

УДК 534.2

## ГЕНЕРАЦИЯ АКУСТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ РАЗНОСТНОЙ ЧАСТОТЫ В ДИФРАГИРУЮЩЕМ ПУЧКЕ ВОЛН НАКАЧКИ В КВАЗИЛИНЕЙНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

© 2023 г. А. В. Тюрина<sup>а</sup>, \*, П. В. Юлдашев<sup>а</sup>, И. Б. Есипов<sup>б</sup>, В. А. Хохлова<sup>а</sup>

<sup>а</sup>Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Физический факультет,  
Ленинские горы, ГСП-1, Москва, 119991 Россия

<sup>б</sup>Российский государственный университет нефти и газа им. И.М. Губкина,  
Ленинский проспект 65, Москва, 119991 Россия

\*e-mail: tiurina.av@physics.msu.ru

Поступила в редакцию 08.05.2022 г.

После доработки 19.09.2022 г.

Принята к публикации 22.09.2022 г.

Рассматривается квазилинейный подход к описанию генерации акустической волны разностной частоты, формируемой при взаимодействии двух близких по частоте интенсивных высокочастотных дифрагирующих пучков волн накачки. Граничное условие соответствует двухчастотному возбуждению существующего параметрического излучателя для подводных исследований. Показано, что линейное поле первичных волн имеет узкую направленность с полным углом расхождения пучка около нескольких градусов, поэтому нелинейная дифракционная задача решалась численно в параболическом приближении. Поле волн накачки рассчитывалось в линейном приближении; полученные решения на каждом шаге численной сетки вдоль оси пучка использовались для расчета нелинейных источников при описании трехмерного пучка разностной частоты. Проанализированы одномерные и двумерные распределения поля давления и диаграммы направленности для трех значений разностной частоты. Полученные численные решения с реалистичными граничными условиями и описанием дифракционных эффектов сравниваются с известными приближенными аналитическими результатами, полученными в квазилинейном приближении.

*Ключевые слова:* разностная частота, квазилинейное приближение, дифракция

DOI: 10.31857/S0320791922600275, EDN: DAKTTI

### ВВЕДЕНИЕ

Параметрические процессы генерации низкочастотного излучения остаются ключевой областью современных акустических исследований, что связано с важностью их практических приложений как в задачах подводной акустики для акустической томографии морских вод [1–3], так и в задачах воздушной акустики для возбуждения высоконаправленного слышимого звука в воздухе [4–6].

Генерация низкочастотного излучения происходит при взаимодействии в нелинейной среде двух близких по частоте высокочастотных первичных волн, которое сопровождается каскадным процессом образования волн новых частот. Поскольку поглощение акустических волн увеличивается с ростом частоты, то при распространении от излучателя высокочастотные составляющие нелинейного волнового поля постепенно затухают, и на больших расстояниях в среде остается только волна разностной частоты [7, 8]. Основным недостатком такого параметрического возбуждения волны разностной частоты является

низкая эффективность преобразования в нее энергии от волн накачки, поэтому долгое время эта тема оставалась за рамками практических применений. Однако при этом использование параметрических эффектов имеет ряд существенных преимуществ [9], таких как возможность создания узконаправленных широкополосных излучателей, диаграмма направленности которых не содержит боковых лепестков, а сами они имеют небольшие волновые размеры. Интерес к исследованиям в этой области в гидроакустике [3, 10] и аэроакустике [11, 12] по-прежнему не уменьшается.

При описании процессов генерации и распространения волны разностной частоты достаточно полной моделью является однонаправленное уравнение Вестервельта [7, 13], которое учитывает эффекты нелинейности, дифракции и термовязкого поглощения. Это уравнение в полной трехмерной постановке может быть решено численно методом расщепления по физическим факторам [14, 15], в котором для каждого оператора, входящего в уравнение, применяются свои

конечно-разностные схемы. Во многих практических задачах при расчете полей параметрических излучателей возможно использование параксиального приближения, и в этом случае применяется более простое уравнение Хохлова–Заболотской–Кузнецова (ХЗК) [16], для решения которого разработаны эффективные численные алгоритмы как в частотном, так и во временном и комбинированных представлениях [17–20]. Для расчетов параметрических излучателей существует также целый класс приближенных полуаналитических решений, использующих дополнительные приближения при постановке граничных условий, описании геометрии расходимости пучков, длины взаимодействия, нелинейных и дифракционных эффектов для волн накачки [21–23]. Широкий класс моделей при этом использует приближение заданного поля волн накачки или квазилинейности [8, 24, 25].

В данной работе также используется квазилинейный подход как необходимый шаг в разработке полной трехмерной численной модели нелинейно-дифракционного описания параметрических взаимодействий на основе уравнений Вестервельта и ХЗК. Однако при этом, в отличие от существующих методов, используется реалистичное граничное условие для высокочастотных волн накачки, соответствующее работе недавно разработанной подводной параметрической антенны [26]. Численно моделируется процесс генерации волны разностной частоты в свободном поле при учете дифракции по обоим координатам, поперечным выделенному направлению распространения волн. Пучки волн накачки рассчитываются в линейном приближении; полученные решения на каждом шаге численной сетки вдоль оси пучка используются для расчета нелинейных источников при описании трехмерного поля разностной частоты. Разработанный квазилинейный подход будет в дальнейшем расширен на решение полной трехмерной нелинейно-дифракционной задачи с использованием разработанного в предыдущей работе авторов оптимизированного спектрального алгоритма, позволяющего существенно сократить количество операций при вычислении нелинейного оператора [27].

### ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ МЕТОД

Запишем уравнение Вестервельта, описывающее направленное распространение нелинейной акустической волны, в сопровождающей системе координат [7]:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial \tau \partial z} = \frac{c_0}{2} \left( \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right) + \frac{\delta}{2c_0^3} \frac{\partial^3 p}{\partial \tau^3} + \frac{\beta}{2c_0^3 \rho_0} \frac{\partial^2 p^2}{\partial \tau^2}, \quad (1)$$

где  $p$  – акустическое давление,  $z$  – выделенное направление вдоль оси пучка,  $\tau = t - z/c_0$  – время в

бегущей системе координат,  $c_0$  – скорость звука,  $\rho_0$  – плотность среды,  $\beta$  и  $\delta$  – коэффициенты нелинейности и термовязкого поглощения в среде, соответственно.

В случае линейного распространения волны, генерируемой плоским двухчастотным ультразвуковым излучателем в однородной среде с диссипацией, решение линеаризованного уравнения Вестервельта (1) можно записать в виде интеграла Рэлея [28, 29] с комплексным значением волнового числа  $k_{1,2} = \omega_{1,2}/c_0 + ik_{1,2}''$ :

$$P_{1,2}(\mathbf{r}) = -\frac{i\omega_{1,2}\rho_0}{2\pi} \int \frac{V_{1,2}^n(\mathbf{r}') e^{ik_{1,2}''|\mathbf{r}'-\mathbf{r}|}}{|\mathbf{r}'-\mathbf{r}|} dS'_{1,2}, \quad (2)$$

где  $P_{1,2}(\mathbf{r})$  – комплексные амплитуды давления волн накачки,  $p_{1,2} = \frac{1}{2}P_{1,2}(\mathbf{r})\exp(-i\omega_{1,2}\tau) + \text{к.с.}$  – распределение действительного поля давления с циклическими частотами  $\omega_{1,2} = 2\pi f_{1,2}$ ,  $k_{1,2} = \omega_{1,2}/c_0 + ik_{1,2}''$  – волновые числа,  $k_{1,2}''$  – коэффициенты затухания,  $V_{1,2}^n(\mathbf{r}')$  – комплексные амплитуды нормальных компонент колебательной скорости  $v_{1,2}^n = \frac{1}{2}V_{1,2}^n(\mathbf{r}')\exp(-i\omega_{1,2}\tau) + \text{к.с.}$  на поверхности излучателя,  $\mathbf{r}'$  – радиус-вектор на поверхности излучателя,  $\mathbf{r}$  – радиус-вектор в точке наблюдения,  $S'_{1,2}$  – области интегрирования, представляющие собой поверхности элементов, излучающих на частотах  $\omega_{1,2}$  [26]. В случае равномерного распределения колебательной скорости  $V_n(\mathbf{r}') = v_0$  – действительная величина, а  $v_0$  и  $p_0 = v_0\rho_0c_0$  – характерные величины амплитуд колебательной скорости и давления вблизи излучателя.

