
**КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ
ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ И ТЕОРИИ ВОЛН**

УДК 534.26;534.8

ДИФРАКЦИЯ ВОЛНЫ ШЕПЧУЩЕЙ ГАЛЕРЕИ ПРИ СКАЧКООБРАЗНОМ РАСПРЯМЛЕНИИ ГРАНИЦЫ

© 2023 г. **Е. А. Злобина^а, ***, **А. П. Киселев^{а, б, с}, ****

^аСанкт-Петербургский Государственный Университет,
Университетская наб. 7-9, Санкт-Петербург, 199034 Россия

^бСанкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН,
наб. р. Фонтанки 27, Санкт-Петербург, 191023 Россия

^сИнститут Проблем Машиноведения РАН,
Большой проспект В.О. 61, Санкт-Петербург, 199178 Россия

*e-mail: ezlobina2@yandex.ru

**e-mail: aleksei.kiselev@gmail.com

Поступила в редакцию 12.09.2022 г.

После доработки 12.09.2022 г.

Принята к публикации 22.12.2022 г.

Изучается дифракция высокочастотной волны шепчущей галереи с небольшим номером, набегавшей вдоль вогнутой границы, кривизна которой испытывает скачок при переходе в плоскую границу. Рассмотрены случаи жесткой (условие Неймана) и мягкой (условие Дирихле) границы. В рамках метода параболического уравнения получена корректная задача рассеяния, которая решена явно и детально исследована асимптотически. Найдены аналитические выражения для всех волновых полей, возникающих в окрестности особой точки границы. В частности, описана расходящаяся из этой точки краевая волна. Для жесткой границы ее амплитуда пропорциональна величине скачка кривизны, а для мягкой — нет.

Ключевые слова: высокочастотная асимптотика, дифракция на негладкой границе, уравнение Гельмгольца, метод параболического уравнения

DOI: 10.31857/S0320791923600038, **EDN:** ITWTAS

1. ВВЕДЕНИЕ

С возникновением геометрической теории дифракции, сводящей нахождение коротковолновой асимптотики решений задач дифракции на телах сложной формы к изучению более простых эталонных задач, возникла потребность в их систематическом исследовании. Однако до сих пор остаются обширные пробелы в изучении круга задач, в которых граница препятствия обладает непрерывной или кусочно непрерывной кривизной с изолированными особенностями. Здесь не применимы ни разделение переменных, ни методы типа Винера—Хопфа, и получение надежных результатов должно опираться на достаточно изощренную асимптотическую технику. В настоящей работе мы исследуем одну из таких задач.

Задачи дифракции коротких волн на структурах, где кривизна границы меняется скачкообразно, привлекают внимание исследователей с 1960-х годов (см., например, [1–12]). Достаточно полно изучен пока лишь случай некасательного падения (и некасательного наблюдения), когда знаки кривизны по разные стороны особой точки границы

не имеют большого значения, см. недавние работы [9–11] и литературу в них. Задачи же с касательным падением описывают довольно разнообразные физические процессы, кардинально зависящие от знаков кривизны по разные стороны от точки сопряжения гладких участков границы. Отметим, что большое внимание привлекает на первый взгляд родственная, но в математическом отношении качественно другая задача о дифракции волны шепчущей галереи на контуре, гладко переходящем от вогнутости к выпуклости (типа кубической параболы), впервые рассмотренная в [13], свежий обзор этих исследований дан в [14].

Теория дифракции на препятствиях с негладкой кривизной еще далека от завершения. В настоящей работе изучается двумерная задача дифракции высокочастотной волны шепчущей галереи на границе с разрывом кривизны. Граница S представляет собою дугу окружности радиуса $a > 0$, переходящую в точке сопряжения O в касательную к ней прямую (см. рис. 1) так, что в O кривизна скачком меняется с $1/a$ на 0 . Рассмотрение ведется в рамках метода параболического

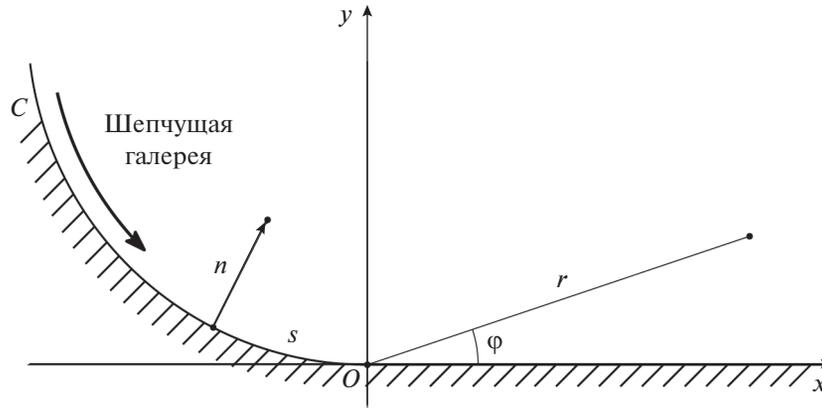


Рис. 1. Геометрия задачи.

уравнения, естественного для задач с касательным падением.

Метод параболического уравнения [15, 16] позволил открыть новые волновые явления. Оказалось, что в задаче дифракции на гладком выпуклом теле присутствуют не только волны, отвечающие геометрической оптике, слияние которых описывается интегралом Френеля, но и ранее не фигурировавшие в теоретических исследованиях волновые поля, описываемые специфическими, не везде допускающими асимптотическое упрощение специальными функциями — они называются теперь интегралами Фока. Соответствующие волновые поля, более слабые, чем геометроакустические и френелевские, были названы фоном. Похожий, но аналитически иной фон возникает и в, некоторым образом двойственной нашей, задаче А.В. Попова [3, 12] о дифракции плоской волны, набегающей вдоль прямой, переходящей в выпуклую кривую (для условия Неймана). При описании поля в окрестности особой точки методом параболического уравнения здесь возникают специальные функции, напоминающие по структуре интегралы Фока [15, 16], а поле в глубокой тени описывается волнами соскальзывания. В рассматриваемой нами задаче, в рамках метода параболического уравнения возникает фон с совершенно другой аналитической структурой, и для его исследования требуется совсем другой математический аппарат.

