

УДК 550.383

КАСКАДНЫЕ ПРОЦЕССЫ ПРИ БЫСТРОМ ВРАЩЕНИИ

© 2019 г. М. Ю. Решетняк^{a, b, *}, О. А. Похотелов^a

^aИнститут физики Земли РАН, Москва, Россия

^bИнститут земного магнетизма и распространения радиоволн РАН, Москва, Россия

*e-mail: m.reshetnyak@gmail.com

Поступила в редакцию 06.11.2018 г.

После доработки 22.02.2019 г.

Принята к публикации 11.03.2019 г.

Рассмотрен процесс переноса по спектру кинетической энергии и гидродинамической спиральности в несжимаемой, быстровращающейся турбулентной среде. Приведен аналог теоремы Фьортофта для трехмерной турбулентности. Показано, что по аналогии с двумерной турбулентностью, одно временно существует два каскада: обратный каскад кинетической энергии и прямой каскад спиральности, который в случае двумерной турбулентности соответствует каскаду энстрофии. Результат находится в согласии с проведенными ранее численными расчетами и физическими экспериментами для геострофической турбулентности, и применим для объяснения процессов в жидких ядрах планет и быстровращающихся звездах.

Ключевые слова: гидродинамическая спиральность, обратный каскад, быстрое вращение

DOI: 10.1134/S0320930X19040091

ВВЕДЕНИЕ

Изучение спектральных свойств гидродинамической турбулентности включает в себя как анализ самих спектров кинетической энергии и порождающих движения жидкости физических полей, так и каскадных процессов, т.е. процессов переноса тех или иных величин в волновом пространстве. Последнее, как правило, сводится к изучению триадных механизмов (Frisch, 1995; Verma, 2004), возникающих за счет взаимодействия Фурье-гармоник в членах, содержащих произведение физических полей. В частности, для уравнения Навье–Стокса — это нелинейный член, обеспечивающий перенос по спектру величин, зависящих от поля скорости. Обычно, интерес представляют не произвольные величины, а вполне определенные, имеющие физический смысл. К таковым относятся интегралы движения, набор которых зависит от размерности физического пространства (см. подробнее в (Lesieur, 2008)). Для двумерия — это кинетическая энергия и энстрофия, а для трехмерия — кинетическая энергия и гидродинамическая спиральность.

Наличие различных интегралов движения оказывает принципиальное влияние на поведение системы и, в частности, на каскадные явления. Для двумерного случая кинетическая энергия передается по спектру от масштаба внешней силы к большим масштабам (обратный каскад энергии). Одновременно существует прямой каскад эн-

строфии от больших масштабов к малым. Существование двух каскадов является следствием теоремы Фьортофта (Fjortoft, 1953), имеющей наглядное обоснование (Lesieur, 2008; Ditlevsen, 2010). Более подробно со свойствами 2D-турбулентности можно познакомиться в работах (Rose, Sulem, 1978; Kraichnan, Montgomery, 1980; Tabeling, 2002). Обратим внимание, что наличие обратного каскада энергии хорошо известно в физике атмосферы, где двумерное приближение в силу тонкости атмосферы по вертикали активно используется (Курганский, 1993). Следует отдельно заметить, что существование обратного каскада в 2D-турбулентности будет только в том случае, если турбулентные вихри обладают ненулевой энстрофией. Мы далее считаем, что это условие выполнено всегда, поскольку в противном случае нелинейный член в уравнении Навье–Стокса для двумерного случая равен нулю (см., например, Фрик, 2010), и каскада нет. Равенство нулю энстрофии соответствует потенциальному течению, которое мы далее не рассматриваем.

Для трехмерной, колмогоровской турбулентности (Колмогоров, 1941) ситуация более сложная. Это связано с тем, что вместо энстрофии сохраняется гидродинамическая спиральность, наличие которой связано с симметрией и топологическими свойствами рассматриваемой турбулентности (Moffatt, 1978). Если турбулентность зеркально симметрична, тоспиральность равна нулю. В этом случае закон сохранения спиральности при три-

адном взаимодействии выполняется тривиальным образом, и единственным налагаемым условием на взаимодействие вихрей является закон сохранения кинетической энергии. Согласно эксперименту в таком случае возникает прямой каскад кинетической энергии.

