

УДК 534.2:534.8

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ГРАФИЧЕСКИХ УСКОРИТЕЛЕЙ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ НЕЛИНЕЙНЫХ УЛЬТРАЗВУКОВЫХ ПУЧКОВ С УДАРНЫМИ ФРОНТАМИ НА ОСНОВЕ УРАВНЕНИЯ ВЕСТЕРВЕЛЬТА

© 2023 г. Е. О. Коннова^а, *, В. А. Хохлова^а, **, П. В. Юлдашев^а, ***

^аМосковский государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический факультет,
Лаборатория медицинского и промышленного ультразвука,
Ленинские горы 1, стр. 2, Москва, 119991 Россия

*e-mail: helen.7aprel@gmail.com

**e-mail: vera@acs366.phys.msu.ru

***e-mail: petr@acs366.phys.msu.ru

Поступила в редакцию 19.04.2022 г.

После доработки 19.04.2022 г.

Принята к публикации 27.07.2022 г.

Рассмотрена задача ускорения алгоритма расчета нелинейных эффектов при моделировании высокоинтенсивных ультразвуковых пучков на основе однонаправленного уравнения Вестервельта. При построении численного решения для сильно искаженных волн с ударными фронтами необходимо учитывать большое число гармоник (до 1000) на пространственных сетках с размером матриц порядка 10000 на 10000, что требует обработки больших объемов данных и длительного времени расчетов. В данной работе реализация оператора нелинейности проводится во временном представлении с использованием удароулавливающей схемы типа Годунова, которая позволяет моделировать нелинейные волны с ударными фронтами с небольшим (3) количеством узлов сетки на ударном фронте. В работе проводится сравнение эффективности использования данного метода при его реализации на центральном процессоре (CPU) и графических ускорителях (GPU) по сравнению со спектральным методом, реализованным ранее для квазилинейного распространения волны. Проводится анализ скорости выполнения алгоритмов на CPU и GPU в зависимости от размеров массивов входных данных.

Ключевые слова: нелинейное уравнение Вестервельта, метод Годунова, графические ускорители, неинвазивная ультразвуковая хирургия

DOI: 10.31857/S032079192210015X, EDN: DAEXFM

ВВЕДЕНИЕ

Численный эксперимент на сегодняшний день является неотъемлемой частью развития методов неинвазивной хирургии с использованием нелинейных ультразвуковых волн. Одним из основных объектов, для исследования которого активно используются численные методы, являются нелинейные фокусированные ультразвуковые пучки высокой интенсивности, с помощью которых производится разрушение задаваемых структур внутри тела человека, например, опухолей [1]. Для генерации мощного ультразвука используются преобразователи различной формы и конструкции, при проектировании которых для конкретных клинических приложений необходимо уметь количественно описывать структуру создаваемых ими акустических полей (рис. 1). Такая задача может быть эффективно реализована при помощи методов численного моделиро-

вания [2–4]. Одной из наиболее полных волновых моделей для теоретического описания мощных ультразвуковых пучков является уравнение Вестервельта, которое позволяет количественно точно описывать нелинейные ударно-волновые поля, создаваемые фокусированными преобразователями мощного ультразвука в однородных поглощающих средах [5, 6]. При постановке задачи обычно считается, что излучателем генерируется монохроматическая волна, спектр которой в процессе распространения обогащается высшими гармониками за счет эффекта акустической нелинейности. В общем случае для решения данного уравнения, когда эволюционной переменной выступает время, необходимо использование суперкомпьютерных мощностей [7]. Однако ряд упрощений позволяет существенно снизить вычислительные затраты.

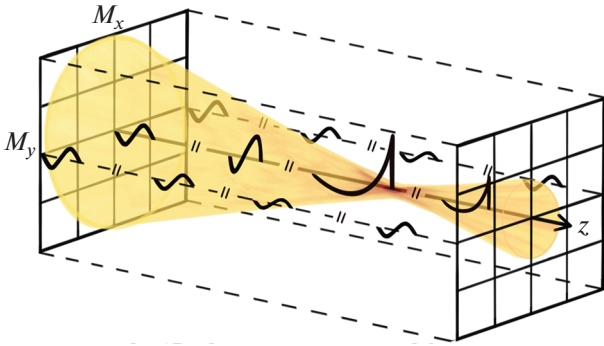


Рис. 1. Схема распространения сфокусированного ультразвукового пучка, создаваемого HIFU излучателем.