Высокочастотные задачи, где граница состоит из прямой и дуги выпуклого или вогнутого контура, сопряженных друг с другом так, что кривизна границы терпит разрыв, были предметом многочисленных исследований, среди которых отметим [3, 6, 8, 12]. К рассматриваемой нами задаче обращались Н.Я. Кирпичникова и В.Б. Филиппов [6], которых преимущественно интересовало построение тока на границе на основе своеобразной комбинации метода параболического уравнения и метода Кирхгофа. Поле вблизи границы

детально не изучалось, и дифрагированная точкой негладкости границы краевая волна не рассматривалась. Мы же исследуем ясно поставленную задачу математической физики, причем даем полное аналитическое описание всех волновых полей в окрестности точки O . В частности, мы находим выражение для расходящейся из O краевой волны. При этом мы используем некоторые приемы работы [6].

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Мы исследуем скалярную двумерную задачу, описывая волновое поле u над границей C (см. рис. 1) уравнением Гельмгольца

$$u_{xx} + u_{yy} + k^2 u = 0, \quad (1)$$

причем волновое число k играет роль формально-го большого параметра, $k \gg 1$; соответствующий безразмерный параметр вводится ниже, см. (12). Предполагается гармоническая зависимость поля от времени $\exp(-i\omega t)$. Мы отдельно рассматриваем случаи граничных условий Неймана

$$u_n|_C = 0, \quad (2)$$

(здесь u_n — производная поля по нормали к C), и Дирихле

$$u|_C = 0. \quad (3)$$

Если трактовать u как акустическое давление, то условие (2) описывает жесткий контакт, а (3) — мягкий [17]. При удалении от границы поле стремится к нулю.

Будем характеризовать положение точки (x, y) , лежащей вблизи O , расстоянием вдоль нормали до контура $n \geq 0$ и длиной дуги s , которая отсчитывается от точки O (см. рис. 1) и принимается отрицательной при $x < 0$ и положительной при $x > 0$ (там $s = x$ и $n = y$). Отметим, что переход от

декартовых координат $k(s, n)$ не является гладким.

Мы начнем с подробного рассмотрения случая жесткой границы (2). Случай мягкой границы (3) более кратко рассматривается в п. 6.

Вдоль вогнутой части границы, представляющей собой дугу окружности радиуса a , на точку O набегают волна шепчущей галереи u^{inc} . В приграничном слое

$$n/a \ll (ka)^{-1/3}, \quad (4)$$

см. [18], главный член ее асимптотики u^{inc} имеет вид [16, 18]:

$$u^{\text{inc}} = \exp(iks)U^{\text{inc}}, \\ U^{\text{inc}} = \exp(-i\tau'(k/2a^2)^{1/3}s)v\left(\left(2k^2/a\right)^{1/3}n - \tau'\right). \quad (5)$$

Здесь v – функция Эйри–Фока [15, 16], удовлетворяющая уравнению Эйри

$$v''(t) = tv(t) \quad (6)$$

и имеющая асимптотику

$$v(t) = \frac{\exp(-2t^{3/2}/3)}{2t^{1/4}} \left(1 + O\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)\right), \quad t \rightarrow \infty, \quad (7)$$

а $(-\tau')$ – один из первых корней ее производной (они вещественны, отрицательны и просты),

$$v'(-\tau') = 0. \quad (8)$$

С ростом t функция $v(t)$ быстро убывает со всеми производными, см. (7), поэтому падающая волна шепчущей галереи (14) локализована в узкой, порядка $n \lesssim a^{1/3}/k^{2/3}$, окрестности вогнутой части границы.

Предполагается, что номер моды падающей волны не велик, и, следовательно, падающее поле не является быстроосциллирующим в направлении нормали. Это важно для дальнейших рассмотрений, иначе в задаче возник бы еще один большой параметр, что заметно усложняло бы ее анализ.

Целью настоящей работы является асимптотическое описание всех волн, возникающих в рассматриваемой задаче. Среди них, в частности, предсказываемая геометрической теорией дифракции (например, [19]) краевая волна, расходящаяся из точки O :

$$u^{\text{dif}} = A(\varphi; k) \frac{\exp(ikr)}{\sqrt{kr}} (1 + \mathcal{E}(\varphi, r; k)), \quad (9)$$

$$kr \gg 1. \quad (10)$$

Здесь r и φ – классические полярные координаты, см. рис. 1,

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad 0 \leq r, \quad -\pi \leq \varphi < \pi, \quad (11)$$

A – дифракционный коэффициент (диаграмма направленности), а \mathcal{E} – погрешность, которая не предполагается равномерной по φ . Нахождение дифракционных коэффициентов для разных задач дифракции на границах с негладкой кривизной привлекало внимание многих исследователей (например [3–5, 7, 9–11]). Обычно дифракционный коэффициент и погрешность \mathcal{E} неограниченно растут при приближении к особому направлению – предельному лучу. Подобные явления рассматривают как возникновение переходных зон. Там волновые поля описываются подходящими специальными функциями. Перейдем к исследованию полного волнового поля в малой окрестности точки O в рамках метода параболического уравнения [15, 16] – погранслоного подхода, берущего начало в работах Фока. Сначала мы формулируем корректную задачу рассеяния (что отличает нашу работу от [6]), затем подробно исследуем ее решение для случая жесткой границы (2). Наконец, в п. 6 более кратко рассмотрим случай мягкой границы (3).

3. ЗАДАЧА РАССЕЯНИЯ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Следуя классическому подходу [3, 15, 16], введем безразмерный большой параметр

$$M = (ka/2)^{1/3}, \quad M \gg 1, \quad (12)$$

и перейдем в окрестности точки O к растянутым переменным

$$\sigma = Ms/a, \quad v = 2M^2n/a \quad (13)$$

(напомним, что $s = x$ и $n = y$ при $x > 0$). Падающая волна (5) принимает вид

$$u^{\text{inc}} = \exp(iks)U^{\text{inc}}, \quad (14)$$

$$U^{\text{inc}}(v, \sigma) = \exp(-i\tau'\sigma)v(v - \tau').$$

В дальнейшем нам будут полезны формулы для полярных координат (11) справа от точки O , которые легко получить из (13):

$$kr = kx + k \frac{y^2}{2x} + O\left(k \frac{y^4}{x^3}\right) = kx + \frac{v^2}{4\sigma} + O\left(\frac{v^4}{M^2\sigma^3}\right), \quad (15)$$

$$\varphi = \frac{y}{x} + O\left(\frac{y^3}{x^3}\right) = \frac{v}{2M\sigma} + O\left(\frac{v^3}{M^3\sigma^3}\right).$$

Исходя из основополагающего для метода параболического уравнения предположения [15, 20], что полное волновое поле имеет в пограничном слое общую быструю осцилляцию в продольном направлении, а в поперечном направлении осциллирует медленнее, будем искать асимптотику полного поля в виде, аналогичном (14):

$$u = \exp(iks)U(\sigma, v). \quad (16)$$

Следуя работам [15, 16], мы называем U множителем ослабления.