Если, как будет показано ниже, поле высокочастотных волн накачки, генерируемое рассматриваемым излучателем и рассчитанное с помощью интеграла Рэлея (2), имеет узкую направленность с полным углом расхождения в дальнем поле порядка нескольких градусов, то от уравнения Вестервельта (1) можно перейти к более простому для численного решения нелинейному параболическому уравнению ХЗК [16]:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial \tau \partial z} = \frac{c_0}{2} \left( \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right) + \frac{\delta}{2c_0^3} \frac{\partial^3 p}{\partial \tau^3} + \frac{\beta}{2c_0^3 \rho_0} \frac{\partial^2 p^2}{\partial \tau^2}. \quad (3)$$

В рамках квазилинейного подхода решение уравнения (3) будем искать методом последовательных приближений [8, 24] в виде  $p = p_A + p_B$ , где  $p_A = \frac{1}{2}P_{\text{pump1}}(x, y, z)\exp(-i\omega_{\text{pump1}}\tau) + \frac{1}{2}P_{\text{pump2}}(x, y, z)\exp(-i\omega_{\text{pump2}}\tau) + \text{к.с.}$  – линейное поле волн накачки, представляющее собой сумму двух гармонических волн с частотами  $f_{\text{pump1}} = \omega_{\text{pump1}}/2\pi$  и  $f_{\text{pump2}} = \omega_{\text{pump2}}/2\pi$  и комплексными амплитудами давления  $P_{\text{pump1}}(x, y, z)$  и  $P_{\text{pump2}}(x, y, z)$ , а  $p_B$  – малая поправка, включающая в себя поле суммарной и вторых гармоник, а также поле волны разностной частоты  $\frac{1}{2}P_{\text{dif}}(x, y, z)\exp(-i\omega_{\text{dif}}\tau) + \text{к.с.}$  с частотой

$f_{\text{dif}} = |f_{\text{pump1}} - f_{\text{pump2}}| = \omega_{\text{dif}}/2\pi$ . В этом случае комплексные амплитуды давления волн накачки удовлетворяют линейному уравнению:

$$\frac{\partial P_{\text{pump1,2}}}{\partial z} = \frac{ic_0}{2\omega_{\text{pump1,2}}} \times \left( \frac{\partial^2 P_{\text{pump1,2}}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_{\text{pump1,2}}}{\partial y^2} \right) - \frac{\delta\omega_{\text{pump1,2}}^2}{2c_0^3} P_{\text{pump1,2}}, \quad (4)$$

а амплитуда давления волны разностной частоты – линейному уравнению с заданным источником:

$$\frac{\partial P_{\text{dif}}}{\partial z} = \frac{ic_0}{2\omega_{\text{dif}}} \left( \frac{\partial^2 P_{\text{dif}}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_{\text{dif}}}{\partial y^2} \right) - \frac{\delta\omega_{\text{dif}}^2}{2c_0^3} P_{\text{dif}} - \frac{i\beta\omega_{\text{dif}}}{2c_0^3} P_{\text{pump2}}^* P_{\text{pump1}}. \quad (5)$$

### ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Моделирование поля волны разностной частоты (5) проводилось на примере параметров недавно разработанной подводной параметрической антенны эллипсовидной формы (рис. 1) с полосовой структурой распределения излучающих элементов для каналов разных частот по поверхности [26]. Одна половина прямоугольных по форме элементов излучает на фиксированной частоте  $f_{\text{pump1}} = 150$  кГц, вторая половина – на меняющейся в диапазоне 135–145 кГц частоте  $f_{\text{pump2}}$ . Форма излучателя представляет собой эллипс с осями  $L = 318$  мм и  $D = 188.5$  мм, при этом его больший размер ориентирован вертикально. Антенна состоит из 544 элементов размером  $a \times b = 4 \times 20$  мм с зазором  $h = 0.5$  мм между ними и 4 неактивных областей размером  $m \times n = 9.5 \times 6$  мм.

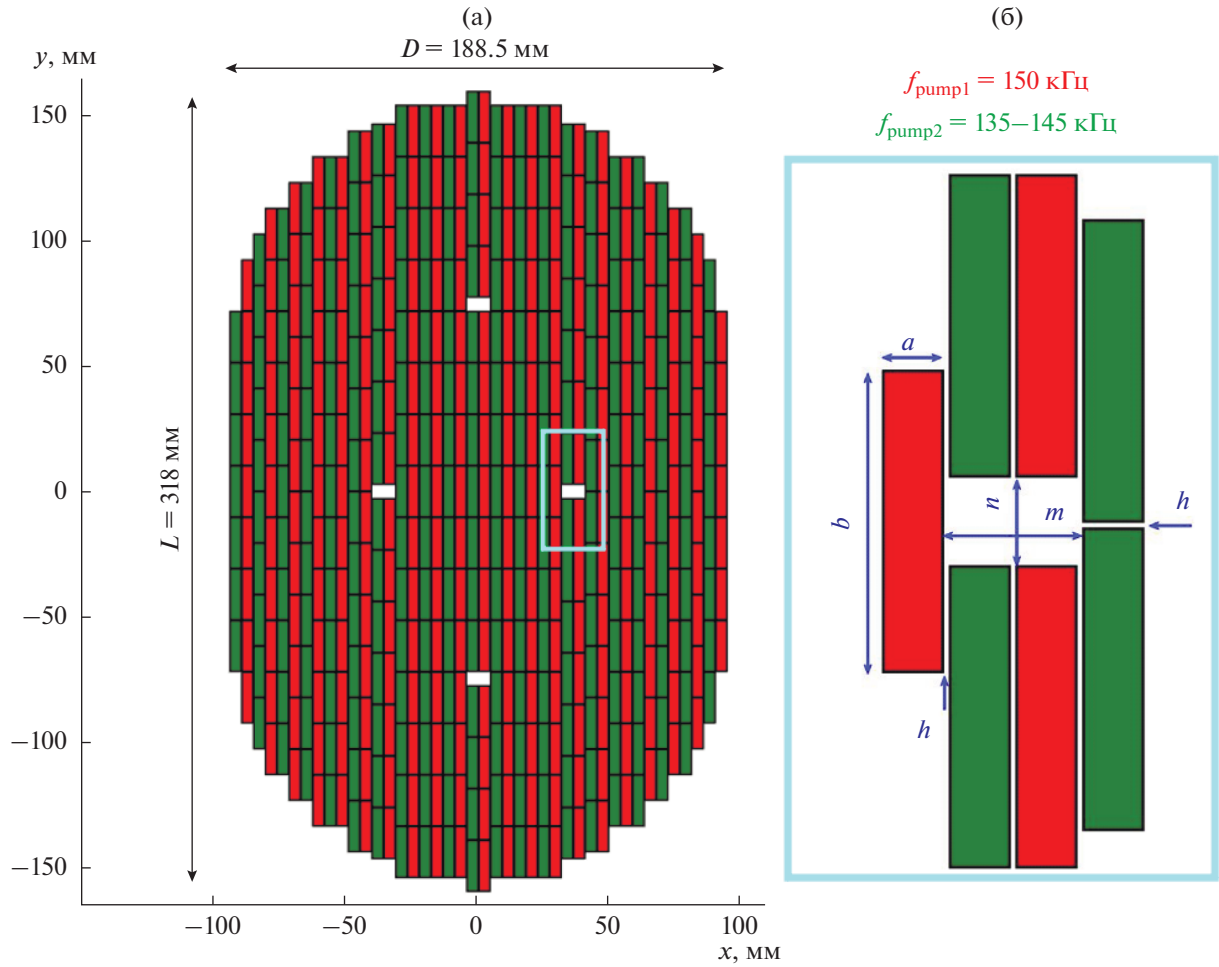
При расчете интеграла Рэлея (2) для каждой из волн накачки предполагалось постоянство при  $z = 0$  компоненты колебательной скорости, перпендикулярной поверхности элементов, т.е. направленной вдоль оси  $z$ . Граничное условие в численном моделировании параболических уравнений (4) и (5) задавалось для комплексной амплитуды давления, при этом пересчет распределения скорости в распределение давления происходил следующим образом. Вначале рассчитывался двумерный пространственный спектр  $S_V(k_x, k_y)$  с пространственными частотами  $k_x$  и  $k_y$  в обоих поперечных направлениях для заданного равномерного распределения колебательной скорости. Так как антенна представляет собой совокупность прямоугольных элементов, то для каждого прямоугольника может быть получено аналитическое выражение  $S_{V,n}(k_x, k_y) = -ab/(4\pi^2) \text{sinc}(k_x a/2) \text{sinc}(k_y b/2)$ , где  $n$  – номер прямоугольника, при этом полный спектр  $S_V(k_x, k_y)$  рассчитывался как сумма вкладов от отдельных прямоугольных элементов с учетом их геометрического расположения. Из линеаризованно-

