

УДК 521.3

К ВОПРОСУ ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПРЕДВАРИТЕЛЬНОЙ ОРБИТЫ НЕБЕСНОГО ТЕЛА

© 2019 г. В. Б. Кузнецов*

Институт прикладной астрономии РАН, Санкт-Петербург, Россия

*e-mail: vb.kuznetsov@iaaras.ru

Поступила в редакцию 15.10.2018 г.

После доработки 02.04.2019 г.

Принята к публикации 13.06.2019 г.

Рассматривается классическая задача определения предварительной орбиты небесного тела по угловым наблюдениям. Для ее решения предлагается универсальный метод, основанный на уравнении Гаусса в форме Шефера. Получаемое решение свободно от неопределенностей для радиальных векторов положения наблюдаемого тела и может быть получено для всех типов кеплеровых орбит. Метод демонстрирует точную функциональную зависимость искомых параметров от начальных данных в рамках задачи двух тел, без каких-либо ограничений. Для определения некомпланарных орбит использовалась система из двух трансцендентных уравнений относительно двух неизвестных. Искомые параметры могут быть как размерными (расстояния), так и безразмерными. В последнем случае можно ограничить область поиска решения. Трансцендентная функция Лерха используется для представления движения с любым значением эксцентриситета. Интервалы времени между наблюдениями неограниченны и для эллиптических орбит могут превосходить период обращения. Также рассматривается движение в плоскости эклиптики, где изучаются системы из трех уравнений для непрямолнейных орбит и двух — для прямолинейных. В качестве примера приведены результаты определения орбиты карликовой планеты Церера.

Ключевые слова: задача двух тел, определение орбиты, уравнение Шефера, функция Лерха

DOI: 10.1134/S0320930X19060057

ВВЕДЕНИЕ

Определение предварительной орбиты в рамках кеплеровской задачи двух тел — старая, известная проблема. Она тесно связана с открытием новых объектов и по сей день остается актуальной. Для ее решения обычно используется метод Гаусса (Субботин, 1968) или его многочисленные вариации (Дубошин, 1976; Herget, 1948; Дубяго, 1949; Херрик, 1977). Эти методики были названы (Marsden, 1985) методами Гаусса—Энке—Мертон (ГЭМ). Они базируются на аппроксимациях исходных уравнений, которые применимы в итерационных процессах и имеют верхние границы для интервалов времени между наблюдениями. Исключением является метод Казотто (Casotto, 2014), в котором задача преобразуется из оригинального итерационного процесса в решение системы из шести нелинейных уравнений методом Ньютона—Рафсона. Альтернативой методикам ГЭМ является класс методов Мультона—Вайселя—Каннинггема (МВК) (Marsden, 1985). Их ключевой особенностью является использование коэффициентов Лагранжа. В качестве примера современной модификации МВК-методов можно указать подход Нейча (Neusch, 1981), который

сводит проблему к решению системы девяти линейных уравнений относительно девяти неизвестных. Также имеется обобщение этого метода на случай числа наблюдений больше трех. Дальнейшее развитие идей Нейча, с более точными формулами разложения в ряды, было представлено в работе Karimi, Mortari (2011). Однако этот метод применим только на интервалах времени, малых по отношению к орбитальному периоду. Долгое время активно используется метод двойных r -итераций (Эскобал, 1970). Он основывается на оценках двух крайних радиус-векторов и их дальнейшем итеративном улучшении. Применимость метода ограничена областью сходимости начального приближения.

С другой точки зрения, вопрос заключается в поиске точных уравнений, которые являются функциями начальных данных. То, что задача сводится к решению системы двух нелинейных уравнений, было показано еще самим Гауссом (1861). Перов (1989) предложил универсальный метод определения орбит. Его подход основывался на уравнениях движения, выраженных через функции Штумпфа. Он решил систему из четырех нелинейных уравнений для четырех неизвест-

ных методом Ньютона–Рафсона. Dumolin (1994) улучшил методику Перова путем применения универсальных функций Штумпфа к уравнению Ламберта. Другой метод определения предварительной орбиты из решения системы двух уравнений вида $f_1(x, y) = 0$, $f_2(x, y) = 0$, где x и y – топоцентрические расстояния до наблюдаемого объекта в два момента времени, был предложен Gooding (1993; 1997). В его методе был использован универсальный алгоритм для решения задачи Ламберта (Lancaster, Blanchard, 1969; Gooding, 1988; 1990). Численное решение системы производилось методом Галлея (Ортега, Рейнболдт, 1975). Стоит отметить, что детальное представление уравнений f_1 и f_2 в работах Gooding отсутствует. Несколько лет назад появились новые модификации техники Gooding (Henderson, 2010). Первая заключается в возможности использовать для определения орбиты неограниченное число наблюдений. Вторая – в поиске оптимальной орбиты в окрестности решения Gooding.

Целью настоящей работы является изучение проблемы с точки зрения, отвергнутой Гауссом. Она заключается в рассмотрении системы точных уравнений. Исследование базируется на универсальной формулировке задачи, без каких-либо ограничений на интервалы времени между наблюдениями и эксцентриситет искомой орбиты. Демонстрируется функциональная зависимость искомых параметров от начальных условий. Такой подход делает возможным графическое представление решения. Переход к нормированным безразмерным переменным позволяет ограничить область поиска решения.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ: ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ

Классическая задача определения предварительной орбиты базируется на угловых наблюдениях. В общем случае их минимальное число равно трем (для некомпланарной орбиты) или четырем (для компланарной). Исходя из наблюдений, необходимо поделить топоцентрические расстояния до объекта. Их знание позволит получить орбитальные элементы. Таким образом, следует найти функциональную зависимость между неизвестными расстояниями и известными угловыми величинами, а также интервалами времени между наблюдениями. Фундаментальные геометрические соотношения между наблюдательными данными и расстояниями имеют следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \mathbf{e}_1 \rho_1 - \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{r}_2 &= \mathbf{e}_2 \rho_2 - \mathbf{R}_2 \\ \mathbf{r}_3 &= \mathbf{e}_3 \rho_3 - \mathbf{R}_3 \end{aligned} \right\}, \quad (1)$$

где $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ и $\mathbf{r}_3$ – гелиоцентрические радиус-векторы искомой орбиты, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_3$ – единичные векторы,

компонентами которых являются направляющие косинусы луча зрения на объект, ρ_1 , ρ_2 и ρ_3 – топоцентрические расстояния до наблюдаемого объекта, $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2$ и $\mathbf{R}_3$ – топоцентрические векторы положения Солнца, в моменты времени t_1 , t_2 и t_3 ($t_1 < t_2 < t_3$). Неизвестные скалярные величины ρ_1 , ρ_2 и ρ_3 наиболее предпочтительны в качестве искомых параметров. Как известно, орбита в задаче двух тел – плоская и векторы $\mathbf{r}$ из (1) связаны друг с другом условием компланарности:

$$\mathbf{r}_1 (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3) = 0, \quad (2)$$

где знак “ $\times$ ” – означает векторное произведение. Уравнение (2) не вырождено только в том случае, если орбита тела не совпадает с плоскостью эклиптики. С помощью (2) мы можем выразить одно из топоцентрических расстояний (например, ρ_2) через два других (ρ_1 и ρ_3):

$$\rho_2 = \frac{\sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 a_{ij} \rho_1^i \rho_3^j}{\sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 b_{ij} \rho_1^i \rho_3^j} \geq 0, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} a_{00} &= -\mathbf{R}_1 (\mathbf{R}_2 \times \mathbf{R}_3), & a_{10} &= \mathbf{e}_1 (\mathbf{R}_2 \times \mathbf{R}_3), \\ a_{01} &= -\mathbf{R}_1 (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{R}_2), & a_{11} &= \mathbf{e}_1 (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{R}_2), \\ b_{00} &= -\mathbf{R}_1 (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{R}_3), & b_{10} &= \mathbf{e}_1 (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{R}_3), \\ b_{01} &= \mathbf{R}_1 (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3), & b_{11} &= -\mathbf{e}_1 (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3). \end{aligned}$$

Числитель и знаменатель в (3) представляют собой две гиперболы в координатах $\{\rho_1, \rho_3\}$, которые ограничивают область возможных решений для $\rho_2 \geq 0$. Точки пересечения гипербол являются точками сингулярности, в которых ρ_2 не определено.