Метод параболического уравнения предназначен для описания волн с фазами, близкими к фазе падающей волны. Область его применимости, как и в классическом случае [15, 16], ограничивается малыми значениями n и s (соответственно, x и y), однако допускаются большие значения v и σ (ограничение на v непосредственно вытекает из (4)).

Подставляя (14) и (16) в уравнение Гельмгольца (1) и граничное условие (2), стандартным образом (см., например [12]) получаем для U параболическое уравнение с негладким коэффициентом

$$iU_{\sigma} + U_{vv} + vH(-\sigma)U = 0, \quad (17)$$

и однородное граничное условие:

$$U_v|_{v=0} = 0. \quad (18)$$

Здесь H – функция Хевисайда, $H(\sigma) = 0$ при $\sigma \leq 0$ и $H(\sigma) = 1$ при $\sigma > 0$.

Поставим для U математически корректную задачу рассеяния, потребовав, чтобы U переходило при $\sigma \rightarrow -\infty$ в множитель ослабления падающей волны U^{inc} , см. (14):

$$\int_0^{\infty} |U - U^{\text{inc}}|^2 dv \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \sigma \rightarrow -\infty.$$

Простыми стандартными рассуждениями (например [13, 21]) устанавливается независимость нормы $\int_0^{\infty} |U|^2 dv$ от σ , откуда следует единственность в классе решений, квадратично интегрируемых по v .

Очевидно, при $\sigma < 0$ решением (17) является множитель ослабления падающей волны, и $U = U^{\text{inc}}$. Поскольку U непрерывно при $\sigma = 0$, то для $\sigma \geq 0$ оно совпадает с решением задачи Коши, возникающей при добавлении к (17) и (18) начального условия

$$U|_{\sigma=0} = U^{\text{inc}}|_{\sigma=0} = v(v - \tau'). \quad (19)$$

Далее мы рассматриваем только область $\sigma \geq 0$. Решение задачи (17), (18), (19) можно получить, сворачивая начальное условие (19) с соответствующей функцией Грина

$$G = \frac{\exp(-i\pi/4)}{2\sqrt{\pi\sigma}} \left(\exp\left(i\frac{(p-v)^2}{4\sigma}\right) + \exp\left(i\frac{(p+v)^2}{4\sigma}\right) \right)$$

(ее построение приведено, например, в [7]):

$$U = \frac{\exp(-i\pi/4)}{2\sqrt{\pi\sigma}} \int_0^{\infty} v(p - \tau') \times \left(\exp\left(i\frac{(p-v)^2}{4\sigma}\right) + \exp\left(i\frac{(p+v)^2}{4\sigma}\right) \right) dp. \quad (20)$$

Выражение (20) было найдено Н.Я. Кирпичниковой и В.Б. Филипповым [7] в рамках эвристического подхода, родственного методу Кирхгофа.

Для удобства асимптотического исследования множителя ослабления (20) представим его в виде

$$U = I_- + I_+, \quad (21)$$

где

$$I_{\pm} = \frac{\exp(-i\pi/4)}{2\sqrt{\pi\sigma}} \int_0^{\infty} v(p - \tau') \exp\left(i\frac{(p \pm v)^2}{4\sigma}\right) dp. \quad (22)$$

Хорошо известно, см. [22], что вклад в асимптотику интегралов от гладких быстроосциллирующих функций дается критическими точками фаз экспонент (где производная фазы обращается в нуль) и краем интервала интегрирования. Если критическая точка не приближается к краю, то их можно рассматривать по отдельности; в противном случае асимптотика интеграла дается соответствующей специальной функцией – у нас она окажется одной из функций параболического цилиндра.

4. ПОЛЕ ПРИ МАЛЫХ ЗНАЧЕНИЯХ σ В СЛУЧАЕ ЖЕСТКОЙ ГРАНИЦЫ

Рассмотрим сначала область, где

$$\sigma \ll 1, \quad (23)$$

и $1/4\sigma$ в фазах экспонент можно рассматривать как большой параметр.

4.1. Область, где критические точки фаз не близки к краю интервала интегрирования

Если v не слишком мало, то критические точки фаз $p = \pm v$ подынтегральных экспонент в (22) лежат далеко от края интегрирования. Критическая точка фазы в I_+ , $p = -v$, не вносит вклада, поскольку лежит вне интервала интегрирования. Асимптотика (20) дается суммой вкладов в I_- и I_+ краевой точки $p = 0$ и вклада критической точки фазы $p = v$ в I_- .

4.1.1. Вклад краевой точки. Вклад точки $p = 0$ находится путем многократного интегрирования по частям. Постараемся изложить это вычисление, избегая чересчур громоздких формул.

Четырехкратное интегрирование по частям дает для вклада краевой точки в асимптотику интеграла I_- выражение

$$I_-^{\text{end}} = -\frac{\exp(-i\pi/4)}{2\sqrt{\pi\sigma}} \left\{ 2i\sigma \frac{v(p-\tau')}{p-v} + \dots \right. \\ \left. + (2i\sigma)^4 \frac{1}{p-v} \left(\frac{d}{dp} \frac{1}{p-v} \right)^3 v(p-\tau') \right\} \times \\ \times \exp \left(i \frac{(p-v)^2}{4\sigma} \right) \Big|_{p=0}^{\infty} + O(\sigma^5).$$

Учитывая, что $v'(-\tau') = 0$, а на бесконечности v стремится к нулю со всеми производными, и выражая старшие производные от v через v и v' с помощью уравнения Эйри (6), придем к формуле

$$I_-^{\text{end}} = \frac{\exp(iv^2/4\sigma - i\pi/4)}{2\sqrt{\pi\sigma}} \left[-2i\sigma \frac{v(-\tau')}{v} - \right. \\ \left. - 4\sigma^2 \frac{v(-\tau')}{v^3} - 8i\sigma^3 v(-\tau') \left(\frac{3}{v^5} - \frac{\tau'}{v^3} \right) + \right. \\ \left. + 16\sigma^4 v(-\tau') \left(\frac{15}{v^7} - \frac{6\tau'}{v^5} + \frac{1}{v^4} \right) \right] + O(\sigma^5). \quad (24)$$

