статистика D_j . Далее определяется отношение количества искусственных выборок $N_{D_j > D}$, распределение которых отличается от теоретического закона распределения $F_j(\alpha_j, m_{\min,j})$ больше, чем отличается распределение эмпирической выборки от теоретического $F(\alpha, m_{\min})$, к общему ко-

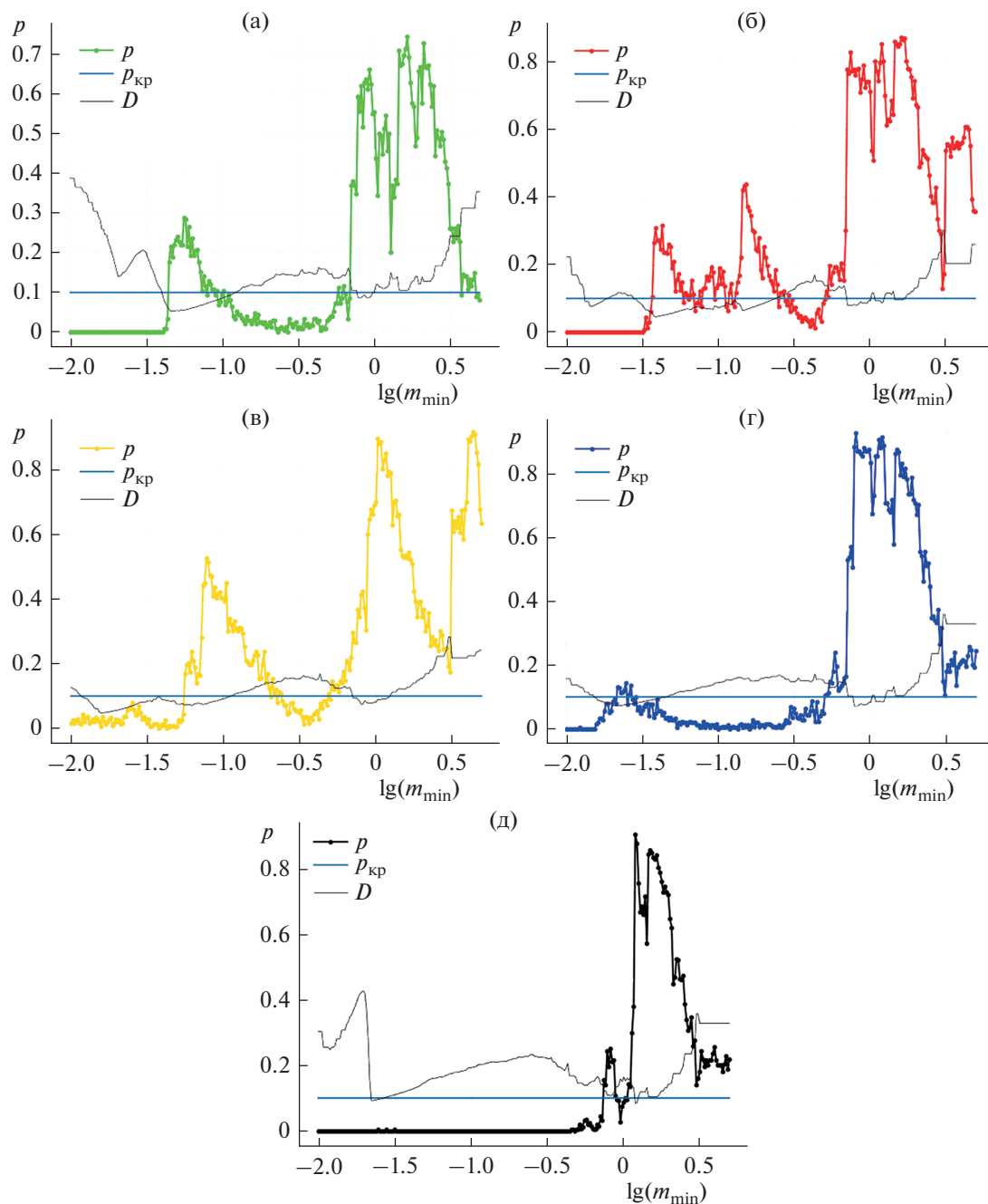


Рис. 12. Зависимости $p = N_{Dj > D}/N$ и D (7) от минимального значения массы в рассматриваемом интервале для экзопланет группы 1: а) *Raw Data* — экзопланеты, обнаруженные космическими телескопами Kepler и TESS по данным Архива (NASA Exoplanet Archive, 2020); а также полученных с добавлением в выборку *Raw Data* масс экзопланет, вычисленных по зависимостям масса-радиус: б) *Averaged* (найденная усреднением данных), в) *Bashi17* (Bashi и др., 2017), г) *Chen17* (Chen, Kipping, 2017), д) *Ning18* (Ning и др., 2018). Также показана горизонтальная линия $p_{кр} = 0.1$.