Для оптимизации численного моделирования нелинейных сфокусированных ультразвуковых пучков создаются специальные алгоритмы. В данной работе рассматривается важный для практики случай направленного трехмерного пучка, что позволяет упростить вычислительную задачу путем перехода в бегущую систему координат, ось которой ориентирована вдоль преимущественного направления распространения волн в пучке. В этом случае эволюционной переменной является координата вдоль оси пучка z (рис. 1). Численное решение эволюционного уравнения такого типа обычно строится с использованием метода расщепления по физическим факторам [8], согласно которому на каждом шаге сетки по оси z каждый физический эффект рассчитывается отдельно с помощью наиболее подходящего численного метода. Нелинейное эволюционное уравнение Вестервелта в такой постановке решалось для излучателей различной формы и размера [6, 9, 10]. При этом типовой размер матриц для хранения параметров поля давления составляет $M_x = 10000$ на $M_y = 10000$ (рис. 1) для каждой из $N = 1000$ спектральных составляющих профиля нелинейной волны [9]. В этом случае требуемый объем оперативной памяти, который достаточно велик (несколько сотен Гб), и соответствующая сложность расчетов все еще требуют использования суперкомпьютерных мощностей.

Однако, если учесть особенности пространственной структуры нелинейных полей сильно сфокусированных излучателей, то рассматриваемая задача может быть решена на обычных персональных компьютерах с многоядерными центральными процессорами (CPU). Поскольку нелинейные эффекты в основном проявляются там, где амплитуда волны велика, т.е. вблизи фокуса, то большое количество гармоник необходимо учитывать именно в этой сравнительно небольшой области пространства [9]. Такой способ позволяет на порядок снизить вычислительные затраты и требования к объему оперативной памяти

компьютера, однако даже при параллельном исполнении вычислений на нескольких процессорных ядрах (обычно от 2 до 16), позволяющем существенно ускорить расчеты, моделирование поля для одного набора входных параметров может длиться до нескольких суток [9]. С учетом того, что для характеристики поля одного излучателя во всем диапазоне рабочих мощностей требуется выполнить несколько десятков расчетов, такая скорость моделирования не является удовлетворительной.

Потенциальным способом решения проблемы скорости вычислений является быстро развивающаяся в последнее время технология параллельного программирования на графических процессорах (GPU). В отличие от CPU данные процессоры имеют до несколько тысяч узкоспециализированных ядер, способных выполнять широкий спектр математических операций [11]. Такое количество ядер позволяет увеличить скорость расчетов за счет большого количества одновременно запускаемых процессов, которые параллельно обрабатывают однотипные сегменты данных. Получаемое ускорение вычислений не обязательно пропорционально числу обрабатываемых потоков, что обусловлено меньшей мощностью, производительностью и скоростью вычисления ядер GPU по сравнению с ядрами CPU, а также особенностями хранения и передачи данных между оперативной памятью CPU и графической памятью. Так как хранение и запись данных при выполнении каждого из шагов алгоритма вдоль эволюционной координаты производится в оперативной памяти CPU, дополнительное время уходит на обмен данными между центральным и графическим процессорами на каждом шаге алгоритма. В силу рассматриваемых особенностей архитектуры GPU важной задачей становится нахождение баланса между максимальными размерами обрабатываемых на данном шаге алгоритма данных, которые помещаются в оперативную память графического процессора во избежание их передачи по частям, и минимизацией обмена данными между процессорами.

Ранее для данной задачи был реализован алгоритм на GPU, в котором были написаны функции-ядра для вычисления оператора дифракции методом углового спектра, нахождения точного решения для оператора поглощения и решения оператора нелинейности в спектральном представлении методом Рунге–Кутты 4 порядка [12]. Однако при использовании спектрального метода количество вычислительных операций и, соответственно, время вычислений пропорциональны квадрату количества образующихся гармоник. Поэтому данный метод будет эффективен только при слабом проявлении нелинейных эффектов, когда в спектре волны образуется небольшое число высших гармоник. Оператор нелинейности

можно также вычислять с помощью различных методов во временном представлении, однако во многих из них для описания области разрыва требуется большое количество узлов сетки по оси времени (50–100), что увеличивает общее количество точек сетки и, таким образом, количество обрабатываемых данных [13, 14]. Для решения данной проблемы эффективнее использовать удароуправляющие схемы, позволяющие моделировать образование ударного фронта с использованием небольшого количества точек на нем (около 3-х), например, консервативную схему типа Годунова [15].