Вклад точки $p = 0$ в асимптотику интеграла I_+ отличается лишь заменой v на $-v$. При сложении I_-^{end} и I_+^{end} члены, в которых степень v нечетна, сокращаются. В результате вклад точки $p = 0$ в асимптотику множителя ослабления (20) дается удвоенным слагаемым в (24) с множителем $1/v^4$ и имеет вид

$$I_-^{\text{end}} + I_+^{\text{end}} = \\ = v(-\tau') \left(\frac{2\sigma}{v} \right)^4 \frac{\exp(iv^2/4\sigma - i\pi/4)}{\sqrt{\pi\sigma}} \left(1 + O\left(\frac{\sigma}{v^2} \right) \right). \quad (25)$$

Поправочные члены малы в области, где

$$v^2 \gg \sigma, \text{ т.е. } kr\varphi^2 \gg 1. \quad (26)$$

Вклад края (25) сшивается с множителем ослабления, отвечающим краевой волне (9), в области, где выполнены неравенства (10) и

$$v^2 \ll M^2\sigma^2, \text{ т.е. } kr\varphi^4 \ll 1, \quad (27)$$

см. (15).

4.1.2. Вклад критической точки фазы. При умеренных значениях v ,

$$v \lesssim 1, \quad (28)$$

критическая точка фазы $p = v$ интеграла I_- лежит в области медленного изменения $v(p - \tau)$, и ее вклад находится стандартным методом стационарной фазы [22], дающим

$$I_-^{\text{cr}} = v(v - \tau') \left(1 + O(\sigma v) + O(\sigma^2/v) \right). \quad (29)$$

Остаточные члены малы в области, где выполняются неравенства (23), (26) и (28).

С ростом v критическая точка перемещается в область больших значений аргумента (и, соответственно, экспоненциального убывания) функции $v(p - \tau')$, и вклад ее в поле делается экспоненциально мал. Вклад критической точки в поле (16) (с учетом того, что $\exp(-i\tau'\sigma) \approx 1$) можно интерпретировать как продолжение падающей волны шепчущей галереи (14). Присутствие этой волны отмечалось в [6], правда, только при больших σ . В области, где v не слишком велико, вклад края (25) имеет меньший порядок, чем вклад критической точки (29).

4.1.3. Обсуждение волнового поля. В пересечении областей I и II (см. рис. 2), где выполнены неравенства (10), (23), (26) и

$$\varphi \ll 1, \quad (30)$$

волновое поле, согласно (16) и (21), дается выражением

$$u \approx \exp(ikx) v \left(\left(2k^2/a \right)^{1/3} y - \tau' \right) + \\ + A(\varphi; k) \frac{\exp(ikr)}{\sqrt{kr}}. \quad (31)$$

Первое слагаемое, отвечающее вкладу стационарной точки, интерпретируется как продолжение падающей волны шепчущей галереи, а второе, отвечающее вкладу края, — как краевая волна. Неравенство (26) означает, что разность фаз краевой и плоской волн велика, см. (15). Дифракционный коэффициент A имеет вид

$$A(\varphi; k) = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{v(-\tau') \exp(-i\pi/4)}{ka \varphi^4}. \quad (32)$$

Он линеен по скачку кривизны $1/a$, как это было и в ряде других задач со скачком кривизны [3–5, 9, 11]. Отметим, что в задаче А.В. Попова [3, 12] (которая двойственна нашей) дифракционный коэффициент также пропорционален φ^{-4} при $\varphi \ll 1$.

Обратимся теперь к той части области I, где φ нельзя считать малыми (вблизи оси y неравенство (30) не выполнено). Асимптотика волнового поля принимает вид суммы продолжения падающей волны, описываемой первым слагаемым, и фона, описываемого вторым слагаемым:

$$u \approx v \left(\left(2k^2/a \right)^{1/3} y - \tau' \right) \exp(ikx) + \\ + 2\sqrt{2/\pi} v(-\tau') \frac{x^4 \exp(ikx +iky^2/2x - i\pi/4)}{kay^4 \sqrt{kx}}.$$

Второй член мы, следуя терминологии Фока, называем фоном, поскольку он, во-первых, не интерпретируется в рамках геометрической акустики как краевая волна, так как равенства (15) справедливы лишь для малых φ . Во-вторых, в той

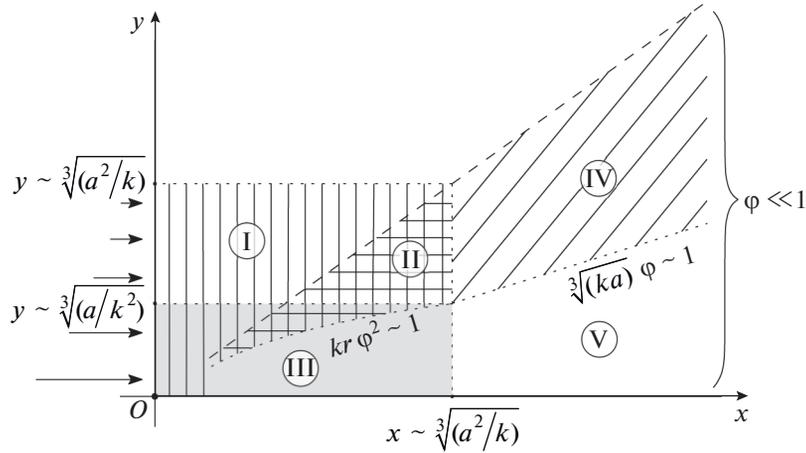


Рис. 2. Схематическое изображение областей с различными структурами волнового поля.

части области I, где $y \lesssim a^{1/3}/k^{2/3}$, он слабее продолжения падающей волны. Как и краевая волна, фон имеет там порядок $O(1/ka)$.