Если известны три вектора положения объекта, то тогда мы можем через них выразить p – параметр искомой орбиты и $\mathbf{e}$ – вектор эксцентриситета (Stumpf, 1959)

$$p = \frac{\pm r_1 |\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3| \mp r_2 |\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_3| \pm r_3 |\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2|}{\pm |\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3| \mp |\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_3| \pm |\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2|} \geq 0, \quad (4)$$

$$\mathbf{e} = \frac{(p - r_1) \mathbf{r}_3 - (p - r_3) \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_3|}, \quad (5)$$

где $r_i = |\mathbf{r}_i|$ ($i = 1, 2, 3$), верхние и нижние знаки $\pm$ и $\mp$ в (4) соответствуют положительным и отрицательным знакам синуса угла между векторами в последующем векторном произведении. Для (4), как и для (3), числитель и знаменатель не могут иметь разные знаки.

Обозначим значения истинной аномалии для наших гелиоцентрических векторов положения как θ_1 , θ_2 и θ_3 . Тогда углы между векторами можно выразить как $\Delta\theta_{21} = \theta_2 - \theta_1$, $\Delta\theta_{32} = \theta_3 - \theta_2$ и $\Delta\theta_{31} = \theta_3 - \theta_1$. Как нетрудно заметить, для орби-

тальной дуги с углами $\Delta\theta_{21}$ и $\Delta\theta_{32}$ меньшими 2π существует 8 возможных комбинаций знаков в (4).

1) Короткая дуга с $\Delta\theta_{21} < \pi$, $\Delta\theta_{32} < \pi$ и $\Delta\theta_{31} < \pi$, тогда

$$p = \frac{r_1 |\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3| - r_2 |\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_3| + r_3 |\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2|}{|\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3| - |\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_3| + |\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2|}. \quad (6)$$

Обозначим этот случай как “+ + +” (здесь каждый “+” соответствует положительному значению синуса угла между векторами в порядке нумерации: 21, 32, 31). Этот вариант является основным при определении гелиоцентрических орбит и используется во многих методах.

2) Средняя дуга с $\Delta\theta_{21} < \pi$, $\Delta\theta_{32} < \pi$ и $\pi < \Delta\theta_{31} < 2\pi$, тогда

$$p = \frac{r_1 |\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3| + r_2 |\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_3| + r_3 |\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2|}{|\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3| + |\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_3| + |\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2|}. \quad (7)$$

Обозначим этот случай как “+ + –” (здесь “–” соответствует отрицательному значению синуса угла между соответствующими векторами).

3) Средняя дуга с $\pi < \Delta\theta_{21} < 2\pi$, $\Delta\theta_{32} < \pi$ и $\pi < \Delta\theta_{31} < 2\pi$, тогда

$$p = \frac{r_1 |\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3| + r_2 |\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_3| - r_3 |\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2|}{|\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3| + |\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_3| - |\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2|}. \quad (8)$$

Обозначим этот случай как “– + –”.

4) Средняя дуга с $\Delta\theta_{21} < \pi$, $\pi < \Delta\theta_{32} < 2\pi$ и $\pi < \Delta\theta_{31} < 2\pi$, тогда

$$p = \frac{-r_1 |\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3| + r_2 |\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_3| + r_3 |\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2|}{-|\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3| + |\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_3| + |\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2|}. \quad (9)$$

Обозначим этот случай как “+ – –”.

5) Длинная дуга с $\pi < \Delta\theta_{21} < 2\pi$, $\Delta\theta_{32} < \pi$ и $2\pi < \Delta\theta_{31} < 3\pi$, тогда

$$p = \frac{r_1 |\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3| - r_2 |\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_3| - r_3 |\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2|}{|\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3| - |\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_3| - |\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2|}. \quad (10)$$

Обозначим этот случай как “– + +”.

6) Длинная дуга с $\Delta\theta_{21} < 2\pi$, $\pi < \Delta\theta_{32} < 2\pi$ и $2\pi < \Delta\theta_{31} < 3\pi$, тогда

$$p = \frac{-r_1 |\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3| - r_2 |\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_3| + r_3 |\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2|}{-|\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3| - |\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_3| + |\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2|}. \quad (11)$$

Обозначим этот случай как “– + –”.

7) Длинная дуга с $\pi < \Delta\theta_{21} < 2\pi$, $\pi < \Delta\theta_{32} < 2\pi$ и $2\pi < \Delta\theta_{31} < 3\pi$, тогда

$$p = \frac{-r_1 |\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3| - r_2 |\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_3| - r_3 |\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2|}{-|\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3| - |\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_3| - |\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2|}. \quad (12)$$

Обозначим этот случай как “– – +”.

8) Очень длинная дуга с $\pi < \Delta\theta_{21} < 2\pi$, $\pi < \Delta\theta_{32} < 2\pi$ и $3\pi < \Delta\theta_{31} < 4\pi$, тогда

$$p = \frac{-r_1 |\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3| + r_2 |\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_3| - r_3 |\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2|}{-|\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3| + |\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_3| - |\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2|}. \quad (13)$$

Обозначим этот случай как “– – –”.

При этом различных значений p может быть не более четырех, т.к. $p_{+++} = p_{---}$, $p_{++-} = p_{--+}$, $p_{+-+} = p_{-+-}$ и $p_{+--} = p_{-++}$. Необходимо отметить, что гиперболические орбиты возможны только для первых четырех случаев, а эллиптические для всех.

Кроме вышеуказанных восьми случаев определяемых исключительно неравенствами, возможны еще шесть с граничным значением одного из углов.

1) Короткая дуга с $\Delta\theta_{21} < \pi$, $\Delta\theta_{32} < \pi$ и $\Delta\theta_{31} = \pi$, тогда

$$p = \frac{r_1 |\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3| + r_3 |\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2|}{|\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3| + |\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2|}. \quad (14)$$

Обозначим этот случай как “+ + 0” (здесь и далее “0” соответствует нулевому значению синуса угла между соответствующими векторами).

2) Средняя дуга с $\Delta\theta_{21} = \pi$, $\Delta\theta_{32} < \pi$ и $\pi < \Delta\theta_{31} < 2\pi$, тогда

$$p = \frac{r_1 |\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3| + r_2 |\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_3|}{|\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3| + |\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_3|}. \quad (15)$$

Обозначим этот случай как “0 + –”.