го уравнения Эйлера  $\partial V/\partial t = (-1/\rho_0)\partial p/\partial z$  следует соотношение для пространственных спектров давления и  $z$ -компоненты колебательной скорости каждого прямоугольного элемента,  $S_{p,n}(k_x, k_y) = \omega\rho_0 S_{V,n}(k_x, k_y)/(k^2 - k_x^2 - k_y^2)^{1/2}$ , что позволяет найти полный спектр  $S_p(k_x, k_y)$ . Далее, полученное граничное условие для компонент углового спектра  $S_p(k_x, k_y)$  фильтровалось с помощью пространственного фильтра, ограничивающего компоненты с пространственной частотой выше  $0.7k_{\text{max}}$ , где  $k_{\text{max}}$  – соответствующее максимальное волновое число для каждой из волн накачки. Такая фильтрация высоких пространственных частот позволяет сгладить резкие градиенты в начальном пространственном распределении поля давления, полученном с помощью обратного двумерного преобразования Фурье, и уменьшить ошибки использования параболического приближения при описании компонент поля, распространяющихся под большими углами относительно оси пучка. На рис. 2 представлены сглаженные такой фильтрацией распределения амплитуд давлений  $|P_{\text{pump1,2}}|/p_0$  волн накачки на примере частот  $f_{\text{pump1}} = 150$  кГц и  $f_{\text{pump2}} = 145$  кГц.

В качестве параметров среды и величины начального давления использовались данные из экспериментов, выполненных с подводной параметрической антенной:  $p_0 \leq 0.6$  МПа,  $c_0 = 1502.25$  м/с,  $\rho_0 = 996.81$  кг/м<sup>3</sup> [26] и характерные для морской воды параметры нелинейности  $\beta = 3.5$  и поглощения  $\delta = 4.42 \times 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с [31]. Стоит отметить, что в эксперименте при амплитудах давления  $p_0$  порядка 0.6 МПа реализовывался близкий к разрывному нелинейный режим работы антенны, так как характерная длина образования разрыва  $l_{\text{sh}} = \rho_0 c_0^3 / (\beta \omega_{\text{pump1}} p_0)$  в этом случае составляет 1.7 м [27], в то время как характерные длины дифракции для размеров решетки вдоль осей  $x$  и  $y$  составляют соответственно  $l_{d,x} = \omega_{\text{pump1,2}}(D/2)^2/(2c_0) = 2.8$  и  $2.7$  (2.6, 2.5) м,  $l_{d,y} = \omega_{\text{pump1,2}}(L/2)^2/(2c_0) = 7.9$  и  $7.7$  (7.4, 7.1) м для волн накачки с частотами  $f_{\text{pump1}} = 150$  кГц и  $f_{\text{pump2}} = 145$  (140, 135) кГц. Поэтому для возможности использования квазилинейного приближения дальнейшее моделирование проводилось для амплитуды давления  $p_0 = 0.06$  МПа, которая в 10 раз меньше, чем максимально достижимая в эксперименте.

### ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ

Рассмотрим три случая, когда частоты волн накачки кратны разностной частоте и  $f_{\text{pump1}} > f_{\text{pump2}}$ , т.е.  $f_{\text{pump1}} = m f_{\text{dif}}$  и  $f_{\text{pump2}} = (m-1) f_{\text{dif}}$ . Тогда уравнения (4), (5) для комплексных амплитуд давления волн накачки  $P_{\text{pump1}}(x, y, z)$ ,  $P_{\text{pump2}}(x, y, z)$  и волны разностной частоты  $P_{\text{dif}}(x, y, z)$  записываются так:



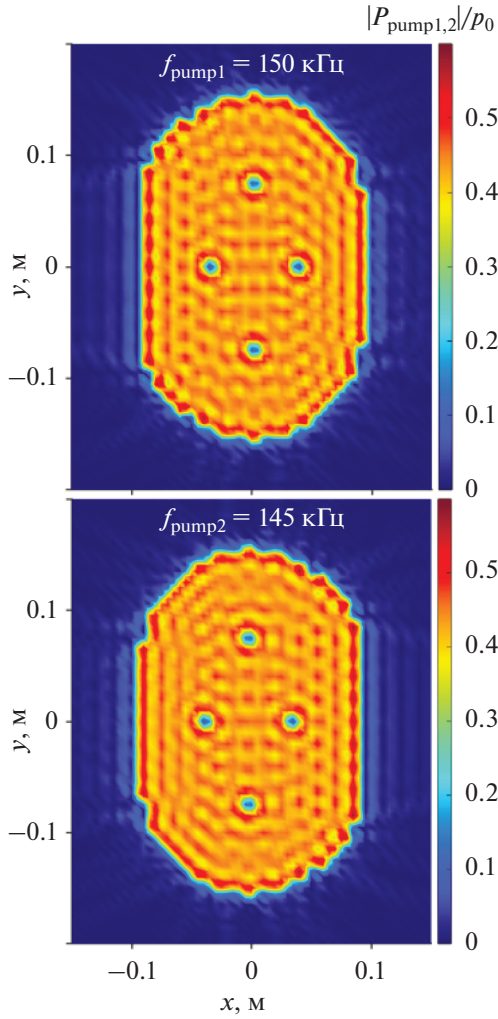
**Рис. 1.** (а) – Геометрия эллипсовидного излучателя с осями  $L = 318$  мм и  $D = 188.5$  мм полосовой структуры, излучающего волны накачки на двух частотах: фиксированной частоте  $f_{\text{pump1}} = 150$  кГц (соответствующие элементы излучателя отмечены красным) и переменной частоте  $f_{\text{pump2}} = 135-145$  кГц (соответствующие элементы излучателя отмечены зеленым). Антенна состоит из 544 элементов размером  $a \times b = 4 \times 20$  мм с зазором  $h = 0.5$  мм между ними и 4 неактивных областей размером  $m \times n = 9.5 \times 6$  мм. (б) – Схема излучателя вблизи одной из неактивных областей.