4.2. Область, где критические точки фаз близки к краю интервала интегрирования

Теперь рассмотрим область III (на рис. 2 выделена серой заливкой), где мало не только σ (23), но и v ,

$$v \ll 1, \tag{33}$$

и критические точки фаз экспонент близки к краю интервала интегрирования. Асимптотика интеграла (20) определяется поэтому малой окрестностью точки $p = 0$, где имеем

$$\begin{aligned} v(p - \tau') &= \\ &= v(-\tau') - \tau' v(-\tau') p^2/2 + v(-\tau') p^3/6 + O(p^4). \end{aligned} \tag{34}$$

Здесь учтено равенство (8), а старшие производные выражены через функцию v с помощью уравнения Эйри (6). Подставим это разложение в (22) и проинтегрируем почленно¹. Интеграл от квадратичного по p члена рассматриваемой области окажется меньше, чем от нулевого, но имеет ту же структуру. Интеграл же от кубического члена еще меньше, однако выражается через нетипичную для теории дифракции специальную функцию и описывает другой волновой процесс.

Рассмотрим сначала интегралы от первых двух членов, сделав в интегралах, отвечающих I_+ , замену переменных $p \mapsto -p$. Пользуясь выражениями для интегралов от гауссовских функций

¹ Степенные расходимости этих интегралов устраняются смещением контуров интегрирования в комплексную плоскость: кверху при $p \rightarrow +\infty$ и книзу при $p \rightarrow -\infty$.

$$\int_0^\infty p^{2n} \exp(-\mu p^2) dp = \frac{1 \times 3 \dots \times (2n-1)}{2^{n+1} \mu^n} \sqrt{\frac{\pi}{\mu}},$$

$$n = 0, 1, 2, \dots,$$

(например, [23], 861.7) и равенствами

$$\int_{-\infty}^\infty p^{2n+1} \exp(-\mu p^2) dp = 0,$$

$$\begin{aligned} & \frac{\exp(-i\pi/4)}{2\sqrt{\pi\sigma}} \times \\ & \times \int_0^\infty \left(\exp\left(i\frac{(p-v)^2}{4\sigma}\right) + \exp\left(i\frac{(p+v)^2}{4\sigma}\right) \right) dp = \\ & = \frac{\exp(-i\pi/4)}{2\sqrt{\pi\sigma}} \int_{-\infty}^\infty \exp\left(i\frac{(p-v)^2}{4\sigma}\right) dp = 1, \\ & \frac{\exp(-i\pi/4)}{2\sqrt{\pi\sigma}} \times \\ & \times \int_0^\infty p^2 \left(\exp\left(i\frac{(p-v)^2}{4\sigma}\right) + \exp\left(i\frac{(p+v)^2}{4\sigma}\right) \right) dp = \\ & = \frac{\exp(-i\pi/4)}{2\sqrt{\pi\sigma}} \int_{-\infty}^\infty p^2 \exp\left(i\frac{(p-v)^2}{4\sigma}\right) dp = 2i\sigma + v^2. \end{aligned}$$

Таким образом, вклад первых двух членов (34) в асимптотику интеграла (20) имеет вид

$$U^{(0,2)} = v(-\tau') (1 + O(\sigma) + O(v^2)). \tag{35}$$

Поскольку $v(v - \tau') \approx v(-\tau')$ в рассматриваемой области (см. (33)), то выражение (35) соответствует множителю ослабления для продолжения падающей волны (14).

Обратимся к интегрированию третьего слагаемого в (34). Рассмотрим сначала интеграл, отвечающий I_- . Сделав замену переменных $p = \sqrt{2\sigma}\zeta \exp(-i\pi/4)$, перепишем его в виде

$$\begin{aligned} & \frac{\exp(-i\pi/4)}{2\sqrt{\pi\sigma}} \int_0^\infty p^3 \exp\left(i\frac{(p-v)^2}{4\sigma}\right) dp = \\ & = -\frac{2\sigma^{3/2}}{\sqrt{\pi}} \exp\left(i\frac{v^2}{4\sigma} - i\frac{\pi}{4}\right) \times \\ & \times \int_0^\infty \zeta^3 \exp\left(-\frac{\zeta^2}{2} + \zeta\frac{v}{\sqrt{2\sigma}} \exp\left(i\frac{\pi}{4}\right)\right) d\zeta = \\ & = -\Gamma(4) \frac{2\sigma^{3/2}}{\sqrt{\pi}} \exp\left(i\frac{v^2}{8\sigma} - i\frac{\pi}{4}\right) D_{-4}\left(-\frac{v}{\sqrt{2\sigma}} \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right)\right), \end{aligned}$$

где Γ – гамма-функция, $\Gamma(4) = 6$. Здесь мы воспользовались интегральным представлением для функции параболического цилиндра (см., например, [24]):

$$D_\mu(Z) = \frac{\exp(-Z^2/4)}{\Gamma(-\mu)} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{p^2}{2} - Zp\right) p^{-\mu-1} dp, \quad \mu < 0.$$

Выражение для интеграла, соответствующего I_+ , отличается лишь заменой v на $-v$.

Таким образом, вклад кубических по p членов в асимптотику U имеет вид

$$\begin{aligned} U^{(3)} = & -\frac{2v(-\tau')}{\sqrt{\pi}} \sigma^{3/2} \exp\left(i\frac{v^2}{8\sigma} - i\frac{\pi}{4}\right) \times \\ & \times \left[D_{-4}\left(\frac{v}{\sqrt{2\sigma}} \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right)\right) + D_{-4}\left(-\frac{v}{\sqrt{2\sigma}} \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right)\right) \right] \end{aligned} \quad (36)$$

и характеризует процесс слияния дифрагированной волны с продолжением падающей волны вблизи прямолинейного участка границы.

С помощью формул (35) и (36), учитывая (16), приходим к следующей асимптотической формуле для поля u в области III (см. рис. 2), характеризующейся неравенствами (23) и (33):

$$\begin{aligned} u = & \exp(ikx)v(-\tau') + \sqrt{\frac{2k}{\pi}} \frac{v(-\tau')}{a} x^{3/2} \times \\ & \times \exp\left(ikx + i\frac{z^2}{2} - i\frac{\pi}{4}\right) \times \\ & \times \left[D_{-4}\left(\sqrt{2z} \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right)\right) + D_{-4}\left(-\sqrt{2z} \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right)\right) \right]. \end{aligned} \quad (37)$$

Величина

$$z = \sqrt{\frac{kr}{2}} \varphi \approx \frac{v}{2\sqrt{\sigma}} \quad (38)$$

(см. (15)) типична для описания переходных зон – окрестностей предельных лучей – где происходит слияние волн различной природы. В рассматриваемой задаче предельный луч совпадает с плоской частью границы. На предельном луче $z = 0$. В той части области III, где выполнено неравенство (30), второе слагаемое в (37) описывает слияние краевой и плоской волн вблизи предельного

луча. Там же, где (30) не выполнено, этот член не поддается геометроакустической интерпретации, и его следует рассматривать как малую поправку к первому слагаемому – продолжению падающей волны. В Приложении проверяется, что формулы (31) и (37) сшиваются между собой в пересечении областей их применимости, т.е. в пересечении областей II и III.