3) Средняя дуга с $\Delta\theta_{21} < \pi$, $\Delta\theta_{32} = \pi$ и $\pi < \Delta\theta_{31} < 2\pi$, тогда

$$p = \frac{r_2 |\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_3| + r_3 |\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2|}{|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_3| + |\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2|}. \quad (16)$$

Обозначим этот случай как “+ 0 –”.

4) Длинная дуга с $\pi < \Delta\theta_{21} < 2\pi$, $\Delta\theta_{32} = \pi$ и $2\pi < \Delta\theta_{31} < 3\pi$, тогда

$$p = \frac{-r_2 |\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_3| - r_3 |\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2|}{-|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_3| - |\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2|}. \quad (17)$$

Обозначим этот случай как “– 0 +”.

5) Длинная дуга с $\Delta\theta_{21} = \pi$, $\pi < \Delta\theta_{32} < 2\pi$ и $2\pi < \Delta\theta_{31} < 3\pi$, тогда

$$p = \frac{-r_1 |\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3| - r_2 |\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_3|}{-|\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3| - |\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_3|}. \quad (18)$$

Обозначим этот случай как “0 – +”.

6) Длинная дуга с $\pi < \Delta\theta_{21} < 2\pi$, $\pi < \Delta\theta_{32} < 2\pi$ и $\Delta\theta_{31} = 3\pi$, тогда

$$p = \frac{-r_1 |\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3| - r_3 |\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2|}{-|\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3| - |\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2|}. \quad (19)$$

Обозначим этот случай как “— 0”.

Здесь различных значений p может быть не более трех, т.к. $p_{++0} = p_{--0}$, $p_{0+-} = p_{0-+}$ и $p_{+0-} = p_{-0+}$. Необходимо отметить, что гиперболические орбиты возможны только для первых трех случаев, а эллиптические для всех.

В тех вариантах, когда угол между векторами равен 2π , определение параметра орбиты из (4) становится невозможным.

В остальных случаях, все три радиус-вектора будут коллинеарными и плоскость орбиты становится неопределенной. Если же все радиус-векторы являются сонаправленными и хотя бы два из них имеют разную длину, то возможно определе-

ние прямолинейной орбиты (см. раздел Эклиптическая (компланарная) прямолинейная орбита).

УРАВНЕНИЯ ШЕФЕРА ДЛЯ НЕПРЯМОЛИНЕЙНОЙ ОРБИТЫ

Обратимся к уравнениям, связывающим изменение положения тела на орбите с интервалом времени, за которое происходят эти изменения. Рассмотрим универсальное уравнение Шефера для определения орбиты (Шефер, 2010). Построим систему уравнений для наблюдений в три момента времени t_1 , t_2 и t_3 ($t_1 < t_2 < t_3$). Одно уравнение зададим на интервале $[t_1, t_2]$, а другое на $[t_2, t_3]$. Для значений углов $\Delta\theta_{21}$ и $\Delta\theta_{32}$ не кратных π (уравнения для p (6)–(14) и (19)) получим:

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= \pm \left[\sqrt{r_1 r_2 + \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2} \pm \frac{1}{\sqrt{8}} X(x_{21}) (r_1 + \sqrt{2(r_1 r_2 + \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2)} (2x_{21} - 1) + r_2) \right] \\ &\quad \sqrt{r_1 + \sqrt{2(r_1 r_2 + \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2)} (2x_{21} - 1) + r_2} - k(t_2 - t_1) - kL(\rho_1 - \rho_2), \\ f_2 &= \pm \left[\sqrt{r_2 r_3 + \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_3} \pm \frac{1}{\sqrt{8}} X(x_{32}) (r_2 + \sqrt{2(r_2 r_3 + \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_3)} (2x_{32} - 1) + r_3) \right] \\ &\quad \sqrt{r_2 + \sqrt{2(r_2 r_3 + \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_3)} (2x_{32} - 1) + r_3} - k(t_3 - t_2) - kL(\rho_2 - \rho_3), \end{aligned} \right\}, \quad (20)$$

где k — постоянная Гаусса или ее аналоги, $L = 0.00576832$ сут/а. е. — постоянная аберрации (или ее аналоги), $X(x_{21})$ и $X(x_{32})$ — гипергеометрическая функция: $X(x) = 4/3 F(1, 3, 5/2; x)$. Переменные x_{21} и x_{32} выражаются через (1) и (4) следующим образом:

$$x_{21} = \frac{1}{2} \pm \frac{r_1 r_2 - \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2 - p(r_1 + r_2)}{2p\sqrt{2(r_1 r_2 + \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2)}}, \quad (21)$$

$$x_{32} = \frac{1}{2} \pm \frac{r_2 r_3 - \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_3 - p(r_2 + r_3)}{2p\sqrt{2(r_2 r_3 + \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_3)}}, \quad (22)$$

где $\pm$, как и в предыдущем разделе, соответствует положительным и отрицательным знакам синуса угла между векторами.

Для $\Delta\theta_{21} = \pi$ (уравнения для p (15) и (18)) мы можем получить из (21) выражение для p :

$$p = \frac{2r_1 r_2}{r_1 + r_2}. \quad (23)$$

Приравнивая его с (15) или (18) мы получим геометрическое выражение, связывающее r_1 и r_2 и позволяющее заменить f_1 :

$$f_1 = r_1 |\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3| - r_2 |\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_3| = 0. \quad (24)$$

Для $\Delta\theta_{32} = \pi$ (уравнения для p (16) и (17)) получим соответственно:

$$p = \frac{2r_2 r_3}{r_2 + r_3}. \quad (25)$$

А выражение f_2 примет вид:

$$f_2 = r_2 |\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_3| - r_3 |\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2| = 0. \quad (26)$$

Как легко видеть, после подстановки (3) в (1) и (1) в (4), (5), (21) и (22), и, наконец, (21) и (22) в (20) мы получим систему из двух трансцендентных уравнений относительно двух неизвестных ρ_1 и ρ_3 . В результате первое и третье наблюдения должны иметь невязки близкие к нулю. Для второго наблюдения возможны любые значения. При выборе наилучшего из возможных решений следует обратить внимание на случаи с минимальными невязками для среднего наблюдения.

Хорошо известно, что гипергеометрические ряды сходятся в области $x \in [-1, 1]$, которая соответствует эллиптическим, параболическим и, частично, гиперболическим орбитам. Для $x < -1$ необходимо использовать подстановку $x/(x-1)$, которая определена в области $x \in (-\infty, -0.5]$ и она может быть использована в (20) в виде следующего выражения:

$$\begin{aligned} X(x) &= \frac{4}{3} F\left(1, 3, \frac{5}{2}; x\right) = \\ &= \frac{4}{3(1-x)^3} F\left(3, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}; \frac{x}{x-1}\right). \end{aligned} \quad (27)$$

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФУНКЦИИ X ЧЕРЕЗ ФУНКЦИЮ ЛЕРХА

Поиск решения в двух системах уравнений (для двух интервалов x) является довольно сложным. Рассмотрим общий случай для интервала $x \in (-\infty, 1]$ (D'Amaro, Synnott, 1969):

$$\begin{aligned} X(x) &= \frac{4}{3} F\left(1, 3, \frac{5}{2}; x\right) = \\ &= \frac{1}{1-x} \left(1 + \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{1-x}(\sqrt{1-x}+1)} \times \right. \\ &\times \left. \left(1 - \frac{1}{5} \frac{\sqrt{1-x}-1}{\sqrt{1-x}+1} F\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{7}{2}; \frac{\sqrt{1-x}-1}{\sqrt{1-x}+1}\right) \right) \right). \end{aligned} \quad (28)$$