В случае нарушения зеркальной симметрии появляется ненулевая гидродинамическая спиральность. Механизм ее образования может быть разным, но как правило, одним из необходимых условий является наличие вращения рассматриваемого объекта. В зависимости от задачи, дополнительно требуется наличие градиента плотности или твердых границ. При появлении спиральности в силу двух законов сохранения возможно появление обратного каскада кинетической энергии и прямого каскада спиральности. Впервые такая возможность была предсказана в (Brissaud и др., 1973) (см. подробнее в (Колесниченко, Маров, 2009)). Принципиальное отличие трехмерной турбулентности от двумерной состоит в том, что поскольку спиральность существует в турбулентной среде не всегда, то и обратный каскад энергии не всегда проявляется. Поскольку исторически сложилось, что сначала изучали свойства турбулентности без нарушения зеркальной симметрии, то трехмерная турбулентность первоначально ассоциировалась с прямым каскадом энергии (Frisch, 1995).

Ситуация изменилась при изучении так называемой геофизической турбулентности (Pedlosky, 2013), в которой роль вращения велика, и средняя гидродинамическая спиральность отлична от нуля. В такой турбулентности действительно наблюдается обратный каскад кинетической энергии (см. подробный обзор известных результатов в (Колесниченко, Маров, 2009)). Эти результаты подтверждаются непосредственными измерениями потоков энергии в волновом пространстве для быстровращающихся объектов, в частности, для самосогласованных задач тепловой конвекции при быстром вращении (Reshetnyak, Hejda, 2008; Hejda, Reshetnyak, 2009). Ниже рассмотрено как в приближении быстрого вращения, когда поле скорости и ее ротор скоррелированы, удастся получить обратный каскад для кинетической энергии, и прямой — для спиральности. Подход позволяет объяснить полученные ранее результаты численного моделирования, и может быть использован в дальнейшем для анализа строения триад в волновом пространстве.

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ И КАСКАДЫ

Напомним, как предсказывается направление каскадов энергии и энтропии в 2D-турбулентности (см. подробнее (Lesieur, 2008; Ditlevsen, 2010)). Предполагается, что турбулентность однородная и изотропная, а рассматриваемые функ-

ции поля скорости $\mathbf{V}$ зависят от одного скалярного волнового числа k . Действием внешних сил и диссипацией пренебрегаем.

Пусть взаимодействует три Фурье-моды с волновыми числами $k_1 \leq k_2 \leq k_3$. Тогда закон сохранения кинетической энергии $E = V^2/2$ при таком взаимодействии имеет вид:

$$\delta E_1 + \delta E_2 + \delta E_3 = 0, \quad (1)$$

где δE_i — это флуктуации энергии гармоник $i = 1 \dots 3$.

Закон сохранения энтропии $\Omega = \omega^2$, где $\omega = \text{rot}(\mathbf{V})$ — завихренность поля скорости, дает для флуктуаций энтропии $\delta \Omega_i = k_i^2 \delta E_i$ следующее соотношение:

$$\delta \Omega_1 + \delta \Omega_2 + \delta \Omega_3 = 0. \quad (2)$$

Беря для определенности $k_2 = 2k_1$ и $k_3 = 3k_1$, выразим флуктуации δE и $\delta \Omega$ на соседних k :

$$\begin{aligned} \delta E_1 &= -\frac{5}{8} \delta E_2, & \delta E_3 &= -\frac{3}{8} \delta E_2, \\ \delta \Omega_1 &= -\frac{5}{32} \delta \Omega_2, & \delta \Omega_3 &= -\frac{27}{32} \delta \Omega_2. \end{aligned} \quad (3)$$

До этого момента не делалось каких-либо предположений о знаке флуктуации δE_2 . Ее знак выбирают из соображений статистической необратимости. Пусть на волновом числе k_2 происходит впрыск энергии, т.е. $\delta E_2 < 0$, тогда система (3) описывает растекание энергии в волновом пространстве. Обратный процесс — возникновение областей куда энергия стекает как от больших k , так и от малых, хоть и возможен, но мало вероятен (Lesieur, 2008). Поскольку $\delta E_2 < 0$, $\delta \Omega_2 < 0$, имеем, что δE_i , $\delta \Omega_i$ для $i = 1$ и 3 положительны.