$$\begin{cases} \frac{\partial P_{\text{pump1}}}{\partial z} = \frac{ic_0}{2m\omega_{\text{dif}}} \left( \frac{\partial^2 P_{\text{pump1}}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_{\text{pump1}}}{\partial y^2} \right) - \frac{\delta m^2 \omega_{\text{dif}}^2}{2c_0^3} P_{\text{pump1}}, \\ \frac{\partial P_{\text{pump2}}}{\partial z} = \frac{ic_0}{2(m-1)\omega_{\text{dif}}} \left( \frac{\partial^2 P_{\text{pump2}}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_{\text{pump2}}}{\partial y^2} \right) - \frac{\delta(m-1)^2 \omega_{\text{dif}}^2}{2c_0^3} P_{\text{pump2}}, \\ \frac{\partial P_{\text{dif}}}{\partial z} = \frac{ic_0}{2\omega_{\text{dif}}} \left( \frac{\partial^2 P_{\text{dif}}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_{\text{dif}}}{\partial y^2} \right) - \frac{\delta \omega_{\text{dif}}^2}{2c_0^3} P_{\text{dif}} - \frac{i\beta \omega_{\text{dif}}}{2c_0^3 \rho_0} P_{\text{pump1}} P_{\text{pump2}}^*. \end{cases} \quad (6)$$

Первые два уравнения системы (6) решались на каждом шаге сетки  $\Delta z$  упомянутым выше методом расщепления по физическим факторам в следующем виде, что обеспечивало второй порядок точности численной схемы по всем трем пространственным координатам:

$$\begin{aligned} P_{\text{pump1,2}}(x, y, z + \Delta z) = \\ = L_{D, \Delta z/2} L_{A, \Delta z} L_{D, \Delta z/2} P_{\text{pump1,2}}(x, y, z), \end{aligned}$$

где дифракционный оператор  $L_{D, \Delta z/2}$  рассчитывался методом переменных направлений [32], а для оператора поглощения  $L_{A, \Delta z}$  использовалось



**Рис. 2.** Сглаженные граничные условия для нормированных амплитуд давлений  $|P_{\text{pump}1,2}|/p_0$  на излучателе для волн накачки с частотами  $f_{\text{pump}1} = 150$  кГц и  $f_{\text{pump}2} = 145$  кГц.

точное решение в виде затухающей экспоненты на полном шаге сетки  $\Delta z$ . Для последнего уравнения системы (6), описывающего эволюцию амплитуды волны разностной частоты, численная схема записывалась так:

$$P_{\text{dif}}(x, y, z + \Delta z) = L_{D, \Delta z/2} L_{N, \Delta z/2} L_{A, \Delta z} L_{N, \Delta z/2} L_{D, \Delta z/2} P_{\text{dif}}(x, y, z), \quad (7)$$

где дифракционный и диссипативный операторы рассчитывались аналогичным образом, а квазилинейный оператор  $L_{N, \Delta z/2}$  рассчитывался прибавкой к амплитуде волны разностной частоты функции нелинейных источников

$$\frac{i\beta\omega_{\text{dif}}}{2c_0^3} P_{\text{pump}1} P_{\text{pump}2}^*, \quad (8)$$

умноженной на половинный шаг  $\Delta z/2$ . При этом в операторной схеме (7) нелинейные источники

на первом половинном шаге  $\Delta z/2$  рассчитывались как среднее арифметическое от функции (8), вычисленной на начальном и промежуточном слоях, а на втором половинном шаге  $\Delta z/2$  – на промежуточном и конечном слоях.

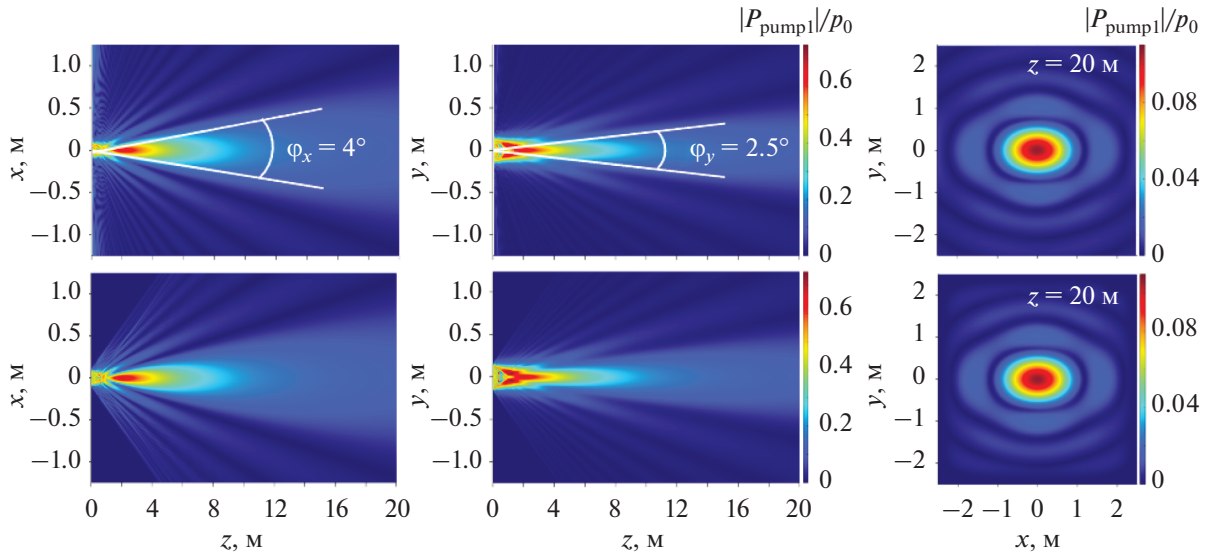
## РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

В качестве первого шага были рассчитаны линейные поля давления волн накачки с помощью интеграла Рэлея (2). На рис. 3 в верхнем ряду приведен пример двумерных распределений  $|P_{\text{pump}1}|$  амплитуды волны с частотой  $f_{\text{pump}1} = 150$  кГц, нормированных на  $p_0 = 0.06$  МПа. Как следует из рис. 3, поле волны накачки имеет узкую направленность с полными углами расхождения пучка в направлениях осей  $x$  и  $y$ , составляющими  $\varphi_x = 4^\circ$  и  $\varphi_y = 2.5^\circ$ , соответственно. Углы  $\varphi_x$  и  $\varphi_y$  были рассчитаны по уровню 0.5 от максимальной амплитуды с использованием соответствующих одномерных поперечных распределений, полученных при  $z = 20$  м и представленных на рис. 4а, 4б серой сплошной линией. Таким образом, поле волн накачки действительно имеет малую расходимость, что позволяет использовать параболическое приближение уравнения (1), справедливое для компонент углового спектра пучка с полными углами расходимости до  $30^\circ$  [30].