Целью данной работы является реализация алгоритма удароуправляющей схемы типа Годунова на графическом процессоре (GPU) для большего ускорения параллельных вычислений по сравнению с использованием многоядерных центральных процессоров (CPU) и обеспечения возможности моделирования мощных ультразвуковых пучков с ударными фронтами на обычном персональном компьютере.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Нелинейное уравнение Вестервельта

Уравнение Вестервельта в бегущей системе координат можно записать в эволюционной форме как:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial \tau \partial z} = \frac{c_0}{2} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right) + \frac{\beta}{2\rho_0 c_0^3} \frac{\partial^2 p^2}{\partial \tau^2} + \frac{\delta}{2c_0^3} \frac{\partial^3 p}{\partial \tau^3}, \quad (1)$$

где $p(x, y, z, \tau)$ – акустическое давление, c_0 – скорость звука в среде, $\tau = t - z/c_0$ – время в бегущей системе координат, β – коэффициент нелинейности, δ – коэффициент термовязкого поглощения [5]. Дифференциальные операторы в правой части уравнения в порядке слева направо описывают эффекты дифракции, нелинейности и термовязкого поглощения.

При численном решении уравнения (1) на каждом шаге вдоль оси z дискретизованное поле давления $p(x, y, z, \tau)$ представляется в памяти ЭВМ в виде трехмерной матрицы, которая содержит набор комплексных амплитуд N гармоник спектра волны в разложении ее профиля в конечный ряд Фурье в каждой пространственной точке плоскости xu на равномерной сетке с числом точек M_x и шагом Δx по оси x и M_y с шагом Δy по оси y :

$$p(x, y, z, \tau) = \sum_{n=-N}^N p_n(x, y, z) e^{-i\omega_n \tau}. \quad (2)$$

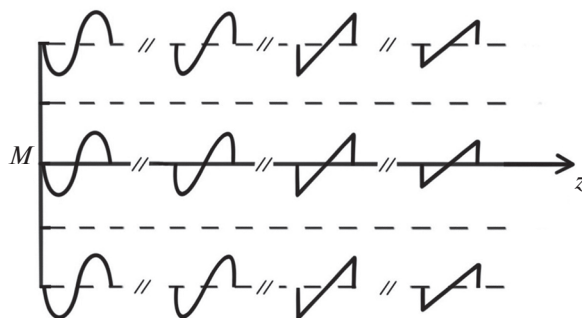


Рис. 2. Схема реализации параллельного расчета нелинейного оператора, где M – количество пространственных точек.

Здесь $\omega_n = \omega n$ – круговые частоты гармоник с номером n , ω – круговая частота монохроматического источника, p_n – комплексные амплитуды гармоник. Отметим, что в памяти ЭВМ достаточно хранить только одну половину спектра положительных частот, т.к. амплитуда второй половины отрицательных частот является комплексно-сопряженной к первой.

Используя спектральное представление (2) для поля давления в схеме расщепления по физическим факторам решения уравнения Вестервельта (1), можно вычислить оператор дифракции методом поглощения спектра и точно рассчитать оператор поглощения для каждой из спектральных компонент волны независимо друг от друга [12]. Особенности параллельных вычислений оператора нелинейности в спектральном и временном представлениях рассмотрены ниже. Рассматривается реализация только нелинейного оператора в уравнении Вестервельта, т.е. фактически решается уравнение простых волн. Так как данное уравнение решается независимо в каждой пространственной координате, для упрощения представления данных в памяти ЭВМ перейдем к рассмотрению строки исходного массива по пространственной координате x с M элементами, что не повлияет на исследование эффективности работы алгоритма. Таким образом, волна распространяется вдоль оси z , нелинейные эффекты рассчитываются на каждом шаге по z независимым образом M раз для всех узлов сетки по координате x (рис. 2), оптимизация расчетов проводится путем распараллеливания потоков данных по этой координате. В дальнейшем при моделировании полной нелинейно-дифракционной задачи расчеты будут проводиться на трехмерной сетке. Для этого данные с двумерной пространственной сетки в плоскости xu с полным количеством узлов $M = M_x M_y$ можно обработать, разбивая их на описанные выше одномерные массивы размера M .