Гипергеометрическую функцию справа мы можем преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned} F\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{7}{2}; \frac{\sqrt{1-x}-1}{\sqrt{1-x}+1}\right) &= \frac{5}{4(\sqrt{1-x}+1)} \times \\ &\times \left(1 - x + \sqrt{1-x} + 3\Phi\left(\frac{\sqrt{1-x}-1}{\sqrt{1-x}+1}, 1, \frac{5}{2}\right) \right), \end{aligned} \quad (29)$$

где Φ – трансцендентная функция Лерха (Lerch, 1887). Φ определяется как

$$\Phi(z, s, v) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(v+n)^s}, \quad z \in [-1, 1], \quad (30)$$

и тогда в (31), ее можно определить как

$$\Phi\left(\frac{\sqrt{1-x}-1}{\sqrt{1-x}+1}, 1, \frac{5}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+5} \left(\frac{\sqrt{1-x}-1}{\sqrt{1-x}+1} \right)^n. \quad (31)$$

Наконец, мы можем записать (28) как

$$\begin{aligned} X(x) &= \\ &= \frac{\sqrt{1-x}(6x^2 - 51x + 64) + 4(6x^2 - 21x + 16)}{6(1-x)^{3/2}(\sqrt{1-x}+1)^4} + \\ &+ \frac{3(1-\sqrt{1-x})}{6(1-x)^{3/2}(\sqrt{1-x}+1)^4} \Phi\left(\frac{\sqrt{1-x}-1}{\sqrt{1-x}+1}, 1, \frac{5}{2}\right) \end{aligned} \quad (32)$$

и система (20) будет представлена через функцию Лерха на интервале $(-\infty, 1]$.

ЭКЛИПТИЧЕСКАЯ (КОМПЛАНАРНАЯ) НЕПРЯМОЛИНЕЙНАЯ ОРБИТА

Если искомая орбита находится в плоскости эклиптики, т.е. векторы $\mathbf{e}_i$ и $\mathbf{R}_i$ ($i = 1, 2, 3$) в (1) компланарны, тогда уравнение (3) становится неопределенным и его нельзя использовать в (20). Появляется необходимость в дополнительном (четвертом) наблюдении в момент времени t_4 . Это позволит добавить третье уравнение в систему (20) и тогда она примет следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= \pm \left[\sqrt{r_1 r_2 + \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2} \pm \frac{1}{\sqrt{8}} X(x_{21}) (r_1 + \sqrt{2(r_1 r_2 + \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2)} (2x_{21} - 1) + r_2) \right] \\ &\sqrt{r_1 + \sqrt{2(r_1 r_2 + \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2)} (2x_{21} - 1) + r_2 - k(t_2 - t_1) - kL(\rho_1 - \rho_2)}, \\ f_2 &= \pm \left[\sqrt{r_2 r_3 + \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_3} \pm \frac{1}{\sqrt{8}} X(x_{32}) (r_2 + \sqrt{2(r_2 r_3 + \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_3)} (2x_{32} - 1) + r_3) \right] \\ &\sqrt{r_2 + \sqrt{2(r_2 r_3 + \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_3)} (2x_{32} - 1) + r_3 - k(t_3 - t_2) - kL(\rho_2 - \rho_3)}, \\ f_3 &= \pm \left[\sqrt{r_3 r_4 + \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_4} \pm \frac{1}{\sqrt{8}} X(x_{43}) (r_3 + \sqrt{2(r_3 r_4 + \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_4)} (2x_{43} - 1) + r_4) \right] \\ &\sqrt{r_3 + \sqrt{2(r_3 r_4 + \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_4)} (2x_{43} - 1) + r_4 - k(t_4 - t_3) - kL(\rho_3 - \rho_4)}, \end{aligned} \right\}, \quad (33)$$

где

$$x_{43} = \frac{1}{2} \pm \frac{r_3 r_4 - \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_4 - p(r_3 + r_4)}{2p\sqrt{2(r_3 r_4 + \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_4)}}. \quad (34)$$

Система (33) содержит три уравнения, но число неизвестных равно четырем. Необходимо ввести новое, независимое от (3) условие, связывающее топоцентрические расстояния, которое дополнило бы (33). Рассмотрим уравнение для конического сечения в полярных координатах (r, θ) :

$$r_4 = \frac{p}{1 + e \cos \theta_4}, \quad (35)$$

где θ_4 – значение истинной аномалии для момента времени t_4 , а e – эксцентриситет орбиты (модуль вектора (5)). Если мы запишем $\theta_4 = \theta_3 + \Delta\theta_{43}$, то можем воспользоваться следующими соотношениями:

$$\cos \Delta\theta_{43} = \frac{\mathbf{r}_3 \mathbf{r}_4}{r_3 r_4}, \quad (36)$$

и

$$\cos \theta_3 = \frac{1}{e} \left(\frac{p}{r_3} - 1 \right). \quad (37)$$

После подстановки (36) и (37) в (35), можно получить новое геометрическое соотношение,

связывающее все четыре топоцентрических расстояния (через радиус-векторы (1)):

$$\begin{aligned} & \left[(p - r_4)(\mathbf{r}_3 \mathbf{r}_4) - (p - r_3)r_4^2 \right]^2 - \\ & - \left(r_3^2 r_4^2 - (\mathbf{r}_3 \mathbf{r}_4)^2 \right) \left(e^2 r_4^2 - (p - r_4)^2 \right) = 0. \end{aligned} \quad (38)$$

Другими словами, если нам известны три радиус-вектора орбиты и угловые наблюдения для четвертого положения, то мы можем найти значение четвертого радиус-вектора только из геометрических построений. Однако нелинейность уравнения (33) не гарантирует единственность решения. Если мы решим (33) совместно с (38), то получим желаемое решение для четырех топоцентрических расстояний. Эта система из четырех уравнений сложнее (20) и, как легко предположить, может иметь больше решений, чем последняя.

Использование четвертого наблюдения вносит неоднозначность в построение системы уравнений. Это может нам помочь при поиске настоящего решения среди многих вариантов, т.к. оно должно содержаться в решении любой из возможных систем. Например, выразив параметр орбиты p (4) через четыре набора радиус-векторов: $\{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3\}$, $\{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_4\}$, $\{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4\}$ и $\{\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4\}$ и, рассмотрев два множества решений, полученных для p из $\{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3\}$ и $\{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_4\}$ (обозначим их далее как I и II), находим решение в пересечении этих множеств. На практике это означает, что расстояние между такими решениями должно быть минимальным в обоих множествах. Обозначим расстояние для множеств I и II как $\Delta p^{I,II}$ и вычислим его по следующей формуле (верхний значок соответствует выбранному множеству):

$$\Delta p^{I,II} = \sqrt{\sum_{i=1}^4 (p_i^I - p_i^{II})^2}. \quad (39)$$

Отсюда мы сможем определить искомое решение как минимум расстояния между всеми парами в двух множествах.