Отношение $\frac{\delta E_1}{\delta E_3} = \frac{5}{3} > 1$ соответствует обратному

каскаду кинетической энергии, а $\frac{\delta \Omega_1}{\delta \Omega_3} = \frac{5}{27} < 1$ — прямому каскаду энтропии. Ниже мы рассмотрим, как этот подход можно применить для трехмерного случая, где вместо энтропии сохраняется гидродинамическая спиральность.

Переходя к трехмерию, имеем вместо (2) закон сохранения гидродинамической спиральности $H = \mathbf{V} \cdot \text{rot}(\mathbf{V})$:

$$\delta H_1 + \delta H_2 + \delta H_3 = 0, \quad (4)$$

где δH_i — это флуктуации спиральности. Обратим внимание, что, как и в двумерном случае, мы не ставим вопрос о динамике процесса, потребовавшего бы рассмотрение внешних сил, в том числе и вращения, а лишь ограничиваем наше исследование изучением влияния на триадное взаимо-

Таблица 1. Обмен энергиями δE_i и спиральностями δH_i , между модами k_{i-1} , k_i , k_{i+1} в единицах δE_2 ; О — обратный, П — прямой каскады

Величина	δE_i				δH_i			
мода/каскад	k_1	k_2	k_3	каскад	k_1	k_2	k_3	каскад
A	$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	Нет	$-\frac{1}{2}$	2	$-\frac{3}{2}$	П
B	$-\frac{1}{4}$	1	$-\frac{3}{4}$	П	$\frac{1}{4}$	2	$-\frac{9}{4}$	П
C	$-\frac{5}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	О	$-\frac{5}{4}$	2	$-\frac{3}{4}$	О
D	$-\frac{5}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	О	$\frac{5}{2}$	2	$-\frac{9}{2}$	П
Сумма по A–D	$-\frac{9}{2}$	4	$\frac{1}{2}$	О	1	8	–9	П

действие замены закона сохранения энтропии на спиральность.

Учет спиральности оказывается более сложным, чем энтропии. Во-первых, спиральность в общем случае знакопеременна, что требует дополнительного анализа. Сложнее обстоит дело с принципиальной возможностью исследования свойств вращающейся турбулентности в приближении изотропии, согласно которому мы используем лишь модуль волнового вектора k . Конечно, детальный анализ подразумевает учет анизотропии, но как правило это существенно усложняет не только аналитические выкладки и вычисления, но и последующий анализ полученных результатов. Именно поэтому интерес к изотропным моделям с вращением не ослабевает. В этом направлении достигнут определенный прогресс (см., например, ссылки в работе (Zhou, 1995)). Стоит также отметить важное направление в теории турбулентности — каскадные модели, которые, основываясь, как правило, на одномерном изотропном приближении, описывают влияние целого набора спиральностей на динамику магнитогидродинамической турбулентности (Plunian и др., 2013). Далее мы также используем приближение изотропии, считая, что поле скорости зависит от одного скалярного k , и покажем, что используемый для 2D подход может дать в трехмерии. Немаловажным обстоятельством в выборе подхода, также является и тот факт, что с появлением наглядных моделей для описания каскадов в 2D (Lesieur, 2008; Ditlevsen, 2010), интерес к теореме Фьортофта существенно возрос.