Оператор нелинейности

Если не рассматривать в уравнении (1) операторы дифракции и поглощения, то в результате получим уравнение простых волн, описывающее нелинейные искажения профиля плоской волны:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\beta}{2\rho_0 c_0^3} \frac{\partial p^2}{\partial \tau}. \quad (3)$$

Как указывалось выше, в трехмерной нелинейной задаче уравнение (3) решается независимо для каждой из $M = M_x M_y$ точек пространственной сетки в плоскости xu (рис. 2). При слабом проявлении нелинейных эффектов, когда не ожидается образование ударных фронтов, удобно использовать спектральный алгоритм, в котором для амплитуд гармоник (2) численно решается система связанных нелинейных уравнений [16]. Обычно в качестве численного метода применяется метод Рунге–Кутты 4 порядка точности.

Ранее в работах авторов настоящей статьи такой спектральный алгоритм был реализован для выполнения вычислений на графических процессорах при решении полной нелинейно-дифракционной задачи (1) [12]. Параллельные вычисления организуются путем разбиения общего массива данных на сегменты размером $L_x L_y N$, где L_x – это размер буфера вдоль пространственной координаты x , L_y – вдоль пространственной координаты y , а N – число гармоник. Такой подход позволяет обрабатывать количество данных, которые необязательно целиком помещаются в объем памяти GPU. Порции данных из временных буферов пересылаются из памяти CPU в память GPU, где их обрабатывает параллельный алгоритм, в котором для каждого процесса на графическом ядре из общего числа процессов $L_x L_y$ выделяется набор из N гармоник. Таким образом, для каждого пересланного на GPU сегмента данных алгоритм использует параллелизм по данным. При реализации алгоритма на GPU важной задачей является нахождение баланса между количеством обрабатываемых данных и возможностями памяти процессора. При оценке производительности вычислений необходимо также учитывать время, затрачиваемое на пересылку данных между памятью CPU и GPU.

При сильном проявлении нелинейных эффектов для описания процесса искажения профиля волны требуется большое количество гармоник, информацию о которых необходимо хранить на каждом шаге z вдоль оси пучка. Поскольку при спектральном подходе число вычислительных операций растет пропорционально квадрату числа гармоник, то спектральный алгоритм быстро становится неэффективным. Альтернативным способом решения уравнения (3) является использование численных схем, работающих во

временном представлении. В этом случае наиболее эффективно применять удароулавливающие схемы, позволяющие моделировать сильно искаженные нелинейные волны с использованием небольшого количества точек на ударных фронтах [13, 15]. Отметим, что при хранении данных в спектральном представлении (2) для перехода к профилям необходимо сделать быстрое преобразование Фурье, которое также можно выполнить на GPU. Для построения численного решения уравнение (3) удобно привести к безразмерному виду:

$$\frac{\partial V}{\partial \sigma} = \frac{1}{2} \frac{\partial V^2}{\partial \theta}, \quad (4)$$

где $V = p/p_0$ – акустическое давление, нормированное на амплитуду волны p_0 , $\theta = \omega_0 \tau$, $\sigma = z/z_s$ – безразмерные время и координата, соответственно, $z_s = c_0^3 \rho_0 / p_{00}$ – расстояние образования разрыва для исходно гармонической волны с частотой ω_0 , задаваемой в безразмерных переменных как:

$$V(\sigma = 0, \theta) = \sin \theta. \quad (5)$$

Метод Годунова

Численное решение уравнения (4) на каждом шаге сетки по эволюционной координате σ строилось с помощью схемы типа Годунова (рис. 3). Алгоритм расчета представляет собой явную шеститочечную консервативную схему второго порядка точности по времени и первого порядка точности по координате распространения [13, 15]:

$$V_j^{k+1} = V_j^k - \frac{h_\sigma}{h_\theta} \left(H_{j+\frac{1}{2}}^k(\sigma) - H_{j-\frac{1}{2}}^k(\sigma) \right), \quad (6)$$