5. ПОЛЕ ПРИ УМЕРЕННЫХ И БОЛЬШИХ ЗНАЧЕНИЯХ σ В СЛУЧАЕ ЖЕСТКОЙ ГРАНИЦЫ

Рассмотрим теперь области IV и V (см. рис. 2), где неравенство (23) не выполнено, т.е.

$$\sigma \geq 1, \quad (39)$$

и соответственно $1/4\sigma$ не является большим параметром в интегралах I_\pm (22). Сделаем замену переменных $p = \sqrt{v}\zeta$, тогда в фазах экспонент появляется множитель v/σ :

$$I_\pm = \frac{\sqrt{v} \exp(-i\pi/4)}{2\sqrt{\pi\sigma}} \times \int_0^\infty v(\sqrt{v}\zeta - \tau') \exp\left(i\frac{v}{4\sigma} (\zeta \pm \sqrt{v})^2\right) d\zeta. \quad (40)$$

Рассмотрим сначала такие значения v , что этот параметр велик:

$$v \gg \sigma, \quad \text{т.е. } \varphi \gg (ka)^{-1/3}, \quad (41)$$

и интегралы (40) допускают асимптотический анализ. Критические точки их фаз $p = \pm\sqrt{v}$ далеки от края интервала интегрирования.

Вклады краев интервалов интегрирования в интегралы (40) находятся так же, как в п. 4.1. Их сумма снова дается выражением (25), с той лишь разницей, что поправочный член $O(\sigma/v^2)$ заменяется на $O(\sigma/v)$. Оно сшивается с множителем ослабления для краевой волны (9) в области, где выполнено (27).

Критическая точка $\zeta = -\sqrt{v}$ фазы лежит вне интервала интегрирования далеко от края, а критическая точка фазы $\zeta = \sqrt{v}$ лежит в области, где $v(\sqrt{v}\zeta - \tau')$ экспоненциально мало, и потому их вклады в I_\pm экспоненциально малы. Н.Я. Кирпичникова и В.Б. Филиппов в [6] отмечали родство этого малого члена в асимптотике I_- с продолжением волны шепчущей галереи.

Таким образом, согласно (21) и (16), в области IV, характеризующейся неравенствами (39) и (41), волновое поле u в главном порядке сводится к краевой волне с дифракционным коэффициентом (32).

Теперь обратимся к окрестности плоской части границы V , где неравенство (41) не выполняется. Там интегралы (40), а вместе с ними и множитель ослабления (20), не допускают асимптотического упрощения. Соответствующая волна убывает с ростом x :

$$|U \exp(ikx)| < \frac{\text{const}}{\sqrt{\sigma}} = \frac{\text{const}}{(ka/2)^{1/6} \sqrt{x/a}}. \quad (42)$$

С ростом y убывание ускоряется за счет осциллирующий экспонент в (40).

6. СЛУЧАЙ МЯГКОЙ ГРАНИЦЫ (3)

Исследование поля для мягкой границы (3) вполне аналогично рассмотрению пп. 4 и 5, и мы изложим его более кратко.

Падающая волна шепчущей галереи имеет теперь вид [18, 16]

$$u^{\text{inc}} = \exp(iks - i\sigma\tau)v(v - \tau),$$

где $-\tau > 0$ – один из первых корней функции Эйри, $v(-\tau) = 0$. Буквальное повторение рассуждений пункта 3 приводит к задаче Коши для уравнения (17) при $\sigma > 0$ с условиями

$$U|_{v=0} = 0, \quad U|_{\sigma=0} = v(v - \tau).$$

С помощью функции Грина задачи Дирихле

$$G = \frac{\exp(-i\pi/4)}{2\sqrt{\pi\sigma}} \left(\exp\left(i\frac{(p-v)^2}{4\sigma}\right) - \exp\left(i\frac{(p+v)^2}{4\sigma}\right) \right)$$

(см., например, [7]) для соответствующего множителя ослабления получается:

$$U = \frac{\exp(-i\pi/4)}{2\sqrt{\pi\sigma}} \int_0^\infty v(p - \tau) \times \left(\exp\left(i\frac{(p-v)^2}{4\sigma}\right) - \exp\left(i\frac{(p+v)^2}{4\sigma}\right) \right) dp = I_- - I_+. \quad (43)$$

Здесь I_\pm отличаются от I_\pm в (22) заменой τ' на τ . Вклады критических точек в асимптотику интеграла (43) находятся совершенно аналогично, а вычисление вклада от краевой точки несколько модифицируется.

6.1. Поле при малых значениях σ

Исследуем выражение (43) в области, где выполнено (23) и в фазах экспонент стоит большой параметр $1/\sigma$.

6.1.1. Область, где критические точки фаз далеки от края интервала интегрирования. Рассмотрим вклад края в I_- . Теперь для получения главного члена интегрировать по частям приходится пять раз. В результате элементарного, но длинного вычисления, использующего выражение старших

производных v через v и v' и учитывающего, что $v(-\tau) = 0$, приходим к аналогу формулы (24):

$$I_-^{\text{end}} = \frac{\exp(iv^2/4\sigma - i\pi/4)}{2\sqrt{\pi\sigma}} \left[-4\sigma^2 \frac{v'(-\tau)}{v^2} + 24i\sigma^3 \frac{v'(-\tau)}{v^4} - 8\sigma^4 v'(-\tau) \left(\frac{2\tau}{v^4} - \frac{9}{v^6} \right) - 64i\sigma^5 v'(-\tau) \left(\frac{1}{v^5} - \frac{5\tau}{v^6} + \frac{69}{v^8} \right) + O(\sigma^6) \right]. \quad (44)$$

Выражение для вклада I_+^{end} точки $p = 0$ в интеграл I_+ отличается заменой v на $-v$. В правых частях I_-^{end} и I_+^{end} слагаемые, содержащие четные степени v , одинаковы, и поэтому при подстановке в формулу (43) сокращаются. Следовательно, вклад точки $p = 0$ в U получается в результате удвоения единственного выписанного в (44) слагаемого с нечетной степенью v и имеет вид

$$I_-^{\text{end}} - I_+^{\text{end}} = -2v'(-\tau) \left(\frac{2\sigma}{v} \right)^5 \frac{\exp(iv^2/4\sigma + i\pi/4)}{\sqrt{\pi\sigma}} \left(1 + O\left(\frac{\sigma}{v^2}\right) \right).$$

Поправочные члены малы в области, где выполнено неравенство (26).