Результаты численного моделирования линеаризованного уравнения ХЗК для амплитуды давления волны накачки с частотой 150 кГц в сравнении с решением полной дифракционной модели (интегралом Рэлея) также представлены на рис. 3 (нижний ряд) и рис. 4 (красная штриховая линия). На вкладке к осевому распределению амплитуды давления вдоль оси  $z$  на рис. 4в показано в увеличенном масштабе поведение обоих решений в ближнем поле пучка. Видно, что численное решение в параболическом приближении практически не отличается от решения полной дифракционной задачи (2), что подтверждает правомерность использования параболического приближения и правильность работы численного алгоритма. Некоторые отличия, как и ожидалось, проявляются вблизи излучателя до расстояний порядка 1 м, что связано с влиянием и неточным описанием высокочастотных компонент пространственного спектра волны в ближнем поле пучка на расстояниях  $z < a(ka)^{1/3}$ , где  $k$  – волновое число накачки,  $a$  – характерный размер излучателя [30].

Для волны накачки с частотой  $f_{\text{pump}1} = 150$  кГц амплитуда давления на оси (рис. 4в) достигает максимума на расстоянии около 2 м, меньшем характерной длины дифракции  $l_{d,x} = 2.8$  м для более короткой стороны антенны вдоль координаты  $x$ , после чего убывает, асимптотически приближаясь к зависимости  $1/z$  согласно закону расходящейся сферической волны. Для волн накачки с частотами  $f_{\text{pump}2} = 145$  (140, 135) кГц распределе-





**Рис. 3.** Двумерные распределения линейного поля волны накачки  $|P_{\text{pump}}|/p_0$  с частотой  $f_{\text{pump}} = 150$  кГц: верхний ряд – решение, полученное с помощью интеграла Рэля для идеальных граничных условий на излучателе, нижний ряд – численное решение уравнения ХЗК со сглаженными граничными условиями.

ния поля давления имеют аналогичный вид и не приводятся, так как отличаются только небольшим, пропорциональным величине  $f_{\text{dif}}$ , уменьшением амплитуды в дальнем поле на расстоянии  $z = 20$  м на 3.2, 6.5 и 9.7%, соответственно, в силу более сильной расходимости пучков с меньшей частотой, и незначительным, также пропорциональным величине  $f_{\text{dif}}$ , смещением максимума осевого распределения на 3.1, 6.2, и 9.2% в сторону излучателя. Стоит отметить, что на рассматриваемых расстояниях эффекты поглощения для волн накачки сказываются незначительно. Характерная длина поглощения  $l_{\text{abs}} = 2c_0^3/(\delta\omega^2)$  в морской воде ( $\delta = 4.42 \times 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с [31]) для частоты 150 кГц составляет 1727 м, поэтому амплитуда давления волн накачки при  $z = 20$  м лишь на 2% меньше, а при  $z = 150$  м – на 10% меньше, чем в отсутствие поглощения ( $\delta = 0$ ). Таким образом, эффекты линейного поглощения волн накачки в данном случае не будут ограничивать расстояние, на котором происходит перекачка энергии волн накачки в разностную частоту, т.е. длину антенны бегущей волны. Ограничивающим фактором для рассматриваемого в работе квазилинейного приближения являются только эффекты дифракционной расходимости.

На рис. 5 представлены двумерные нормированные на  $p_0 = 0.06$  МПа распределения амплитуды волны разностной частоты  $|P_{\text{dif}}|$  для случая  $f_{\text{dif}} = 5$  кГц, демонстрирующие узкую направленность поля волны разностной частоты с полными углами расхождения  $\phi_x = 5.2^\circ$  и  $\phi_y = 4.6^\circ$  в направлениях осей  $x$  и  $y$ , рассчитанными аналогично волнам накачки по уровню 0.5 от максимальной амплитуды с использованием соответствующих

одномерных поперечных распределений (рис. 6а и 6б), полученных при  $z = 20$  м, и отсутствие боковых лепестков, что более детально показано на рис. 6.

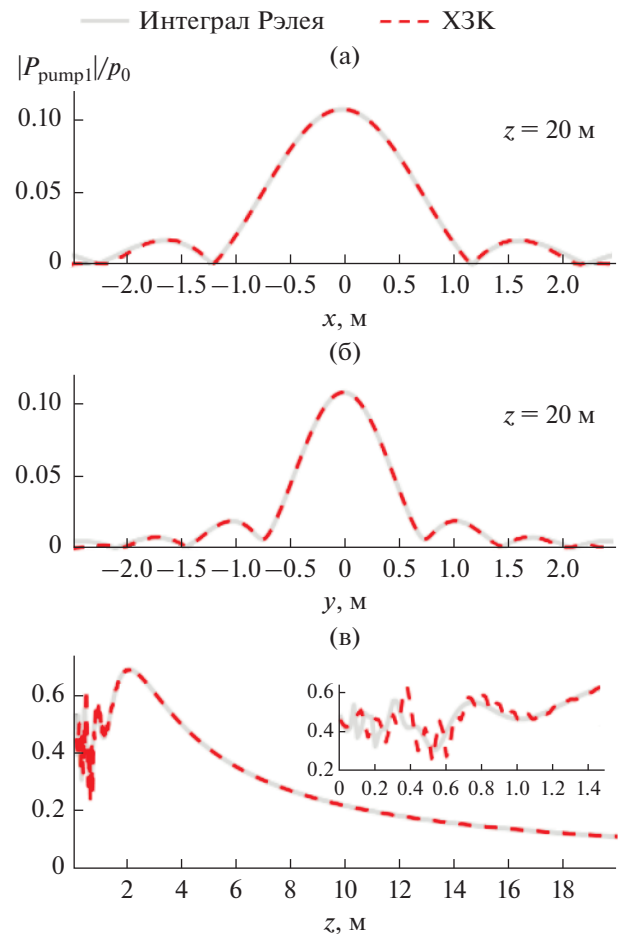
На рис. 6а, 6б представлены одномерные поперечные распределения амплитуды давления волны разностной частоты  $|P_{\text{dif}}|$ , рассчитанные в дальнем поле волн накачки на расстоянии  $z = 20$  м. Эти распределения были получены для трех значений величины разностной частоты  $f_{\text{dif}} = 5$  кГц (красная кривая), 10 кГц (черная кривая) и 15 кГц (серая кривая) и нормированы на  $np_0$ , где  $n = 1, 2$  и 3, соответственно. Поле приведенных волн разностной частоты имеет узкую направленность с полными углами расхождения пучка  $\phi_x = 5.2^\circ, 4.7^\circ, 4.5^\circ$  и  $\phi_y = 4.6^\circ, 4.0^\circ, 3.7^\circ$  в направлениях осей  $x$  и  $y$  для  $f_{\text{dif}} = 5, 10, 15$  кГц, что несколько шире аналогичных диаграмм направленности волн накачки. Как видно, направленность волны разностной частоты возрастает с увеличением  $f_{\text{dif}}$ , поскольку при увеличении частоты дифракционные эффекты проявляются слабее. Заметим, что для волн разностной частоты углы расхождения пучка в обоих направлениях отличаются меньше, чем для волн накачки, поскольку генерация разностной частоты продолжается и на расстояниях больших длины дифракции  $l_{d,x}$  волн накачки, когда высокочастотные пучки расширяются в этом направлении, но еще не дифрагируют в направлении оси  $y$ .

Зависимости амплитуды волн разностной частоты вдоль оси пучка представлены на рис. 6в. На расстояниях до 3 м, меньших длины дифракции  $l_{d,x}$  волны накачки относительно оси  $x$ , для всех трех выбранных значений  $f_{\text{dif}}$  амплитуда вол-

ны разностной частоты возрастает с увеличением пройденного расстояния  $z$ , поскольку амплитуды волн накачки достаточно велики и их вклад в  $p_{\text{dif}}$  превосходит ее уменьшение за счет дифракции, затем достигает максимума на расстоянии порядка 3 м, больше, чем для волн накачки, и плавно убывает, в основном, за счет дифракционных эффектов, поскольку диссипативные потери при физических значениях параметров среды, как упоминалось выше, малы. Кроме того, убывание амплитуды волны разностной частоты происходит также за счет уменьшения вклада, вносимого в нее от волн накачки из-за уменьшения их амплитуды, обусловленного дифракционной расходимостью высокочастотных пучков.