ЭКЛИПТИЧЕСКАЯ (КОМПЛАНАРНАЯ) ПРЯМОЛИНЕЙНАЯ ОРБИТА

В предыдущем разделе не рассматривались прямолинейные орбиты в компланарном случае. Как уже было показано (Кузнецов, 2014), необходимо по крайней мере три полных наблюдения, чтобы определить такую орбиту в общем виде. С точки зрения задачи определения предварительной орбиты, главной особенностью прямолинейного движения является дробно-линейная зависимость между топоцентрическими расстояниями, которую легко получить из условия коллинеарности векторов положения:

$$\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 = 0, \quad (40)$$

$$\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3 = 0, \quad (41)$$

$$\rho_1 = -\frac{|\mathbf{e}_2 \times \mathbf{R}_1| \rho_2 + |\mathbf{R}_1 \times \mathbf{R}_2|}{|\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2| \rho_2 - |\mathbf{e}_1 \times \mathbf{R}_2|}, \quad (42)$$

$$\rho_3 = \frac{|\mathbf{e}_2 \times \mathbf{R}_3| \rho_2 - |\mathbf{R}_2 \times \mathbf{R}_3|}{|\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3| \rho_2 + |\mathbf{e}_3 \times \mathbf{R}_2|}. \quad (43)$$

В этом случае мы имеем только одно независимое топоцентрическое расстояние (например, ρ_2). Другая независимая переменная должна быть связана с энергией орбиты. Одним из возможных вариантов является большая полуось орбиты a .

Для прямолинейных орбит мы имеем три варианта возможных траекторий.

1) Траектория целиком располагается между перигентром и апоцентром. Система (20) после подстановки $\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2 = r_1 r_2$ и $\mathbf{r}_2 \mathbf{r}_3 = r_2 r_3$ примет следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= \left[\sqrt{2r_1 r_2} + \frac{1}{\sqrt{8}} X(x_{21}) (r_1 + 2\sqrt{r_1 r_2} (2x_{21} - 1) + r_2) \right] \\ & \sqrt{r_1 + 2\sqrt{r_1 r_2} (2x_{21} - 1) + r_2} - k(t_2 - t_1) - kL(\rho_1 - \rho_2), \\ f_2 &= \left[\sqrt{2r_2 r_3} + \frac{1}{\sqrt{8}} X(x_{32}) (r_2 + 2\sqrt{r_2 r_3} (2x_{32} - 1) + r_3) \right] \\ & \sqrt{r_2 + 2\sqrt{r_2 r_3} (2x_{32} - 1) + r_3} - k(t_3 - t_2) - kL(\rho_2 - \rho_3). \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

При прямолинейном движении параметр орбиты $p = 0$ и формулы (21) и (22) не могут быть использованы. Переменные x_{21} и x_{32} выражаются через значения радиус-векторов и большую полуось a следующим образом:

$$x_{21} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{r_1 r_2}}{4a} - \frac{\sqrt{4a^2 - 2a(r_1 + r_2) + r_1 r_2}}{4a}, \quad (45)$$

$$x_{32} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{r_2 r_3}}{4a} - \frac{\sqrt{4a^2 - 2a(r_2 + r_3) + r_2 r_3}}{4a}. \quad (46)$$

Как легко видеть, после подстановки (42) и (43) в (1) и (1) в (45) и (46), и, наконец, (45) и (46) в (44) мы получим систему из двух трансцендентных уравнений относительно двух неизвестных ρ_2 и a .

2) Траектория проходит через апоцентр между первым и вторым наблюдениями. Тогда второе уравнение в (44) остается без изменения, а первое принимает вид:

$$f_1 = 2\sqrt{a}[\sqrt{2a-r_1}\sqrt{r_1} + \sqrt{2a-r_2}\sqrt{r_2}] + \frac{1}{\sqrt{8}}[X(x_1)(2a-r_1)^{3/2} + X(x_2)(2a-r_2)^{3/2}] - k(t_2-t_1) - kL(\rho_1-\rho_2), \quad (47)$$

где x_1 и x_2 выражаются как

$$x_1 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{r_1}{2a}}, \quad (48)$$

$$x_2 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{r_2}{2a}}. \quad (49)$$

3) Траектория проходит через апоцентр между вторым и третьим наблюдениями. Теперь первое наблюдение в (44) остается без изменения, а второе принимает вид:

$$f_2 = 2\sqrt{a}[\sqrt{2a-r_2}\sqrt{r_2} + \sqrt{2a-r_3}\sqrt{r_3}] + \frac{1}{\sqrt{8}}[X(x_2)(2a-r_2)^{3/2} + X(x_3)(2a-r_3)^{3/2}] - k(t_3-t_2) - kL(\rho_2-\rho_3), \quad (50)$$

где x_3 выражаются как

$$x_3 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{r_3}{2a}}. \quad (51)$$

СЛУЧАЙ НЕСКОЛЬКИХ ОБОРОТОВ

Все вышеприведенные рассуждения делались в предположении, что между двумя ближайшими наблюдениями объект может совершить менее одного оборота. В случае эллиптического движения на большом интервале времени это может быть неверно. Для преодоления данного ограничения можно воспользоваться предложением Gooding (1993; 1997) и Шефера (2010) и ввести новые параметры λ_{21} и λ_{32} — число полных оборотов, совершенных наблюдаемым телом на интервалах времени $[t_1, t_2]$ и $[t_2, t_3]$ соответственно. Тогда система (20) примет вид:

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= \pm \left[\sqrt{r_1 r_2 + \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2} \pm \frac{1}{\sqrt{8}} X(x_{21}) (r_1 + \sqrt{2(r_1 r_2 + \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2)} (2x_{21} - 1) + r_2) \right] \\ &\quad + \frac{\pi \lambda_{21}}{8\sqrt{2}} \frac{(r_1 + \sqrt{2(r_1 r_2 + \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2)} (2x_{21} - 1) + r_2)^{3/2}}{(x_{21}(1-x_{21}))^{3/2}} - \\ &\quad - k(t_2 - t_1) - kL(\rho_1 - \rho_2), \\ f_2 &= \pm \left[\sqrt{r_2 r_3 + \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_3} \pm \frac{1}{\sqrt{8}} X(x_{32}) (r_2 + \sqrt{2(r_2 r_3 + \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_3)} (2x_{32} - 1) + r_3) \right] \\ &\quad + \frac{\pi \lambda_{32}}{8\sqrt{2}} \frac{(r_2 + \sqrt{2(r_2 r_3 + \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_3)} (2x_{32} - 1) + r_3)^{3/2}}{(x_{32}(1-x_{32}))^{3/2}} - \\ &\quad - k(t_3 - t_2) - kL(\rho_2 - \rho_3). \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

Задавая различные пары значений $\{\lambda_{21}, \lambda_{32}\}$, получаем дополнительные системы уравнений, которые могут нам дать дополнительные решения. Если принять во внимание восемь возможных значений параметра орбиты p , то мы придем к необходимости изучения трехмерного множества $\{p, \lambda_{21}, \lambda_{32}\}$. Все вышесказанное может быть применено к компланарному случаю после увеличения числа уравнений и добавления λ_{43} . Особый интерес представляет оценка максимально возможного значения λ для каждого интервала.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ НАБЛЮДЕНИЙ

Как отмечалось в предыдущих разделах, требуется как минимум три/четыре наблюдения для определения некомпланарной/компланарной орбиты. Возможно ли использовать большее число наблюдений? Что делать при числе уравнений, большем, чем число неизвестных? В этом случае мы получим переопределенную систему уравнений, которая может не иметь решения. Здесь необходимо перейти от поиска точного решения к поиску минимума целевой функции построенной на

базе наших уравнений. Преимуществом такого подхода является уменьшение влияния на решение случайных ошибок наблюдения и его уникальность.