где потоки $H_{j+\frac{1}{2}}^k$ через центры ячеек численной сетки на k -том шаге по координате σ задаются следующим образом

$$H_{j+\frac{1}{2}}^k(\sigma) = -\frac{1}{4} \left(\left(V_{j+\frac{1}{2}}^+ \right)^2 + \left(V_{j+\frac{1}{2}}^- \right)^2 \right) - \frac{a_{j+\frac{1}{2}}^k(\sigma)}{2} \left[V_{j+\frac{1}{2}}^+(\sigma) - V_{j+\frac{1}{2}}^-(\sigma) \right]. \quad (7)$$

Здесь h_σ – шаг схемы вдоль координаты σ , h_θ – шаг сетки по оси безразмерного времени θ , и локальная скорость потока в сеточной ячейке:

$$a_{j+\frac{1}{2}}^k(\theta) = \max \left| V_{j+\frac{1}{2}}^-, V_{j+\frac{1}{2}}^+ \right|. \quad (8)$$

Для получения второго порядка точности в данном алгоритме используется кусочно-линейная

реконструкция значений давления $V(\sigma_k, \theta_j)$ справа $V_{j+\frac{1}{2}}^+(\sigma)$ и слева $V_{j+\frac{1}{2}}^-(\sigma)$ от узла численной сетки (k, j) :

$$\begin{aligned} V_{j+\frac{1}{2}}^+ &= V_{j+1}^k(\sigma) - \frac{h_\theta}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial \theta} \right)_{j+1}^k, \\ V_{j+\frac{1}{2}}^- &= V_j^k(\sigma) - \frac{h_\theta}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial \theta} \right)_j^k. \end{aligned} \quad (9)$$

Для большей устойчивости численного алгоритма, задействованные в (8) производные решения по времени на шаге k по координате σ выбираются таким образом, чтобы их значения были минимальными по модулю из возможных значений производных – правой, левой и центральной с весовым коэффициентом $1 \leq b \leq 2$:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial V}{\partial \theta} \right)_j^k = \\ &= \min \operatorname{mod} \left(\frac{b(V_j^k - V_{j-1}^k)}{h_\theta}, \frac{V_{j+1}^k - V_{j-1}^k}{2h_\theta}, \frac{b(V_{j+1}^k - V_j^k)}{h_\theta} \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Весовой коэффициент $b = 2$ соответствует наиболее точному решению с минимальным сеточным поглощением, а $b = 1$ – более устойчивому численному алгоритму, что достигается за счет увеличения сеточного поглощения. В данной работе величина b полагалась равной единице. Представленная схема позволяет рассчитывать распространение узких ударных фронтов с большой точностью при использовании всего лишь трех узлов сетки на ударном фронте [15]. Отметим, что при решении трехмерных задач обычно дополнительно вводится искусственное поглощение, которое позволяет размыть ширину ударного фронта до нужных значений (обычно 7–8 точек на фронт) с целью уменьшения больших пространственных градиентов поля давления по поперечным координатам [6].

Расчеты проводились на двух различных компьютерах: на ноутбуке с CPU Intel Core i5-8250U с видеокартой GPU Nvidia GeForce MX150 (380 ядер, 1.5 ГГц), и на персональном компьютере (ПК) с CPU Intel Core i7 4790 с видеокартой Nvidia GTX1070 (1980 ядер, 1.7 ГГц). Для реализации вычислений на графических процессорах была написана программа на языке C, содержащая функцию-ядро CUDA, которая реализовала алгоритмы (6)–(10). Для определения эффективности работы данной программы на языке C были реализованы однопоточный аналогичный алгоритм для CPU, а также алгоритм для GPU на основе спектрального метода, со скоростью вычислений которых и производилось сравнение. При численном решении уравнений (6)–(10) на каждом шаге по σ дискретизованное поле давления пред-

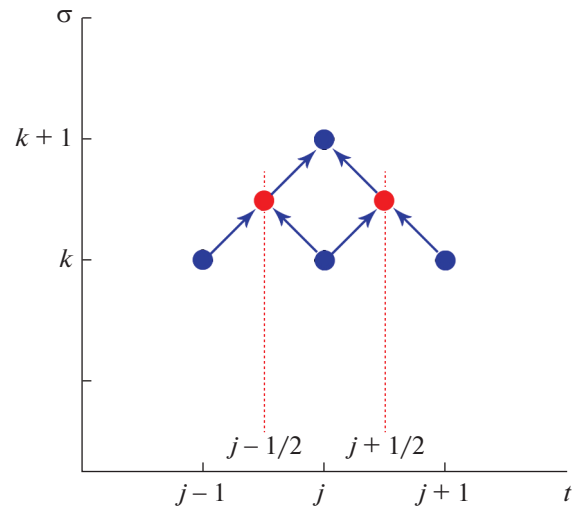


Рис. 3. Шаблон для консервативной численной схемы типа Годунова для уравнения простых волн.