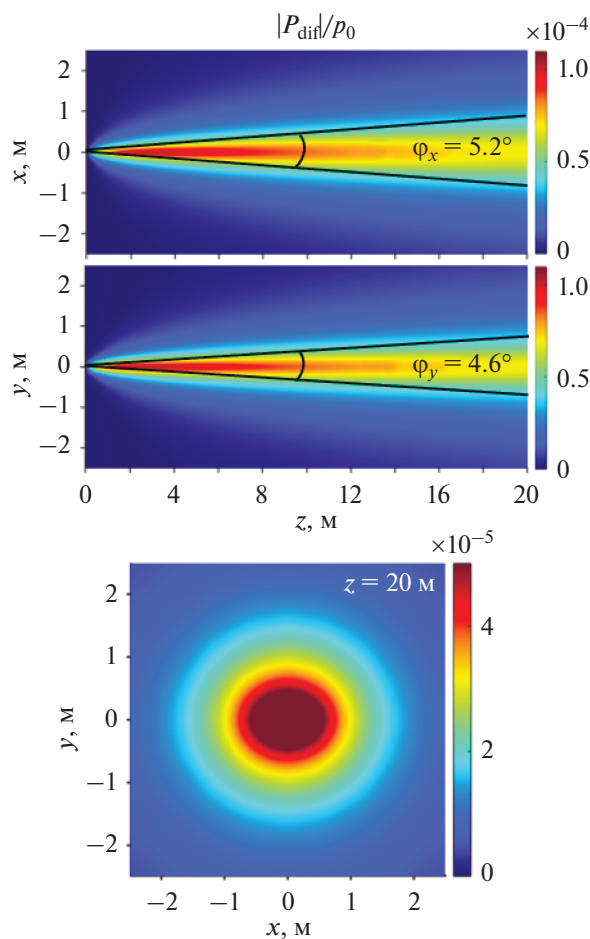
Как видно из рис. 6, максимальная амплитуда волны разностной частоты тем больше, чем больше величина  $f_{\text{dif}}$ , и составляет 0.010, 0.034 и 0.069% от амплитуды давления на излучателе  $p_0$ . В отличие от приближения плоских волн, где амплитуда волны разностной частоты пропорциональна величине  $f_{\text{dif}}$ , в рассматриваемом случае дифрагирующих пучков накачки она увеличивается гораздо быстрее, чем по линейному закону, за счет ослабления дифракционных эффектов в волне с большей разностной частотой. При этом с увеличением давления на излучателе эффективность генерации волны разностной частоты, т.е. зависимость  $|P_{\text{dif}}|/p_0$  от  $p_0$ , возрастает линейно, что соответствует аналитическим результатам квазилинейного приближения [8].

На рис. 7 приведены зависимости нормированной на  $p_0$  амплитуды волны разностной частоты на оси пучка для случая  $f_{\text{dif}} = 5$  кГц и различных расстояний от излучателя: сплошной линией представлены результаты полного квазилинейного расчета, а различными штриховыми линиями — зависимости в случаях, когда источники (8) искусственно выключались по достижении расстояний  $z = 8, 12, 16$  м (а),  $50, 70, 90$  м (б). Из рис. 7 следует, что генерация волны разностной частоты продолжается на расстояниях, заметно превосходящих длины дифракции волн накачки в обоих поперечных направлениях, т.е. в сферически расходящихся пучках взаимодействующих волн, поскольку заметное уменьшение амплитуд волн накачки в  $e$  раз будет наблюдаться лишь после прохождения диссипативной длины (длина диссипации волн накачки составляет порядка 1700 м), во много раз превышающей дифракционную, поэтому при выключении источников на расстояниях, по крайней мере, до  $z = 90$  м амплитуда волны разностной частоты начинает спадать гораздо быстрее. Таким образом, следует ожидать, что при увеличении амплитуды волн накачки и численных расчетах без приближения квазилинейности, важную роль будут играть нелинейные эффекты ограничения амплитуд волн накачки за счет каскадной генерации высших гармоник [22, 23].



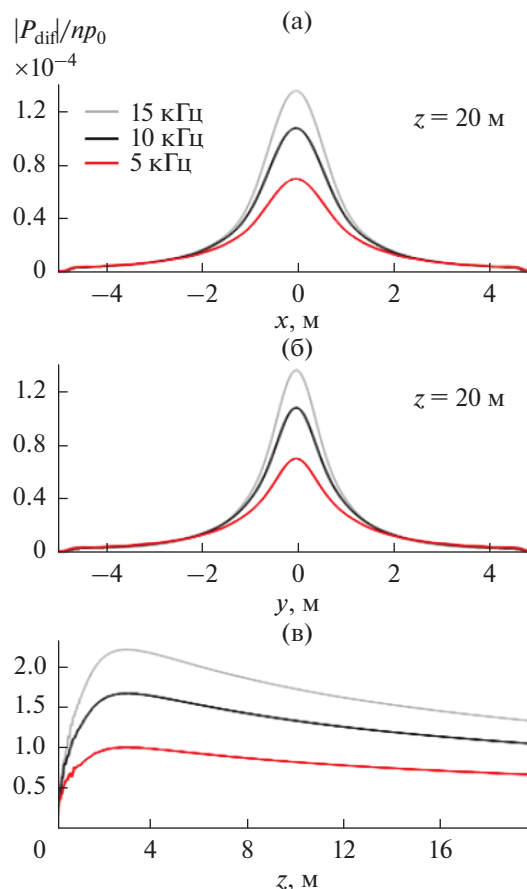
**Рис. 4.** Одномерные распределения амплитуды волны накачки  $|P_{\text{pump1}}|/p_0$  с частотой  $f_{\text{pump1}} = 150$  кГц: серая сплошная линия — интеграл Рэля, красная штриховая линия — численное решение уравнения ХЗК. (а) и (б) — Поперечные распределения  $|P_{\text{pump1}}|$  по осям  $x$  и  $y$ , рассчитанные на расстоянии  $z = 20$  м; (в) — осевое распределение вдоль оси  $z$ ; на вкладке к рисунку изображены решения в ближнем поле.

Наконец, представляет интерес сравнить полученные результаты с результатами существующих приближенных моделей, в которых используется квазилинейное приближение, что проиллюстрировано на рис. 8 для случая  $f_{\text{dif}} = 5$  кГц. На рисунке представлены полученные различными способами зависимости амплитуды волны разностной частоты от расстояния на оси пучка. Результаты численного решения уравнения ХЗК в квазилинейном приближении показаны красными кривыми в сравнении с результатами четырех известных аналитических и полуаналитических моделей. Одна из них состоит в том, что амплитуда волны разностной частоты рассчитывается в предположении взаимодействия плоских волн накачки, поэтому она неограниченно возрастает с увеличением пройденного расстояния  $z$  [8]. Результаты этой модели показаны на рис. 8 серой маркерной линией (рис. 8, “I”) и справедливы



**Рис. 5.** Двумерные распределения поля волны разностной частоты  $|P_{\text{dif}}|$  с частотой  $f_{\text{dif}} = 5$  кГц, рассчитанные в квазилинейном приближении и нормированные на  $p_0 = 0.06$  МПа.