Для некомпланарных орбит каждое дополнительное наблюдение в момент t_i ($i > 3$) позволяет дополнить систему (20) одним уравнением ($j > 2$):

$$f_{add} = \pm \left[\sqrt{r_j r_i + \mathbf{r}_j \mathbf{r}_i} \pm \frac{1}{\sqrt{8}} X(x_{ij}) \times \right. \\ \left. \times (r_j + \sqrt{2(r_j r_i + \mathbf{r}_j \mathbf{r}_i)}(2x_{ij} - 1) + r_i) \right] \\ \sqrt{r_j + \sqrt{2(r_j r_i + \mathbf{r}_j \mathbf{r}_i)}(2x_{ij} - 1) + r_i} - \\ - k(t_i - t_j) - kL(\rho_j - \rho_i), \quad (53)$$

где

$$x_{ij} = \frac{1}{2} \pm \frac{r_j r_i - \mathbf{r}_j \mathbf{r}_i - p(r_j + r_i)}{2p\sqrt{2(r_j r_i + \mathbf{r}_j \mathbf{r}_i)}}. \quad (54)$$

Также необходимо использовать дополнительное условие аналогичное (3):

$$\rho_i = \frac{\sum_{k=0}^1 \sum_{l=0}^1 a_{kl} \rho_1^k \rho_3^l}{\sum_{k=0}^1 \sum_{l=0}^1 b_{kl} \rho_1^k \rho_3^l} \geq 0, \\ a_{00} = -\mathbf{R}_1(\mathbf{R}_i \times \mathbf{R}_3), \quad a_{10} = \mathbf{e}_1(\mathbf{R}_i \times \mathbf{R}_3), \\ a_{01} = -\mathbf{R}_1(\mathbf{e}_3 \times \mathbf{R}_i), \quad a_{11} = \mathbf{e}_1(\mathbf{e}_3 \times \mathbf{R}_i), \\ b_{00} = -\mathbf{R}_1(\mathbf{e}_i \times \mathbf{R}_3), \quad b_{10} = \mathbf{e}_1(\mathbf{e}_i \times \mathbf{R}_3), \\ b_{01} = \mathbf{R}_1(\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_3), \quad b_{11} = -\mathbf{e}_1(\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_3). \quad (55)$$

Для компланарной орбиты достаточно рассмотреть (53) (где индекс $j > 2$ следует заменить на $j > 3$, а $i > 3$ на $i > 4$) или вместо него взять следующее уравнение:

$$\left[(p - r_j)(\mathbf{r}_i \mathbf{r}_j) - (p - r_i)r_j^2 \right]^2 - \\ - (r_i^2 r_j^2 - (\mathbf{r}_i \mathbf{r}_j)^2)(e^2 r_j^2 - (p - r_j)^2) = 0. \quad (56)$$

Уравнения (53) и (56) могут быть добавлены и попарно. Таким образом, в некомпланарном случае мы получим избыточную систему относительно двух неизвестных, а в компланарном — систему с числом уравнений большим или равным числу неизвестных.

Пусть m число уравнений f_i ($i = 1 \dots m$), тогда целевая функция может быть записана как сумма квадратов f_i . Решение нашей задачи сводится к поиску глобального минимума в заданной области:

$$\min \sum_{i=1}^m f_i^2. \quad (57)$$

Топоцентрические расстояния, которые удовлетворяют (59), составят искомое решение.

ДРУГОЙ НАБОР ПЕРЕМЕННЫХ ДЛЯ НЕКОМПЛАНАРНЫХ ОРБИТ

Использование топоцентрических расстояний в качестве неизвестных имеет серьезный недостаток. Область поиска решений в некомпланарном случае представляет собой открытый квадрант. Для того, чтобы эту область ограничить, следует перейти к нормированным безразмерным переменным. В этом качестве для некомпланарных орбит стоит рассмотреть единичный вектор $\mathbf{N} = (N_x, N_y, N_z)$, представляющий собой вектор нормали к плоскости искомой орбиты. Для удобства связи $\mathbf{N}$ с элементами орбиты выберем эклиптическую систему координат. Выразим ρ_i ($i = 1, 2, 3$) через $\mathbf{N}$. Если уравнения (1) скалярно умножить на $\mathbf{N}$, то получим выражения для ρ_i (Sarnecki, 1997):

$$\rho_i = \frac{\mathbf{N} \mathbf{R}_i}{\mathbf{N} \mathbf{e}_i}. \quad (58)$$

Условие единичности $\mathbf{N}$ можно определить так:

$$N_x^2 + N_y^2 + N_z^2 = 1. \quad (59)$$

Теперь мы можем подставить (58) во все уравнения для некомпланарных орбит. Получаем аналог (20) с ограничением (59) и безразмерными неизвестными $\{N_x, N_y, N_z\}$:

$$\left. \begin{aligned} f_1(\mathbf{N}) &= 0, \\ f_2(\mathbf{N}) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

Мы ограничили область решения поверхностью единичной сферы. Точки пересечения f_1 и f_2 являются возможными направлениями $\mathbf{N}$. Так как кривые (60) симметричны относительно плоскости эклиптики, то можно выбрать одну из полушфер с прямым или обратным орбитальным движением. Тогда условие (59) можно записать как

$$N_z = \sqrt{1 - N_x^2 - N_y^2} \quad (61)$$

и отобразить область решения единичной сферы на единичную область круга эклиптики. Таким образом, мы вернулись к двумерному случаю с неизвестными N_x и N_y . Дополнительным достоинством новых переменных является то, что они напрямую не связаны с конкретными наблюдениями и их числом, а это упрощает работу по созданию целевой функции. Также, в системе координат $\{N_x, N_y\}$ отсутствуют точки сингулярности, порождаемые уравнением (3). Единственной особенностью является центр круга: $N_x = N_y = 0$, она соответствует компланарной орбите. Из единичного круга следует исключить области с отрицательными топоцентрическими расстояниями и параметром орбиты p . Введение таких ограничений позволяет сузить поиск решения со всего единичного круга до его отдельных областей. В работе Бондаренко и др. (2014) поиск орбиты

осуществляется путем перебора всевозможных значений углов наклона i и долготы восходящего узла Ω . Если воспользоваться проверкой выше-приведенных условий, то объем необходимых вычислений можно было бы заметно сократить.

Пересечение кривых f_1 и f_2 в приемлемых областях (на рисунках закрашены белым) дают нам возможные решения.

ПРИМЕР: ЦЕРЕРА НА МАЛОЙ ДУГЕ

В качестве численного примера (короткая дуга: $p = p_{+++}$) рассмотрим определение некомпланарной орбиты по наблюдениям карликовой планеты Цереры “1”, полученным в 1802 г. (М.Р.С., 2015). Особенностью этих наблюдений является то, что они приведены к геоцентру (табл. 1).

Построим графики f_1 и f_2 в координатах ρ_1 и ρ_3 (в а. е.) и на них серым цветом закрасим области с $\rho_2 < 0$ и $p < 0$ (рис. 1 и рис. 2).

На рис. 2 можно видеть две сингулярные точки, которые соответствуют одновременному равенству нулю числителя и знаменателя (3). Уравнение (3) и как следствие система (6) в этих точках получают неопределенными. В малых окрестностях сингулярных точек, функции f_1 и f_2 близки друг к другу, но не пересекаются. При поиске решения эти окрестности нужно исключать из рассмотрения. Как можно видеть на рис. 1 и 2, имеются три решения, которые представлены в табл. 2.