личеству искусственных выборок N : $p = N_{Dj > D}/N$. Гипотеза H_0 не отвергается (т.е. принимается, что распределение соответствует степенному закону), если эта доля больше критического значения $p_{кр}$, которое назначается заранее, т.е. если более, чем $p_{кр} \times 100\%$ из подобных искусственных выборок отличаются от теоретического больше, чем

исследуемая эмпирическая выборка. Согласно рекомендации Clauset и др., 2009, принимается: $p_{кр} = 0.1$, $N = 2500$.

На рис. 12 представлен результат проведения теста на соответствие степенному закону распределения при варьировании нижней границы распределения для исследуемых выборок. Характер-

Таблица 7. Значения $m_{\min}$, при которых гипотеза о соответствии степенному закону не отклоняется

Выборка	Ближайший интервал к $0.02M_J$	Минимальное значение $m_{\min} < 1.8M_J (0.51g(M_J))$
<i>Raw Data</i>	[0.021, 0.031]	0.51
<i>Averaged</i>	[0.046, 0.087]	0.54
<i>Bashi17</i>	[0.038, 0.061]	0.54
<i>Chen17</i>	[0.058, 0.24]	0.56
<i>Ning18</i>	[0.75, 0.94]	1.28

ные значения $m_{\min}$, на которых гипотеза не отклонялась, указаны в табл. 7. В качестве оптимального (см. раздел “Исследование нижней границы...”) подразумевается значение α , соответствующее минимальному значению критерия D (т.е. лучшее соответствие степенному закону) с ближайшим интервалом по $m_{\min}$ к $0.02M_J$, для которого $p_{\text{кр}} < p$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ВЫВОДЫ

Проведены исследования распределений по массе транзитных экзопланет с учетом особенностей зависимостей масса—радиус.

Распределения с использованием вычисленных масс по различным зависимостям масса—радиус в целом соответствует распределениям, полученным в (Иванова и др., 2019; Анапуева и др., 2020; Ананьева и др., 2020), где была применена коррекция наблюдательной селекции без использования зависимостей масса—радиус. Соответствие получено и после учета вероятности транзита.

Также, как и в (Иванова и др., 2019; Анапуева и др., 2020; Ананьева и др., 2020) для экзопланет, обнаруженных преимущественно наземными телескопами, учет вероятности транзита статистически не изменяет распределения в исследуемом интервале масс. Такой же результат получен в настоящей работе и для экзопланет, обнаруженных космическими телескопами Kepler, TESS, что, однако, не совпадает с выводом в (Иванова и др., 2019; Анапуева и др., 2020; Ананьева и др., 2020) для этой группы экзопланет, но может быть объяснено вариативностью и неточностью рассмотренных моделей определения статистической массы экзопланеты по радиусу.

Транзитный фотометрический метод охватывает экзопланеты с большой полуосью до 1 а. е., и по этим данным, согласно полученным результатам, не наблюдается структурирование в планетных системах (зависимости между массой экзопланеты и ее средним расстоянием до родительской звезды). Этот вывод сделан на основании того, что все, кроме одного, распределения исследуемых выборок (полученных с использованием различных зависимостей масса—радиус) статисти-

чески не различимы до учета наблюдательной селекции и после.

Распределение по массам экзопланет, в котором неизвестные массы вычислялись по найденной усредненной зависимости $M(R)$ (*Averaged*) мало отличается от распределений, построенных с использованием более сложных моделей $M(R)$ *Bashi17* (Bashi и др., 2017), *Chen17* (Chen и др., 2017). Зависимость $M(R)$ *Ning18* (Ning и др., 2017), так же, как и распределение, полученное с использованием этой модели, значительно отличается от остальных зависимостей и распределений вследствие отличного поведения $M(R)$ в области, соответствующей планетам-гигантам.

Для выборки *Ning18* и выборки по наблюдаемым данным построены ломанные степенные законы, показатель степени которых различается на трех интервалах. Найденные законы распределения сравнены с аналогичным законом, полученным методом популяционного синтеза (Mordasini 2018). Распределение с добавленными массами *Ning18* наилучшим образом (по сравнению с остальными исследуемыми выборками) соответствует (Mordasini 2018).

Авторы признательны правительству Российской Федерации и Министерству высшего образования и науки РФ за поддержку в рамках гранта № 075-15-2020-780 (N13.1902.21.0039).

В этом исследовании использовался Архив экзопланет NASA, который находится в ведении Калифорнийского технологического института по контракту с NASA в рамках программы исследования экзопланет.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Ананьева В.И., Иванова А.Е., Венкстерн А.А., Тавров А.В., Кораблев О.И., Берто Ж.-Л. Распределение транзитных экзопланет по массам в зависимости от спектрального класса родительских звезд // Астрон. вестн. 2020. Т. 54. № 3. С. 195–207.
- Иванова А.Е., Ананьева В.И., Венкстерн А.А., Шапкова И.А., Юдаев А.В., Тавров А.В., Кораблев О.И., Берто Ж.-Л. Распределение транзитных экзопланет по массам с учетом факторов наблюдательной селекции // Письма в Астрон. журн. 2019. Т. 45. № 10. С. 741–748.