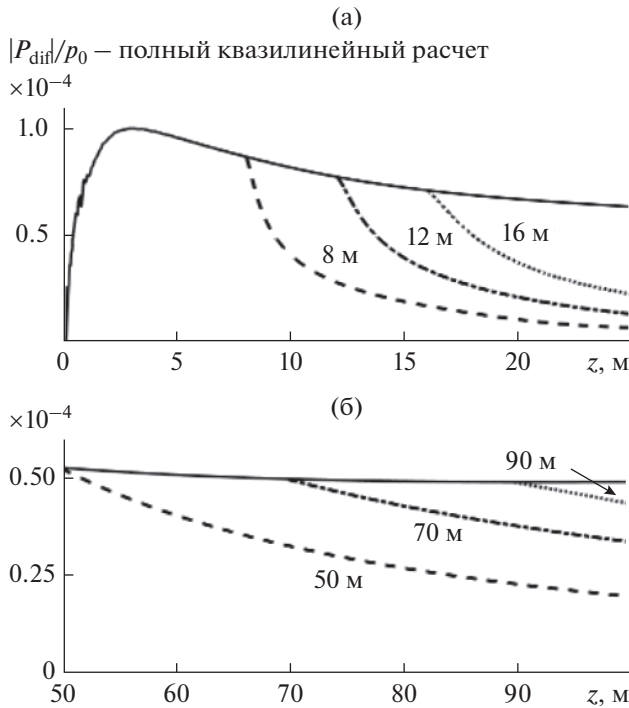
только на расстояниях  $z \ll L_{d,x}, L_{d,y}$ , где  $L_{d,x} = 0.09$  м и  $L_{d,y} = 0.26$  м – длины дифракции волны разностной частоты в обоих направлениях. В другой модели [8] предполагается взаимодействие недифрагирующих волн накачки с гауссовым граничным распределением на круглом излучателе радиуса  $(S/\pi)^{1/2}$ , где  $S = 0.04352$  м<sup>2</sup> – площадь рассматриваемой в работе антенной решетки. Результаты этой модели показаны светло-серой сплошной линией (рис. 8, “2”), на малых расстояниях они соответствуют численному решению уравнения ХЗК, однако далее приближенное решение продолжает расти, поскольку в нем ограничивающим фактором является только дифракция волны разностной частоты. Третья модель, изображенная темно-серой сплошной линией (рис. 8, “3”), повторяет вторую, но получена в предположении прямоугольного излучателя с размерами, соответствующими осям эллипса  $L$  и  $D$ . Это решение было умножено на дополнительный коэффициент  $S/LD$  для компенсации отличия площадей эллипсоидального и прямоуголь-



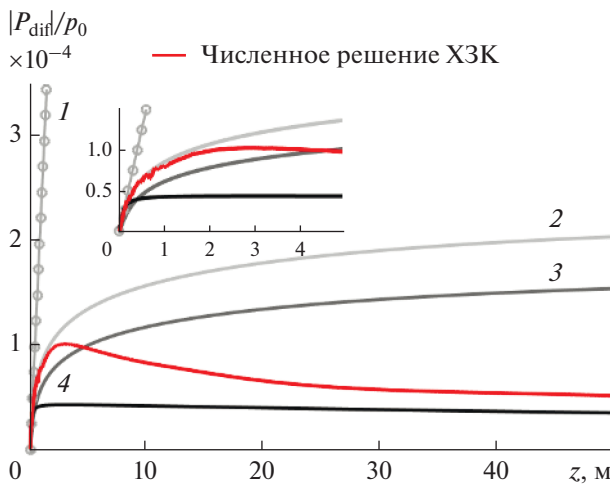
**Рис. 6.** Распределения амплитуды волны разностной частоты  $|P_{\text{dif}}|$ , нормированные на  $np_0$ , рассчитанные для трех случаев величины разностной частоты  $f_{\text{dif}} = 5$  ( $n = 1$ , красная линия), 10 ( $n = 2$ , черная линия) и 15 кГц ( $n = 3$ , серая линия) в квазилинейном приближении: (а) и (б) – поперечные распределения  $|P_{\text{dif}}|$  по осям  $x$  и  $y$ , рассчитанные на расстоянии  $z = 20$  м; (в) – распределение вдоль оси  $z$ .

ного излучателей и ведет себя аналогичным модели 2 образом. Наконец, четвертая модель учитывает дифракцию волн накачки [8], которые, как и во второй модели, имеют гауссово граничное распределение на круглом излучателе радиуса  $(S/\pi)^{1/2}$ . Результаты этой модели показаны на рис. 8, черной сплошной линией (рис. 8, “4”) и имеют схожую тенденцию с полученным в данной работе численным решением уравнения ХЗК: начальное увеличение амплитуды в ближнем поле излучателя и ее медленное уменьшение на больших расстояниях, в области сферической расходимости взаимодействующих волн. Однако количественно результаты сильно отличаются, что связано с отличием в граничных условиях. Таким образом, все четыре аналитические модели верно описывают поведение амплитуды волны разностной частоты только в ближнем поле на оси пучка, однако не могут быть использованы на больших расстояниях.





**Рис. 7.** Зависимости амплитуды волны разностной частоты  $f_{\text{dif}} = 5$  кГц, нормированные на  $p_0 = 0.06$  МПа, вдоль оси  $z$ : квазилинейный расчет до (а)  $z = 25$  м и (б)  $50 \text{ м} < z < 100$  м (сплошная линия) и при искусственном выключении нелинейности на различных расстояниях  $z = 8, 12, 16, 50, 70, 90$  м (числа у кривых).



**Рис. 8.** Сравнение результатов различных квазилинейных моделей для амплитуды волны разностной частоты  $f_{\text{dif}} = 5$  кГц на оси пучка: численное решение уравнения ХЗК в квазилинейном приближении (красная линия) и приближенные аналитические модели: расчет для плоских волн (1), приближения недифрагирующих волн накачки с гауссовым начальным распределением на круглом (2) и прямоугольном (3) излучателях, приближение дифрагирующих волн накачки с гауссовым начальным распределением на круглом излучателе (4). На вставке к рисунку представлены соответствующие решения в ближнем поле.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе с помощью численных методов исследована трехмерная дифракционная задача о генерации волны разностной частоты при двухчастотном взаимодействии близких высокочастотных волн накачки в квазилинейном приближении. На основе точного решения линейной дифракционной задачи для волн накачки с помощью интеграла Рэлея было показано, что поле исходных волн имеет узкую направленность, поэтому далее решалось уравнение ХЗК и использовался алгоритм вычисления дифракционного оператора в параболическом приближении, результаты использования которого практически не отличались от решения полной дифракционной задачи.

В квазилинейном приближении рассчитаны одномерные и двумерные распределения амплитуды волны разностной частоты для трех различных величин  $f_{\text{dif}}$ . Показано, что направленность низкочастотного излучения шире и более сглажена по обоим поперечным направлениям, чем у волн накачки. При этом чем больше величина разностной частоты, тем более узконаправленное излучение генерируется параметрической антенной.

Проанализирована эффективность генерации поля волны разностной частоты в зависимости от величины  $f_{\text{dif}}$  и показано, что с увеличением разностной частоты возрастает доля перекаченной в нее от волн накачки энергии. Так, амплитуда волны разностной частоты увеличивается примерно в 3.5 и 7 раз при увеличении  $f_{\text{dif}}$  от 5 кГц до 10 и 15 кГц, что отличается от приближения плоских волн, где амплитуда волны разностной частоты растет линейно с увеличением  $f_{\text{dif}}$ .