Запишем (4), учитывая явный вид для δH и тот факт, что k может быть разного знака. Без потери общности будем считать, что k положительно, а знак выражения определяется знаком констант (p_1 , p_2). Возможны четыре варианта, которые в

двумерном случае отсутствовали в силу квадратичности энтропии по k :

$$p_1 \delta E_1 k_1 + \delta E_2 k_2 + p_2 \delta E_3 k_3 = 0, \quad (5)$$

где пары констант (p_1 , p_2) принимают значения: (A) — (+1, +1), (B) — (–1, +1), (C) — (1, –1), (D) — (–1, –1).

Решая систему (1, 5) относительно δE_1 и δE_3 с $k_2 = 2k$, $k_3 = 3k$ и учитывая связь между энергией и спиральностью, получаем искомое решение для векторов $\delta \mathbf{E} = (\delta E_1, \delta E_2, \delta E_3)$ и $\delta \mathbf{H} = (\delta H_1, \delta H_2, \delta H_3)$:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{E} &= \left(\frac{3p_2 - 2}{p_1 - 3p_2}, 1, \frac{2 - p_1}{p_1 - 3p_2} \right) \delta E_2, \\ \delta \mathbf{H} &= \left(p_1 \frac{3p_2 - 2}{p_1 - 3p_2}, 2, 3p_2 \frac{2 - p_1}{p_1 - 3p_2} \right) \delta E_2. \end{aligned} \quad (6)$$

Значения вариаций для случаев (A–D) приведены в табл. 1.

Учитывая, что $\delta E_2 < 0$, остановимся на определении направления каскадов более подробно. Для A каскад энергии отсутствует, поскольку энергия от k_2 одинаково распределяется между k_1 и k_3 . Каскад спиральности прямой, так как мода k_3 получила спиральности в три раза больше, чем k_1 . Обратим внимание, что сумма спиральностей одного знака уже не равна единице, поскольку мы выбрали нормировку на δE_2 . Для B каскад энергии прямой, поскольку мода k_3 получила в три раза больше энергии, чем k_1 . Для спиральности каскад также прямой: моды k_1 и k_2 передали спиральность моде k_3 .

Для C моды k_2 и k_3 передали энергию моде k_1 — обратный каскад энергии, сопровождающийся обратным каскадом спиральности. Для D наблюдается обратный и прямой каскады энергии и

спиральности, соответственно. Поскольку δE_2 во всех случаях А–D одинаково, найдем суммарные вариации по всем А–D (см. табл. 1).

Для энергии каскад оказывается обратным, а для спиральности – прямым. Ситуация напоминает двумерный случай, но вместо прямого каскада энтропии наблюдается каскад спиральности.

Рассмотрим, насколько результат зависит от конкретного выбора значений k_i в триадах. Для этого перепишем (5) в виде:

$$p_1 \alpha \delta E_1 + \beta \delta E_2 + p_2 \delta E_3 = 0, \quad (7)$$

где действительные α и β удовлетворяют требованиям: $0 \leq \beta \leq 1$, $0 \leq \alpha \leq \beta$. Данное приближение выполняется при больших волновых числах с $\alpha \sim k_1/k_3$, $\beta \sim k_2/k_3$, где дискретность волновых чисел становится несущественной. Решая совместно (1) и (7), имеем:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{E} &= \left(\frac{\beta - p_2}{p_2 - \alpha p_1}, 1, \frac{\alpha p_1 - \beta}{p_2 - \alpha p_1} \right) \delta E_2, \\ \delta \mathbf{H} &= \left(p_1 \alpha \frac{\beta - p_2}{p_2 - \alpha p_1}, \beta, p_2 \frac{\alpha p_1 - \beta}{p_2 - \alpha p_1} \right) \delta E_2. \end{aligned} \quad (8)$$

Выражения (8) описывают флуктуации энергии и спиральности при произвольных соотношениях сторон волнового треугольника ($\alpha, \beta, 1$).