- Лемешко Б.Ю. Непараметрические критерии согласия. Новосибирск: НГУ, 2014. 162 с.
- Ananyeva V.I., Ivanova A.E., Venkstern A.A., Shashkova I.A., Yudaev A.V., Tavrov A.V., Korablev O.I., Bertaux J.-L. Mass distribution of exoplanets considering some observation selection effects in the transit detection technique // *Icarus*. 2020. V. 346. P. 113773.
- Ananyeva V.I., Ivanova A.E., Venkstern A.A., Tavrov A.V., Korablev O.I., Bertaux J.-L. The dependence of the mass distribution of exoplanets on the spectral class of host stars // *Sol. Syst. Res.* 2020. V. 54. № 3. P. 175–186.
- Bashi D., Helled R., Zucker S., Mordasini C. Two empirical regimes of the planetary mass-radius relation // *Astron. and Astrophys.* 2017. V. 604. Article id. A83.
- Butler R.P., Wright J.T., Marcy G.W., Fischer D.A., Vogt S.S., Tinney C.G., Jones H.R.A., Carter B.D., Johnson J.A., McCarthy C. Catalog of nearby exoplanets // *Astrophys. J.* 2006. V. 646. P. 505.
- Chen J., Kipping D. Probabilistic forecasting of the masses and radii of other worlds // *Astrophys. J.* 2017. V. 834. P. 17–30.
- Clauset A., Shalizi C., Newman M. Power-Law Distributions in Empirical Data // *SIAM Review*. 2009. V. 51. № 4. P. 661–703.
- Cumming A., Butler R.P., Marcy G.W., Vogt S.S., Wright J.T., Fischer D.A. The Keck planet search: detectability and the minimum mass and orbital period distribution of extrasolar planets // *Publications of the Astron. Soc. of the Pacific*. 2008. V. 120. P. 531–554.
- Howard A.W., Marcy G.W., Johnson J.A., Fischer D.A., Wright J.T., Isaacson H., Valenti, J.A. Anderson J., Lin D.N., Ida S. The occurrence and mass distribution of close-in super-Earths, Neptunes, and Jupiters // *Science*. 2010. V. 330. P. 653–655.
- Ida S., Lin D.N.C.. Toward a Deterministic Model of Planetary Formation. II. The Formation and Retention of Gas Giant Planets around Stars with a Range of Metallicities // *Astrophys. J.* 2004. V. 616. № 1. P. 567.
- Marcy G., Butler R.P., Fischer D., Vogt S., Wright J.T., Tinney C.G., Jones H.R. Observed properties of exoplanets: masses, orbits, and metallicities // *Progress of Theoretical Physics Suppl.* 2005. V. 158. P. 24–42.
- Mordasini C., Alibert Y., Georgy C., Dittkrist K.-M., Klahr H., Henning T. Characterization of exoplanets from their formation II: The planetary mass-radius relationship // *Astron. and Astrophys.* 2012. V. 547. Article id. A112.
- NASA Exoplanet Archive, 2020. Дата доступа: 2020-25-07. <https://doi.org/10.26133/NEA1>
- Ning B., Wolfgang A., Ghosh S. Predicting Exoplanets Mass and Radius: A Nonparametric Approach // *Astrophys. J.* 2018. V. 869. № 1.
- Otegi J.F. & Bouchy F. & Helled R. Revisited mass-radius relations for exoplanets below 120 Earth masses // *Astron. and Astrophys.* 2019. V. 634. Article id. A43.
- Petigura E.A., Howard A.W., Marcy G.W. Prevalence of Earth-size planets orbiting Sun-like stars // *PNAS*. 2013. V. 110. № 48. P. 19273–19278, 2013. V. 110. 19273–19278.
- Tuomi M., Jones H.R.A., Butler R.P., Arriagada P., Vogt S.S., Burt J., Laughlin G., Holden B., Shectman S.A., Crane J.D., Thompson I., Keiser S., Jenkins J.S., Berdiñas Z., Diaz M., Kiraga M., Barnes J. R. Frequency of planets orbiting M dwarfs in the Solar neighbourhood // *arXiv: Earth and Planetary Astrophysics*, 2019. <https://arxiv.org/abs/1906.04644>.
- Seager S., Mallén-Ornelas G. A Unique Solution of Planet and Star Parameters from an Extrasolar Planet Transit Light Curve // *Astrophys. J.* 2002. V. 585. № 2.
- Weiss L.M., Marcy G.W., Rowe J.F., Howard A.W., Isaacson H., Fortney J.J., Miller N., Demory B.-O., Fischer D.A., Adams E.R. The mass of KOI-94d and a relation for planet radius, mass, and incident flux // *Astrophys. J.* 2013. V. 768. № 14.
- Winn J. Transits and Occultations // *arXiv: Earth and Planetary Astrophysics*, 2014. <https://arxiv.org/abs/1001.2010v5>
- Wolfgang A., Rogers L.A., Ford E.B. Probabilistic mass-radius relationship for sub-Neptune-sized planets // *Astrophys. J.* 2016. V. 825. № 19.
- Zeng Li, Sasselov D.D., Jacobsen S.B. Mass-Radius Relation for Rocky Planets Based on PREM // *Astrophys. J.* 2016. V. 819. № 2.