Показано, что в приближении квазилинейности поглощение и сферическая расходимость взаимодействующих волн на рассмотренных расстояниях порядка 100 м от излучателя не являются факторами, ограничивающими расстояния, на которых происходит генерация пучка разностной частоты. В реалистичных условиях, при увеличении амплитуды волн накачки и проведении численных расчетов без приближения квазилинейности, важную ограничивающую роль будут играть нелинейные эффекты уменьшения амплитуд волн накачки за счет каскадной генерации высших гармоник. Возможным фактором также может являться увеличение коэффициента затухания морской воды по сравнению с рассмотренным здесь идеальным случаем за счет присутствия взвесей, водорослей и других включений.

Сравнение полученного численного решения с существующими аналитическими результатами, в которых также применяется квазилинейный подход, однако используются дополнительные предположения о граничных условиях на излучателе и поведении высокочастотных волн накачки, показало, что аналитические решения

количественно верно описывают поведение амплитуды лишь в ближнем поле излучателя и только на оси пучка (модель 4), но не могут быть использованы даже для качественного описания поля на больших расстояниях.

Результаты, полученные в работе, служат основой для дальнейшего решения полной трехмерной нелинейно-дифракционной задачи о генерации волны разностной частоты с помощью антенной решетки [26] в случае более интенсивных волн накачки, когда квазилинейное приближение уже не может быть применено.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 20-02-00676 и фонда “БАЗИС” 20-2-2-21-1.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Новиков Б.К., Тимошенко В.И. Параметрические антенны в гидролокации. Л.: Судостроение, 1990. 250 с.
2. Berklay H.O. Possible exploitation of non-linear acoustics in underwater transmitting applications // J. Sound Vib. 1965. V. 2. № 4. P. 435–461.
3. Zhou H., Huang S.H., Li W. Parametric acoustic array and its application in underwater acoustic engineering // Sensors. 2020. V. 20. № 7. P. 2148.
4. Yoneyama M., Fujimoto J., Kawamo Y., Sasabe S. The audio spotlight: an application of nonlinear interaction of sound waves to a new type of loudspeaker design // J. Acoust. Soc. Am. 1983. V. 73. № 5. P. 1532–1536.
5. Shi C., Gan W.-S. Development of a parametric loudspeaker: a novel directional sound generation technology // IEEE Potentials. 2010. V. 29. № 6. P. 20–24.
6. Skinner E., Groves M., Hinders M.K. Demonstration of a length limited parametric array // Appl. Acoust. 2019. V. 148. P. 423–433.
7. Westervelt P.J. Parametric acoustic array // J. Acoust. Soc. Am. 1963. V. 35. № 4. P. 535–537.
8. Новиков Б.К., Руденко О.В., Тимошенко В.И. Нелинейная гидроакустика. Л.: Судостроение, 1981. 264 с.
9. Sapozhnikov O.A., Khokhlova V.A., Cleveland R.O., Blanc-Benon P., Hamilton M.F. Nonlinear Acoustics Today // Acoustics Today. 2019. V. 15. № 3. P. 55–64.
10. Esipov I.B., Naugolnykh K.A., Timoshenko V.I. The parametric array and long-range ocean research // Acoustics Today. 2010. V. 6. № 2. P. 20–26.
11. Pampin J., Kollin J.S., Kang E. Applications of ultrasonic sound beams in performance and sound art / Proc. of the joint 33rd Int. Computer Music Conference, 2007. P. 492–495.
12. Zhong J., Kirby R., Qiu X. The near field, Westervelt far field, and inverse-law far field of the audio sound generated by parametric array loudspeakers // J. Acoust. Soc. Am. 2021. V. 149. № 3. P. 1524–1535.
13. Cervenka M., Bednarik M. A versatile computational approach for the numerical modeling of parametric acoustic array // J. Acoust. Soc. Am. 2019. V. 146. № 4. P. 2163–2169.
14. Tavakkoli J., Cathignol D., Souchon R., Sapozhnikov O.A. Modeling of pulsed finite-amplitude focused sound beams in time domain // J. Acoust. Soc. Am. 1998. V. 104. № 4. P. 2061–2072.
15. Zemp R.J., Tavakkoli J., Cobbold R.S.C. Modeling of nonlinear ultrasound propagation in tissue from array transducers // J. Acoust. Soc. Am. 2003. V. 113. № 1. P. 139–152.
16. Averkiou M.A., Lee Y.-S., Hamilton M.F. Self-demodulation of amplitude- and frequency-modulated pulses in a thermoviscous fluid // J. Acoust. Soc. Am. 1993. V. 94. № 5. P. 2876–2883.
17. Aanonsen S.I. Numerical computation of the nearfield of a finite amplitude sound beam // Tech. Rep. № 73. 1983. Dept. of Math., Univ. of Bergen, Norway.
18. Lee Y.S., Hamilton M.F. Time-domain modelling of pulsed finite-amplitude sound beams // J. Acoust. Soc. Am. 1995. V. 97. № 2. P. 906–917.
19. Khokhlova V.A., Souchon R., Tavakkoli J., Sapozhnikov O.A., Cathignol D. Numerical modeling of finite amplitude sound beams: Shock formation in the nearfield of a CW plane piston source // J. Acoust. Soc. Am. 2001. V. 110. № 1. P. 95–108.
20. Хохлова В.А., Пономарев А.Е., Аверкью М.А., Крам Л.А. Нелинейные импульсные поля прямоугольных фокусированных источников диагностического ультразвука // Акуст. журн. 2006. Т. 52. № 4. С. 560–570.
21. Muir T.G., Willette J.G. Parametric acoustic transmitting arrays // J. Acoust. Soc. Am. 1972. V. 52. № 5 (Part 2). P. 1481–1486.
22. Moffett M.B., Mellen R.H., Konrad W.L. Model for parametric acoustic sources // J. Acoust. Soc. Am. 1977. V. 61. № 2. P. 325–337.
23. Moffett M.B., Mellen R.H., Konrad W.L. Parametric acoustic sources of rectangular aperture // J. Acoust. Soc. Am. 1978. V. 63. № 5. P. 1326–1331.
24. Cervenka M., Bednarik M. Non-paraxial model for a parametric acoustic array // J. Acoust. Soc. Am. 2013. V. 134. № 2. P. 933–938.
25. Ding D. A simplified algorithm for the second-order sound fields // J. Acoust. Soc. Am. 2000. V. 108. № 6. P. 2759–2764.
26. Есипов И.Б., Попов О.Е., Солдатов В.Г. Компрессия сигнала параметрической антенны в мелководном волноводе // Акуст. журн. 2019. Т. 65. № 4. С. 490–498.
27. Тюрин А.В., Юлдашев П.В., Есипов И.Б., Хохлова В.А. Численная модель спектрального описания генерации ультразвуковой волны разностной частоты при двухчастотном взаимодействии // Акуст. журн. 2022. Т. 68. № 2. С. 152–161.
28. O’Neil H.T. Theory of focusing radiators // J. Acoust. Soc. Am. 1949. V. 21. № 5. P. 516–526.
29. Sapozhnikov O.A., Tsysar S.A., Khokhlova V.A., Kreider W. Acoustic holography as a metrological tool for characterizing medical ultrasound sources and fields // J. Acoust. Soc. Am. 2015. V. 138. № 3. P. 1515–1532.
30. Tjotta J.N., Tjotta S., Vefring E.G. Effects of focusing on the nonlinear interaction between two collinear finite amplitude sound beams // J. Acoust. Soc. Am. 1991. V. 89. № 3. P. 1017–1027.
31. Pierce A.D. Acoustics: an introduction to its physical principles and applications. Springer, 2019. 768 p.
32. Press W.H., Teukolsky S.A., Vetterling W.T., Flannery B.P. Numerical recipes. N.Y.: Cambridge University Press, 2007. 1235 p.