Обратим внимание, что, согласно (8), возможна реализация нелокального каскада энергии. Условие локальности переноса по спектру, т.е. последовательного переноса (без перебросов) важно при построении численных моделей, в частности, при аппроксимации нелинейных членов: в случае локальности, для описания достаточно небольшого числа мод. Для случая без вращения каскад локальный, для вращающейся же турбулентности есть указания на то, что перенос может быть не локальным (Waleffe, 1992), но в целом вопрос далек от ясности.

Пусть $\alpha \rightarrow 0$, $\beta \rightarrow 1$, тогда $\delta \mathbf{E} = \left(\frac{1-p_2}{p_2}, 1, -\frac{1}{p_2} \right) \delta E_2$, и при $p_2 = -1$ имеем не локальный обратный каскад кинетической энергии. Далее мы увидим, что при осреднении по всем возможным сочетаниям сторон волнового треугольника, этот каскад становится незначимым.

Найдем суммарный вклад для разных α и β . Просуммируем каждую из компонент векторов $\delta \mathbf{E}$ и $\delta \mathbf{H}$ по p_1 и p_2 и разделим на 4:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{E}^\Sigma &= \left(-\frac{1}{1-\alpha^2}, 1, \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2} \right) \delta E_2, \\ \delta \mathbf{H}^\Sigma &= \beta \left(\frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}, 1, -\frac{1}{1-\alpha^2} \right) \delta E_2. \end{aligned} \quad (9)$$

Замечаем, что, поскольку $0 \leq \alpha \leq 1$ и $\delta E_2 < 0$, компоненты вектора $\delta \mathbf{E}^\Sigma = \delta E_2 < 0$, $\delta E_3^\Sigma < 0$, а $\delta E_1^\Sigma = \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2} \delta E_2 = -(\delta E_2^\Sigma + \delta E_3^\Sigma) > 0$. Этот случай соответствует обратному каскаду энергии.

Для спиральности имеем обратную ситуацию:

$$\begin{aligned} \delta H_1^\Sigma &= \frac{\alpha^2 \beta}{1-\alpha^2} \delta E_2 < 0, & \delta H_2^\Sigma &= \beta \delta E_2 < 0, & \text{а} \\ \delta H_3^\Sigma &= -\frac{\beta}{1-\alpha^2} \delta E_2 = -(\delta H_1^\Sigma + \delta H_2^\Sigma) > 0, & \text{т.е.} & \text{прямой каскад спиральности.} \end{aligned}$$

Интересно, что β не входит в явный вид для $\delta \mathbf{E}^\Sigma$.

Исследуем случай, когда в обмене участвуют лишь две моды, а третья является катализатором, но в обмене не участвует. Для энергии это соответствует случаю, когда $\alpha \rightarrow 1$. В этом случае мода k_2 не участвует в обмене энергиями, а вся энергия от k_3 идет на k_1 . Поскольку $\beta > \alpha$, то это соответствует равносильному треугольнику в волновом пространстве. Возможна другая ситуация, когда $\alpha \rightarrow 0$, тогда обмен происходит между k_1 и k_2 , а k_3 не участвует в обмене.

Для спиральности аналогичный анализ дает: при $\alpha \rightarrow 1$ мода k_2 в обмене участвует, а при $\alpha \rightarrow 0$ в обмене не участвует мода k_1 .

Выражения (9) описывают флуктуации энергии и спиральности при произвольных соотношениях сторон треугольника ($\alpha, \beta, 1$). Найдем суммарный вклад для разных α и β . Для этого введем функционал $I(f) = \int_0^1 \int_0^\beta f(\alpha, \beta) d\alpha d\beta$ и вычислим его последовательно для вариаций $(1-\alpha^2)\delta E_i^\Sigma$, $(1-\alpha^2)\delta H_i^\Sigma$, подставив их вместо f в I и обозначив результат через $\delta \mathbf{E}^\dagger$, $\delta \mathbf{H}^\dagger$, соответственно:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{E}^\dagger &= \left(-\frac{6}{12}, \frac{5}{12}, \frac{1}{12} \right) \delta E_2, \\ \delta \mathbf{H}^\dagger &= \left(\frac{1}{15}, \frac{4}{15}, -\frac{5}{15} \right) \delta E_2. \end{aligned} \quad (10)$$

Соотношения (10) дают представление о суммарном соотношении вкладов мод k_i в обратный каскад кинетической энергии и в прямой каскад гидродинамической спиральности по спектру. Обратим внимание, что направление суммарного каскада может не совпадать с направлением каскада для отдельных А–D.