Критическая точка $p = -v$ фазы интеграла I_+ лежит вне интервала интегрирования и вклада не дает. При не слишком больших значениях v вклад критической точки $p = v$ фазы интеграла I_- равен

$$I_-^{\text{cr}} = v(v - \tau) \left(1 + O(\sigma v) + (\sigma^2/v) \right).$$

Поправочные члены малы в области, характеризующейся неравенствами (23), (26) и (28). При больших значениях v критическая точка дает экспоненциально малый вклад в поле. Как и в п. 4.1.2, мы получили описание проникновения падающей волны в область I.

Волновое поле в пересечении областей I и II, где выполнены неравенства (10), (23), (26) и (30), снова оказывается суммой дифрагированной краевой волны и продолжения падающей волны:

$$u \approx \exp(ikx)v \left((2k^2/a)^{1/3} y - \tau \right) + A(\varphi; k) \frac{\exp(ikr)}{\sqrt{kr}}. \quad (45)$$

Дифракционный коэффициент имеет теперь вид

$$A(\varphi; k) \approx -2v'(-\tau) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{2}{ka} \right)^{4/3} \frac{\exp(i\pi/4)}{\varphi^5}. \quad (46)$$

В отличие от задачи с жесткой границей (и от многих других задач дифракции на скачке кривизны [4, 5, 9–12]), в случае мягкой границы дифракционный коэффициент (46) пропорционален нецелой степени амплитуды скачка кривизны $1/a$. Отметим, что дифракционный коэффициент,

полученный в [8] для задачи о рассеянии волны соскальзывания на распрямляющейся мягкой границе, содержит те же степени φ и ka (но другую функцию Эйри).

В той части области I, где φ не мало, асимптотика волнового поля дается выражением

$$u \approx \exp(ikx)v\left(\left(2k^2/a\right)^{1/3}y - \tau\right) - 2v'(-\tau)\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{2}{ka}\right)^{4/3}\frac{x^5 \exp(ikx +iky^2/2x + i\pi/4)}{y^5 \sqrt{kx}}.$$

Как и в п. 4.1.3, фон, описываемый вторым слагаемым, не интерпретируется как краевая волна. В той части области I, где $y \lesssim a^{1/3}/k^{2/3}$, он является малой поправкой к продолжению падающей волны.

6.1.2. Область, где критические точки фаз близки к краю интервала интегрирования. Теперь обратимся к области III, характеризуемой неравенствами (23) и (33), и критические точки фаз сливаются с краевой точкой. Разложение (34) заменяется на

$$v(p - \tau) = v'(-\tau)p - \tau v'(-\tau)p^3/6 + v'(-\tau)p^4/12 + O(p^5).$$

Действуя, как в п. 4.2, приходим к следующей формуле для поля:

$$u \approx v'(-\tau)\left(k^2/2a\right)^{1/3}y \exp(ikx) + 4\sqrt{\frac{2}{\pi}}v'(-\tau)\left(\frac{4k}{a^2}\right)^{2/3}x^2 \exp\left(ikx + i\frac{z^2}{2}\right) \times \left[D_{-5}\left(\sqrt{2z} \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right)\right) - D_{-5}\left(-\sqrt{2z} \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right)\right)\right]. \quad (47)$$

Здесь величина z определена в (38). В пересечении областей II и III, где одновременно выполнены неравенства (26) и (33), выражения (47) и (45) сшиваются, см. Приложение.

6.2. Поле при умеренных и больших значениях σ

Пусть теперь σ не мало. Точно так же, как в п. 5, получим, что в области IV, характеризуемой неравенствами (30) и (41), волновое поле в главном порядке является краевой волной (9) с дифракционным коэффициентом (46). Вблизи границы, в области V, выражение (43) для множителя ослабления не упрощается. Как и в случае жесткой границы, для интенсивности поля справедлива оценка (42).

7. ВЫВОДЫ

В рамках корректного метода параболического уравнения мы рассмотрели волновое поле в окрестности точки O справа от нее. Полученные

выше результаты можно качественно сформулировать следующим образом.

Часть волнового поля допускает геометроакустическую интерпретацию — это краевая волна, излучаемая из точки O , и продолжение волны шепчущей галереи правее точки O , сливающиеся вблизи прямолинейного участка границы. Кроме того, вблизи оси y присутствует не допускающий такой интерпретации слабый фон, имеющий меньший порядок относительно большого параметра задачи.

При $x = 0$ поле совпадает с падающей волной шепчущей галереи. Она продолжается с фазовым множителем $\exp(ikx)$ в область I, находящуюся непосредственно правее точки O , экспоненциально ослабевая при удалении от границы. Выделившаяся в области II из фона краевая волна становится в области IV главным членом асимптотики поля.

Вблизи плоской части границы происходит слияние краевой волны и продолжения падающей волны. В области III волновое поле выражается через необычные для теории дифракции функции параболического цилиндра: D_{-4} в случае жесткой границы и D_{-5} в случае мягкой границы. На больших расстояниях от O , в области V, поле сводится к убывающему с ростом x фону, не допускающему ясной геометроакустической интерпретации.

Таким образом, мы детально описали коротковолновую асимптотику поля малоизученной эталонной дифракционной задачи в окрестности особой точки границы.

Волновые поля в других областях, в частности, краевую волну при немалых значениях φ , можно, как это намеревались делать авторы [6], найти с помощью формулы Грина.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, грант No 22-21-00557.