ставлялось в памяти ЭВМ в виде двумерной матрицы, которая содержала набор M профилей волн, заданных в M пространственных точках. Такое представление данных необходимо для реализации распараллеливания по данным, при котором каждый профиль волны из числа M обрабатывается параллельно с другими профилями различными ядрами графического процессора. Вычисления проводились для различного количества пространственных координат M (100–10000 точек), а также для различного числа точек на периоде волны (100–3000 точек) с шагами временной сетки $\Delta t = 0.0063$, $\Delta \sigma = 0.2378$, удовлетворяющими устойчивости схемы типа Годунова при максимальном рассматриваемом количестве точек на период волны. Для определения правильности реализованного алгоритма во временном представлении использовалось аналитическое решение уравнения простых волн с бесконечно узким ударным фронтом (4) с начальным профилем (5), представленное в неявном виде [17]:

$$V_{\text{th}} = \sin(\theta + \sigma V_{\text{th}}). \quad (11)$$

Положение и величина ударного фронта определялись по правилу равенства площадей.

РЕЗУЛЬТАТЫ

На рис. 4 представлены профили волны на различных расстояниях, полученные численно с использованием метода Годунова, реализованного на GPU ноутбука, и теоретическое решение, описываемое уравнением (11). Наблюдается хорошее согласие численного и аналитического решений с ошибкой не более 0.03% в амплитуде ударного фронта. Расхождение наблюдается только в обла-