ОБСУЖДЕНИЕ

Исследование каскадных процессов является бурно развивающимся направлением теории турбулентности (Mininni, Pouquet, 2010; Biferale и др., 2017). В настоящее время не вызывает со-

мнений, что трехмерные модели могут воспроизводить обратные каскады кинетической энергии. Детали процесса зависят от параметров, в частности, от величины угловой скорости объектов (Mininni и др., 2009; Campagne и др., 2014), масштаба вынуждающей силы (Deusebio и др., 2014). В этом отношении рассмотренный выше простой сценарий обратного каскада энергии отражает общие свойства вращающейся турбулентности. Рассмотрение более сложных моделей связано с ограничениями, накладываемыми на источники энергии, форму вынуждающей силы, например, согласующуюся с предсказаниями линейного анализа во вращающейся тепловой конвекции (Roberts, 1965). В этой связи, интересно обсудить, что именно понимается под соответствием теории и результатов трехмерного моделирования. Обычно, в численных моделях рассматривается квазистационарное решение уравнения Навье—Стокса, в котором есть только один сток энергии на масштабе диссипации. Это означает, что энергии, передаваемой за счет обратного каскада на большие масштабы некуда идти. В результате может развиваться режим статистического равновесия (см. подробнее (Ditlevsen, 2010)), со спектром $\sim k^{-2}$ и нулевым потоком энергии. В тоже время теория анизотропной турбулентности (Kraichnan, 1973; Waleffe, 1992) предсказывает ослабление обратного потока кинетической энергии при усилении вращения из других соображений, а именно — за счет уменьшения числа мод с разными знаками гидродинамической спиральности. Это связано с тем, что чем быстрее вращение, тем большее число мод будет иметь один и тот же знак спиральности, собственно, и определяющий знак средней спиральности. Наша модель укладывается как раз в режим быстрого вращения, поскольку мы использовали оценку для максимальной спиральности $H \sim kE$. Заметим также, что ослабление потока кинетической энергии по спектру с ростом скорости вращения следует уже и из того факта, что записав нелинейный член в уравнении Навье—Стокса через векторное произведение, получим, что в состоянии максимальной спиральности, когда векторы скорости и завихренности коллинеарны, поток будет равен нулю.

Область применимости теории обратных каскадов поражает своей широтой и простирается от весьма скромных задач по построению полуэмпирических моделей турбулентности для быстро вращающихся систем (Smith и др., 2002), в которых появляется отрицательная вязкость (Старр, 1971), образования когерентных структур (Tabeling, 2002), до влияния обратных каскадов на формирование протопланетного облака (Колесниченко, Маров, 2007; Колесниченко, 2011).

Одними из наиболее экстремальных объектов, где вращение оказывает влияние на гидродина-

мику, являются планеты Солнечной системы и их спутники, зачастую обладающие своим собственным магнитным полем. Своим крупномасштабным магнитным полем такие объекты обязаны именно ненулевой средней гидродинамической спиральности. Но удивительно, что при обсуждении обратных каскадов в таких системах очень часто забывают о чисто гидродинамическом каскаде, а именно — об обратном каскаде кинетической энергии по спектру. Согласно линейному анализу при быстром вращении в рамках моделей тепловой или композиционной конвекции первыми в жидком ядре Земли образуются циклоны, вытянутые вдоль оси вращения и имеющие радиус на пять порядков меньший, чем радиус жидкого ядра. При существующих же оценках источников энергии, линейный анализ по-прежнему предсказывает течения, меньшие по масштабу на 2–3 порядка, чем это следует из анализа геомагнитных данных, где наблюдается сравнительно равномерный спектр для первых 14 сферических гармоник (Решетняк, 2005). Одним из объяснением появления крупномасштабных течений служит механизм образования волн Россби, приводящий к осесимметричному азимутальному дрейфу циклонов. Направление дрейфа определяется кривизной ограничивающей поверхности объема: для сферы вращение совпадает с направлением вращения планеты, а для параболоида вращения — в обратном направлении (Busse, 2002). В этой связи, обратный каскад энергии, связанный с чисто триадным взаимодействием свободен от выбора геометрии и является более общим.