ПРИЛОЖЕНИЕ

СШИВАНИЕ ВЫРАЖЕНИЙ (31) И (37)

Покажем, что для жесткой границы в пересечении областей II и III, где одновременно выполнены неравенства (23), (33) и (26), асимптотические формулы для поля (31) и (37) согласуются между собой. Там величина z велика, см. (38) и (26), и функции параболического цилиндра можно заменить их асимптотиками (см., например, [24]) — первую по формуле

$$D_{\mu}(Z) = Z^{\mu} \exp\left(-\frac{Z^2}{4}\right) \left(1 + O\left(\frac{1}{|Z|^2}\right)\right), |Z| \rightarrow \infty, (A1)$$

применимой для Z , лежащих в секторе $-3\pi/4 < \arg Z < 3\pi/4$, вторую – по формуле

$$D_{\mu}(Z) = \left(Z^{\mu} \exp\left(-\frac{Z^2}{4}\right) - \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-\mu)} Z^{-\mu-1} \times \right. \\ \left. \times \exp\left(\frac{Z^2}{4} + i\mu\pi\right) \right) \left(1 + O\left(\frac{1}{|Z|^2}\right) \right), \quad |Z| \rightarrow \infty, \quad (\text{A2})$$

пригодной для Z , лежащих в секторе $\pi/4 < \arg Z < 5\pi/4$.

С помощью (A1) и (A2) находим асимптотику второго слагаемого в (37):

$$-\sqrt{\frac{2k}{\pi}} \frac{v(-\tau')}{a} x^{3/2} \exp\left(ikx + i\frac{z^2}{2} - i\frac{\pi}{4}\right) \times \\ \times \left[D_{-4}\left(\sqrt{2}z \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right)\right) + D_{-4}\left(-\sqrt{2}z \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right)\right) \right] \approx \\ \approx 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{v(-\tau') \exp\left(ikx + ikr\varphi^2/2 - i\pi/4\right)}{ka\varphi^4 \sqrt{kr}} + \\ + \frac{v(-\tau')}{3a} k^2 r^3 \varphi^3 \exp(ikx).$$

Фаза первого слагаемого в рассматриваемой области близка к фазе краевой волны, см. (15), а его амплитудный множитель в точности таков, что оно переходит в краевую волну, см. (32). Второе слагаемое имеет вид малой поправки к продолжению падающей волны – первому слагаемому в (37).

Итак, (37) принимает вид

$$u \approx \exp(ikx)v(-\tau') + A(\varphi; k) \frac{\exp(ikr)}{\sqrt{kr}}, \quad (\text{A3})$$

где A оказывается совпадающим с (32). Таким образом, учтя, что при условии (33) $v(v - \tau') \approx v(-\tau')$, мы установили, что выражение (A3) сшивается с (31).

Сшивание возникающих в случае мягкой границы выражений (45) и (47) прослеживается точно так же.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Weston V.H.* The effect of a discontinuity in curvature in high-frequency scattering // IRE Trans. Antennas Propag. 1962. V. 10 (6). P. 775–780.
2. *Weston V.H.* Effect of a discontinuity of curvature in high-frequency scattering, Part II // IRE Trans. Antennas Propag. 1965. V. 13 (4). P. 611–613.
3. *Попов А.В.* Обратное рассеяние от линии разрыва кривизны // Тр. V Всес. симпоз. по дифр. и распр. волн. Л.: Наука, 1971. С. 171–175.
4. *Kaminetzky L., Keller J.B.* Diffraction coefficients for higher order edges and vertices // SIAM J. Appl. Math. 1972. V. 22 (1). P. 109–134.
5. *Rogoff Z.M., Kiselev A.P.* Diffraction at jump of curvature on an impedance boundary // Wave Motion. 2001. V. 33. № 2. P. 183–208.
6. *Кирпичникова Н.Я., Филиппов В.Б.* Поведение поверхностных волн при переходе через линию сопряжения на границе упругого однородного изотропного тела // Зап. научн. сем. ПОМИ. 1995. Т. 230. С. 86–102.
7. *Кирпичникова Н.Я., Филиппов В.Б.* Дифракция волнны шепчущей галереи вблизи линии разрыва кривизны // Зап. научн. сем. ПОМИ. 1997. Т. 239. С. 95–109.
8. *Филиппов В.Б., Кирпичникова Н.Я.* Краевая волна в задаче дифракции на границе с разрывом кривизны // Зап. научн. сем. ПОМИ. 1998. Т. 250. С. 274–287.
9. *Zlobina E.A., Kiselev A.P.* Boundary-layer approach to high-frequency diffraction by a jump of curvature // Wave Motion. 2020. V. 96. 102571.
10. *Злобина Е.А.* Коротковолновая дифракция на контуре с негладкой кривизной. Пограничный подход // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2020. Т. 493. С. 169–185.
11. *Злобина Е.А., Киселев А.П.* Переходная зона в высокочастотной задаче дифракции на импедансной границе со скачком кривизны. Метод Кирхгофа и метод пограничного слоя // Радиотехника и электроника. 2022. Т. 67. С. 130–139.
12. *Zlobina E.A., Kiselev A.P.* A.V. Popov's diffraction problem revisited // arXiv preprint arXiv:2206.05444. – 2022.
13. *Попов М.М.* К задаче о волнах шепчущей галереи в окрестности простого нуля эффективной кривизны границы // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1976. Т. 62. С. 197–206.
14. *Smyshlyaev V.P., Kamotski I.V.* Searchlight asymptotics for high-frequency scattering by boundary inflection // Алгебра и анализ. 2021. Т. 33. № 2. С. 275–297.
15. *Фок В.А.* Проблемы дифракции и распространения волн. М.: Наука, 1975. 517 с.
16. *Бабич В.М., Кирпичникова Н.Я.* Метод пограничного слоя в задачах дифракции. Л.: Изд. ЛГУ, 1974. 124 с.
17. *Шендеров Е.Л.* Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение, 1972. 352 с.
18. *Бабич В.М., Булдырев В.С.* Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. Метод эталонных задач. М.: Наука, 1972. 456 с.
19. *Боровиков В.А., Кинбер Б.Е.* Геометрическая теория дифракции. М.: Связь, 1978. 247 с.
20. *Попов А.В.* Метод поперечной диффузии в задаче о дифракции звука на ленте // Акуст. журн. 1973. Т. 19. Вып. 4. С. 594–600.
21. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Квантовая механика. М.: Физматгиз, 1963. 702 с.
22. *Эрдейи А.* Асимптотические разложения. М.: Физматлит, 1962. 130 с.
23. *Двайт Г.Б.* Таблицы интегралов и другие математические формулы. М.: Наука, 1966. 228 с.
24. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М.: Наука, 1973. 296 с.