Таблица 1. Наблюдения Цереры на короткой дуге

№	t (UT) (год, месяц, день)	α (2000) (ч, мин, с)	δ (2000) (угл. град, угл. мин, угл. с)
1	1802 01 26.17022	12 43 22.43	+10 51 17.1
2	1802 02 11.12723	12 44 21.07	+12 15 23.6
3	1802 02 28.07632	12 37 51.71	+14 10 36.2

Здесь: t — всемирное время (год, месяц, день); α — прямое восхождение (часы, минуты, секунды) и δ — склонение планеты (угл. градусы, угл. минуты, угл. секунды), представленные в экваториальной системе координат, отнесенные к экватору на эпоху J2000.0.

Таблица 2. Значения ρ_1 и ρ_3 полученные из (20), а также ρ_2 полученное из (3) для орбиты Цереры

Орбита	ρ_1 (а. е.)	ρ_2 (а. е.)	ρ_3 (а. е.)
“1”	5.07029	3.03579	3.18113
“2”	5.62010	4.89862	2.70159
“3”	1.89132	1.74388	1.63888

Полученные решения соответствуют представленным в табл. 3 орбитальным элементам на эпоху второго наблюдения. В качестве контроля на ту же эпоху приводятся элементы орбиты Цереры, полученные в результате улучшения по всем наблюдениям до 2014 г. и с учетом возмущений от всех больших планет по DE405 (Standish, 1998) (в табл. 3 обозначены как “ИПА”).

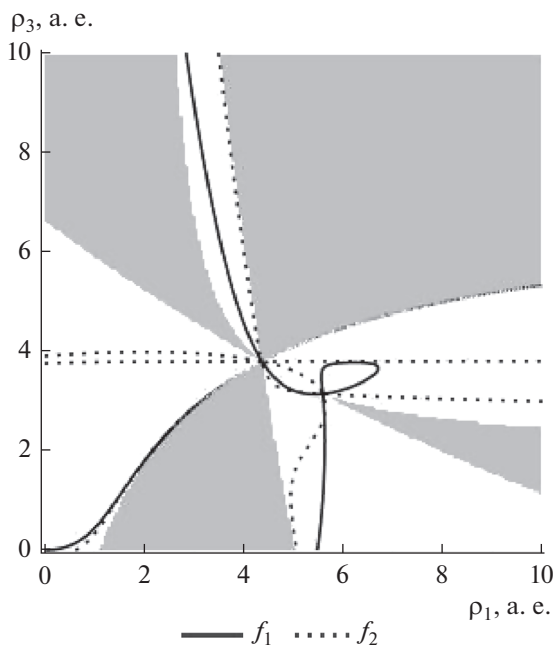


Рис. 1. Графики (20) для Цереры.

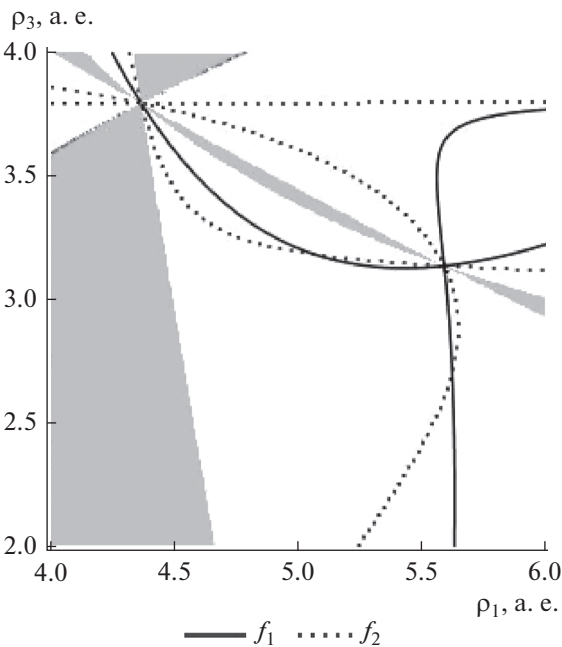


Рис. 2. Окрестности точек сингулярности (3) для Цереры.

Таблица 3. Элементы решений орбиты Цереры для короткой дуги

Орбита	T_0/M_0 (град)	a (а. е.)	e	i (угл. град)	ω (угл. град)	Ω (угл. град)
“1”	1802 05 24.91	−0.008	26.009	18.387	134.661	133.952
“2”	1802 04 15.04	−0.003	38.834	141.656	249.237	19.140
“3”	21.760	2.777	0.087	10.623	60.780	83.776
“ИПА”	18.551	2.776	0.081	10.625	65.055	83.588

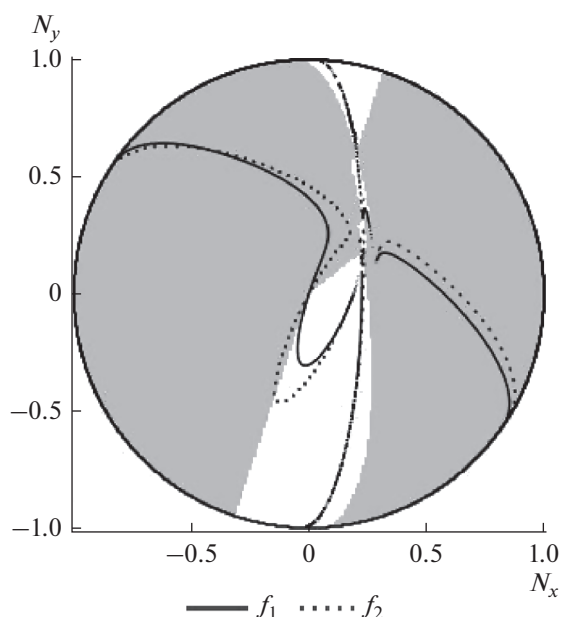
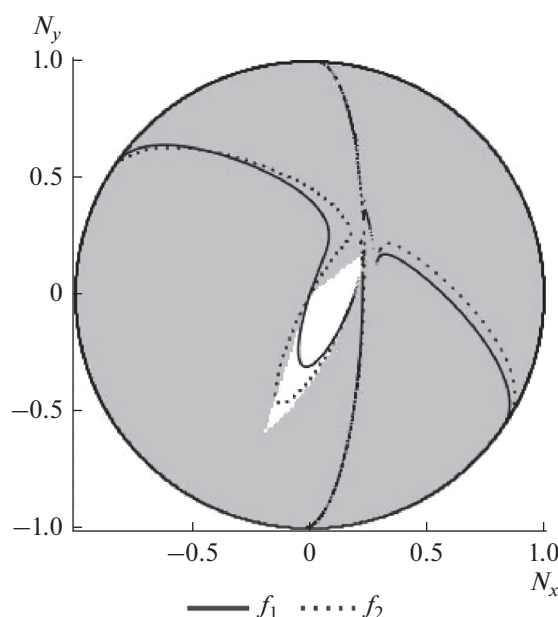
Таблица 4. Представление наблюдений Цереры полученными орбитами

Орбита	t_1		t_2		t_3	
	$\Delta\alpha$ (угл. с)	$\Delta\delta$ (угл. с)	$\Delta\alpha$ (угл. с)	$\Delta\delta$ (угл. с)	$\Delta\alpha$ (угл. с)	$\Delta\delta$ (угл. с)
“1”	-4.2×10^{-8}	7.7×10^{-9}	-1.4×10^4	-1.6×10^4	-4.9×10^{-8}	9.1×10^{-9}
“2”	1.7×10^{-8}	3.4×10^{-9}	7.1×10^3	7.9×10^3	2.0×10^{-8}	4.3×10^{-9}
“3”	2.1×10^{-10}	0.0	4.1×10^{-10}	-1.7×10^{-10}	6.2×10^{-10}	-1.9×10^{-10}

Первые две орбиты, показанные в табл. 3, являются гиперболическими, и только третья — эллиптическая, которая соответствует орбите Цереры. Сравнение орбит “3” и “ИПА” показывает, что точнее всех определяются элементы, определяющие орбитальную плоскость: наклон орбиты i и долгота восходящего узла Ω . Остальные элементы определяются гораздо хуже. Представление наблюдений орбитами показано в табл. 4, где представление второго наблюдения хорошо характеризует точность полученной орбиты.