Наличие обратного каскада кинетической энергии важно и для стабилизации геомагнитного поля. Как известно (Вайнштейн и др., 1980), крупномасштабное магнитное поле подавляет турбулентность, тем самым уменьшая вязкую и омическую диссипации. Последнее, в свою очередь, приводит к усилению генерации магнитного поля процессами динамо. Возможен и обратный процесс — когда ослабление крупномасштабного магнитного поля приводит к усилению интенсивности турбулентности и резкому ослаблению генерации крупномасштабного магнитного поля. Поскольку магнитные поля в быстровращающихся объектах сильные, то и эффективное ослабление генерации магнитного поля в силу таких неустойчивостей также существенно: если более точно, то критические числа Рэлея меняются на порядки. Такой сценарий получил название динамо-катастрофы (Zhang, Gubbins, 2000; Jones, 2000). В то же время учет обратного гидродинамического каскада позволяет получить дополнительное усиление крупномасштабного течения, и далее — процесса динамо, таким образом, сделав систему более устойчивой. Упомянутые во Введении работы по трехмерному моделированию турбулентности в жидком ядре Земли (Reshetnyak,

Hejda, 2008; Hejda, Reshetnyak, 2009), собственно, и стимулировали наше исследование.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 19-47-04110.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Вайнштейн С.И., Зельдович Я.Б., Рузмайкин А.А. Турбулентное динамо в астрофизике. М.: Наука, 1980. 352 с.
- Колесниченко А.В., Маров М.Я. О влиянии спиральности на эволюцию турбулентности в солнечном протопланетном облаке // Астрон. вестн. 2007. Т. 41. № 1. С. 1–20. (Kolesnichenko A.V., Marov M.Ya. The effect of spirality on the evolution of turbulence in the Solar protoplanetary cloud // Sol. Syst. Res. 2007. V. 41. № 1. P. 1–18.)
- Колесниченко А.В., Маров М.Я. Турбулентность и самоорганизация проблемы моделирования космических и природных сред. М.: БИНОМ, 2009. 632 с.
- Колесниченко А.В. К моделированию спиральной турбулентности в астрофизическом немагнитном диске // Астрон. вестн. 2011. Т. 45. № 3. С. 253–272. (Kolesnichenko A.V. On the simulation of helical turbulence in an astrophysical nonmagnetic disk // Sol. Syst. Res. 2011. V. 45. № 3. P. 246–263.)
- Колмогоров А.Н. Локальная структура турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости при очень больших числах Рейнольдса // Докл. АН СССР 1941. Т. 30. С. 301–305.
- Курганский М.В. Введение в крупномасштабную динамику атмосферы (Адиабатические инварианты и их применение). Санкт-Петербург: Гидрометеоздат, 1993. 168 с.
- Решетняк М.Ю. Динамо-катастрофа, или почему магнитное поле Земли живет так долго? // Геомагнетизм и аэрономия. 2005. Т. 45. С. 571–575.
- Старр В. Физика явлений с отрицательной вязкостью. М.: Мир, 1971. 260 с.
- Фрик П.Г. Турбулентность: подходы и модели. Москва-Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2010. 332 с.
- Biferale L., Buzzicotti M., Linkmann M. From two-dimensional to three-dimensional turbulence through two-dimensional three-component flows // Phys. Fluids. 2017. V. 29. P. 111101.