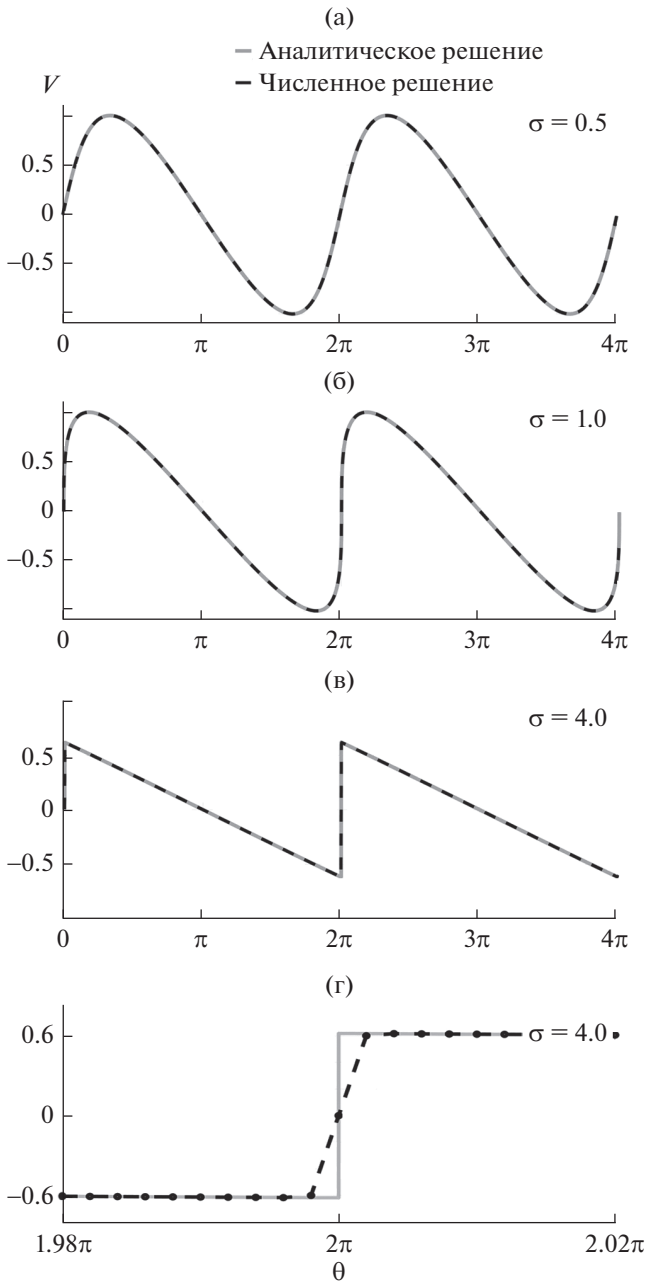


Рис. 4. Сравнение аналитического (серая сплошная линия) и численного (черная пунктирная линия) решений для плоских волн с гармоническим начальным профилем на разных расстояниях от излучателя: (а) – $\sigma = 0.5$, (б) – $\sigma = 1.0$, (в) – $\sigma = 4.0$. (г) – Сравнение аналитического и численного решений вблизи ударного фронта при $\sigma = 4.0$.

сти разрыва, так как, в отличие от аналитического решения, численная схема приводит к формированию ударного фронта конечной ширины с тремя точками на разрыв. Таким образом, ширина фронта при использовании 1000 точек на период составляет около 0.2% от периода волны. Данные

результаты подтверждают правильность реализации алгоритма для GPU. Идентичные результаты были получены для алгоритмов, реализованных на ПК с использованием одного из ядер CPU и на ноутбуке с использованием и без использования видеокарты.

В табл. 1 и 2 сравниваются результаты вычислений на ноутбуке по времени работы однопоточного алгоритма, основанного на временном методе и реализованного на CPU, с аналогичным алгоритмом для GPU, а также с алгоритмом, реализующим спектральный метод на GPU, в зависимости от количества пространственных точек в буфере M и количества гармоник N . Как и ожидалось, время вычислений с использованием спектрального метода на GPU увеличивается квадратично с увеличением числа гармоник, что демонстрирует его неэффективность в случае сильных нелинейных эффектов и большого числа гармоник. При этом время вычислений, проведенных на основе метода Годунова, пропорционально количеству гармоник. Для размеров матрицы поля давления с 10000 пространственных точек и при 1000 гармоник расчеты, реализованные на GPU с использованием временного подхода, оказываются в 26 раз быстрее по сравнению с CPU и в 2.6 раз быстрее по сравнению со спектральным алгоритмом, реализованным на GPU.

В табл. 3 и 4 представлено сравнение скорости работы тех же программ на более мощном компьютере (ПК). Наблюдаются аналогичные зависимости времени, затрачиваемого на вычисления, от числа используемых гармоник для обоих методов. Для размеров матрицы с 10000 пространственных точек и 1000 гармоник расчеты, реализованные на GPU с использованием временного подхода, в 33 раза быстрее по сравнению с CPU и в 2.3 раза быстрее по сравнению со спектральным алгоритмом, реализованным на GPU.

На рис. 5, где данные по сравнению скорости работы алгоритмов сведены в виде графиков, видно, что ускорение для ноутбука при увеличении как количества пространственных точек, так и числа гармоник (рис. 6) достигает определенного значения и далее не изменяется. Это обусловлено тем, что графический процессор на ноутбуке имеет небольшое количество ядер, способных выполнять параллельные процессы, а также небольшой объем памяти, ограничивающий вместимость обрабатываемых данных. Поэтому при больших параметрах входного массива возникает необходимость передавать его из памяти CPU в память GPU по частям, что занимает дополнительное время. Также небольшое количество ядер дает возможность обрабатывать лишь соответствующее число потоков одновременно. Ускорение вычислений, реализованных на более мощном компьютере (ПК), растет для всех видов по-

Таблица 1. Сравнение скорости алгоритмов на основе метода Годунова для CPU и GPU и с использованием спектрального метода для GPU, при выполнении расчетов на ноутбуке, для количества гармоник $N = 1000$ для различного количества M профилей

Количество точек пространства M		100	500	1000	5000	10000
Время T , с	CPU (TD Godunov)	30.7	156	324	1562	3023
	GPU (TD Godunov)	3.5	12.2	22	55	108
	GPU (FD RK4)	2	11.6	36.8	141	282
T_{CPU_G}/T_{GPU_G}		8.3	12.8	14.8	28.4	28
$T_{GPU_{RK4}}/T_{GPU_G}$		0.57	0.95	1.67	2.56	2.6