Теперь рассмотрим решение системы (60) в безразмерных переменных N_x и N_y . На рис. 3

представлены графики уравнений (60). Белым цветом, в единичном круге, окрашены три области допустимых коник ($\rho_i > 0$ ($i = 1, 2, 3$) и $p > 0$). В этом случае получаем решения, идентичные тем, что представлены в табл. 3. Если мы хотим рассмотреть только эллиптические орбиты, то необходимо наложить дополнительное ограничение. На рис. 4 показаны те же графики (60), но здесь белым цветом окрашена единственная область, соответствующая только эллиптическим траекториям. Как можно заметить, в этой области есть только одно решение ($N_x = 0.18$, $N_y = -0.02$).

**Рис. 3.** Графики (60), для Цереры в областях всех типов орбит.**Рис. 4.** Графики (60), для Цереры в области эллиптических орбит.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Новый подход позволяет в полной мере рассмотреть задачу определения предварительной орбиты. Полученные системы уравнений дают точное описание проблемы без каких-либо ограничений на величину эксцентриситета, орбитального наклона и числа оборотов между соседними наблюдениями. Существующая неявная зависимость между данными наблюдений и искомыми параметрами позволяет представить графическое решение задачи. Трансцендентность полученных уравнений приводит к множественности возможных решений. Выбор решения основывается на представлении имеющихся наблюдений полученными орбитами. Следующим этапом развития представленной методики должна стать разработка эффективного алгоритма для локализации всех возможных корней полученных систем уравнений.

Автор хотел бы выразить свою благодарность д. ф.-м. н. Ю.А. Чернетенко и д. ф.-м. н. В.А. Шору за их помощь и ценные замечания при подготовке данной работы, поблагодарить Д. Рыжкову за помощь при подготовке статьи к печати.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Бондаренко Ю.С., Вавилов Д.Е., Медведев Ю.Д. Метод определения орбит малых тел солнечной системы, основанный на переборе орбитальных плоскостей // Астрон. вестн. 2014. Т. 48. № 3. С. 229–233 (Bondarenko Yu.S., Vavilov D.E., Medvedev Yu.D. Method of determining the orbits of the small bodies in the solar system based on an exhaustive search of orbital planes // Sol. Syst. Res. 2014. V. 48. № 3. P. 229–233).
- Гаусс К.Ф. Теория движения небесных тел, обращающихся вокруг Солнца по коническим сечениям. М.: Типография Бахметева, 1861. 316 с.
- Дубошин Г.Н. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. Изд. 2-е. М.: Наука, 1976. 864 с.
- Дубяго А.Д. Определение орбит. М.: Наука, 1949. 444 с.
- Кузнецов В.Б. Определение прямолинейной орбиты для тела, движущегося в плоскости эклиптики // Тр. ИПА РАН. 2014. Вып. 30. С. 49–56.
- Ортега Дж., Рейнбольдт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. М.: Мир, 1975. 560 с.
- Перов Н.И. Унифицированный метод определения предварительных орбит небесных тел по малому числу оптических наблюдений // Астрон. журн. 1989. Т. 66. № 5. С. 1093.
- Субботин М.Ф. Введение в теоретическую астрономию. М.: Наука, 1968. 800 с.
- Шефер В.А. Новый метод определения орбиты по двум векторам положения, основанный на решении уравнений Гаусса // Астрон. вестн. 2010. Т. 44. № 3. С. 273–288 (Shefer V.A. New method of orbit determination from two position vectors based on solving Gauss's equations // Sol. Syst. Res. 2010. V. 44. № 3. P. 273–288).
- Херрик С. Астродинамика. Т. 2. М.: Мир, 1977. 264 с.
- Эскобал П. Методы определения орбит. М.: Мир, 1970. 472 с.
- D'Amaro L.A., Synnott S.P. A comparison of solutions of Kepler's and Lambert's problems. Report of Massachusetts institute of technology. 1969. 289 p.
- Casotto S. A New Approach to Gaussian Initial Orbit Determination // Advances in the Astronomical Sciences. 2014. V. 152. P. 1313–1336.
- Dumolin C. Unified methods in orbit determination // Celest. Mech. and Dyn. Astron. 1994. V. 59. P. 73–89.
- Gooding R.H. On the solution of Lambert's orbital boundary-value problem. RAE Technical Report 88027. 1988. 57 p.
- Gooding R.H. A procedure for the solution of Lambert's orbital boundary-value problem // Celest. Mech. and Dyn. Astron. 1990. V. 48. P. 145–165.
- Gooding R.H. A new procedure for orbit determination based on three lines of sight (Angles Only). DRA/RAE Technical Report 93004. 1993. 67 p.
- Gooding R.H. A new procedure for the solution of the classical problem of minimal orbit determination from three lines of sight // Celest. Mech. and Dyn. Astron. 1997. V. 66. P. 387–423.
- Henderson T.A., Mortari D., Davis J. Modifications to the Gooding algorithm for angles-only initial orbit determination // Paper AAS 10-238 of the 20th AAS/AIAA Space Flight Mechanics Meeting Conference, San Diego, CA, February 14–18, 2010. 10 p.
- Herget P. The computation of the orbits. Published privately by the author, 1948. 176 p.
- Karimi R.R., Mortari D. Initial orbit determination using multiple observations // Celest. Mech. and Dyn. Astron. 2011. V. 109. P. 167–180.
- Lancaster E.R., Blanchard R.C. A unified method of Lambert's theorem. NASA Technical Note D-5368. 1969. 14 p.
- Lerch M. Note sur la fonction $\sum_{k=0}^{\infty} e^{2\pi kx} (w+x)^{-s}$ // Acta Math. 1887. V. 11. P. 11–24.
- Minor Planet Circular. Annales de l'Observatoire de Paris: Observations. 1858. V. 1.
- Marsden B.G. Initial orbit determination: The pragmatist's point of view // Astron. J. 1985. V. 90. P. 1541–1547.
- Neusch W. A simple method of orbit determination // Astron. and Astrophys. 1981. V. 102. P. 59–64.
- Sarnecki A.J. A projective approach to orbit determination from three sight-lines // Celest. Mech. and Dyn. Astron. 1997. V. 66. P. 425–451.
- Standish E.M. JPL Planetary and Lunar Ephemerides, DE405/LE405. JPL Interoffice Memorandum 312.F-98-048. 1998. 18 p.
- Stumpff K. Himmelsmechanik. Berlin. 1959. Bd. 1. 682 p.