- Brissaud A., Frisch U., Leorat J., Lesieur M., Mazure A. Helicity cascades in fully developed isotropic turbulence // Phys. Fluids. 1973. V. 16. P. 1366–1367.
- Busse F.H. Convective flows in rapidly rotating spheres and their dynamo action // Phys. Fluids. 2002. V. 14. № 4. P. 1301–1314.
- Campagne A., Gallet B., Moisy F., Cortet P.P. Direct and inverse energy cascades in a forced rotating turbulence experiment // Phys. Fluids. 2014. V. 26. P. 125112.
- Deusebio E., Boffetta G., Lindborg E., Musacchio S. Dimensional transition in rotating turbulence // Phys. Rev. E. 2014. V. 90. P. 023005.
- Ditlevsen P.D. Turbulence and shell models. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2010. 153 p.
- Fjortoft R. On the changes in the spectral distribution of kinetic energy for twodimensional, nondivergent flow // Tellus. 1953. V. 5. P. 225–230.
- Frisch U. Turbulence: The Legacy of AN Kolmogorov. NY: Cambridge, 1995. 296 p.
- Hejda P., Reshetnyak M. Effects of anisotropy in geostrophic turbulence // Phys. Earth and Planet. Int., 2009. V. 177. P. 152–160.
- Jones C.A. Convection-driven geodynamo models // Phil. Trans. Roy. Soc. London A. 2000. V. 358. P. 873–897.
- Kraichnan R.H. Helical turbulence and absolute equilibrium // J. Fluid Mech. 1973. V. 59. P. 745–752.
- Kraichnan R.H., Montgomery D. Two-dimensional turbulence // Rep. Prog. Phys. 1980. V. 43. P. 547–619.
- Lesieur M. Turbulence in fluids. Dordrecht: Springer, 2008. 563 p.
- Mininni P.D., Alexakis A., Pouquet A. Scale interactions and scaling laws in rotating flows at moderate Rossby numbers and large Reynolds numbers // Phys. Fluids. 2009. V. 21. P. 015108.
- Mininni P.D., Pouquet A. Rotating helical turbulence I // Global evolution and spectral behavior. Phys. Fluids. 2010. V. 22. P. 035105.
- Moffatt H.K. Magnetic field generation in electrically conductive fluids. NY: Cambridge, 1978. 336 p.
- Pedlosky J. Geophysical fluid dynamics. NY: Springer Science & Business Media, 2013. 715 p.
- Plunian F., Stepanov R., Frick P. Shell models of magnetohydrodynamic turbulence // Phys. Rep. 2013. V. 523. P. 1–60.
- Reshetnyak M., Hejda P. Direct and inverse cascades in the geodynamo // Nonlin. Proc. Geophys. 2008. V. 420. P. 700–703.
- Roberts P. On the thermal instability of a highly rotating fluid sphere // Astrophys. J. 1965. V. 141. P. 240–250.
- Rose H., Sulem P. Fully developed turbulence and statistical mechanics // J. de Physiq. 1978. V. 39. P. 441–484.
- Smith K.S., Boccaletti G., Henning C.C., Marinov I., Tam C.Y., Held I.M., Vallis G.K. Turbulent diffusion in the geostrophic inverse cascade // J. Fluid Mech. 2002. V. 469. P. 13–48.
- Tabeling P. Two-dimensional turbulence: a physicist approach // Phys. Rep. 2002. V. 362. P. 1–62.
- Verma M.K. Statistical theory of magnetohydrodynamic turbulence: recent results // Phys. Rep. 2004. V. 401. P. 229–380.
- Waleffe F. The nature of triad interactions in homogeneous turbulence // Phys. Fluids. 1992. V. 4. P. 350–363.
- Zhang K., Gubbins D. Is the geodynamo process intrinsically unstable? // Geophys. J. Int. 2000. V. 140. P. F1–F4.
- Zhou Y. A phenomenological treatment of rotating turbulence // Phys. Fluids. 1995. V. 7. P. 2092–2094.