Таблица 2. Сравнение скорости алгоритмов на основе метода Годунова для CPU и GPU и с использованием спектрального метода для GPU, при выполнении расчетов на ноутбуке, для количества точек пространства $M = 2500$ и различного числа гармоник N

Число гармоник N		50	250	500	1000	1500
Время T , с	CPU (TD Godunov)	73	371.5	738.6	1476	2214
	GPU (TD Godunov)	3.8	14.4	27.7	56.1	83.2
	GPU (FD RK4)	0.8	19.7	79.1	316	713
T_{CPU_G}/T_{GPU_G}		19.2	25.8	26.7	26.4	26.6
$T_{GPU_{RK4}}/T_{GPU_G}$		0.21	1.37	2.85	5.6	8.6

Таблица 3. Сравнение скорости алгоритмов на основе метода Годунова для CPU и GPU и с использованием спектрального метода для GPU, при выполнении расчетов на стационарном компьютере, для количества гармоник $N = 1000$ для различного количества M профилей

Количество точек пространства M		100	500	1000	5000	10000
Время T , с	CPU (TD Godunov)	7.1	35.8	71.1	355	712
	GPU (TD Godunov)	2.1	7.3	7.8	14.1	21.2
	GPU (FD RK4)	0.03	8.0	9.0	24.4	48
T_{CPU_G}/T_{GPU_G}		3.4	4.9	9.1	25	33.6
$T_{GPU_{RK4}}/T_{GPU_G}$		0.01	1.1	1.2	1.7	2.3

строенных зависимостей, что обусловлено большей мощностью и объемом памяти его GPU.

В случае сравнения скорости работы алгоритмов, реализованных с использованием метода Годунова на CPU и GPU, достигаемое ускорение на ПК меньше, чем на ноутбуке. Это обусловлено

большей мощностью центрального процессора ПК. Важным результатом является значительное ускорение, достигаемое в расчетах на ПК при увеличении числа гармоник в случае использования временного метода по сравнению со спектральным методом.

Таблица 4. Сравнение скорости алгоритмов на основе метода Годунова для CPU и GPU и с использованием спектрального метода для GPU, при выполнении расчетов на стационарном компьютере, для количества точек пространства $M = 2500$ и различного числа гармоник N

Число гармоник N		50	100	500	1000	1500
Время T , с	CPU (TD Godunov)	18.7	91.4	182.8	384	576
	GPU (TD Godunov)	1.6	7.0	13.7	27.4	40.9
	GPU (FD RK4)	1.4	35.6	142.4	569	1281
T_{CPU_G}/T_{GPU_G}		11.7	13.0	13.34	14.0	14.1
T_{CPU_G}/T_{GPU_G}		0.88	5.0	10.39	20.7	31.3

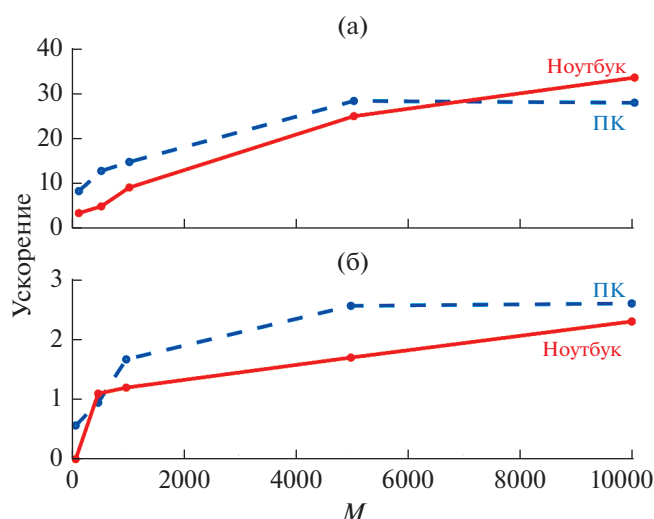


Рис. 5. Зависимость ускорения работы алгоритма на основе метода Годунова, реализованного на GPU: (а) — по сравнению с версией для CPU, (б) — по сравнению со спектральным алгоритмом на GPU в зависимости от размера буфера M .

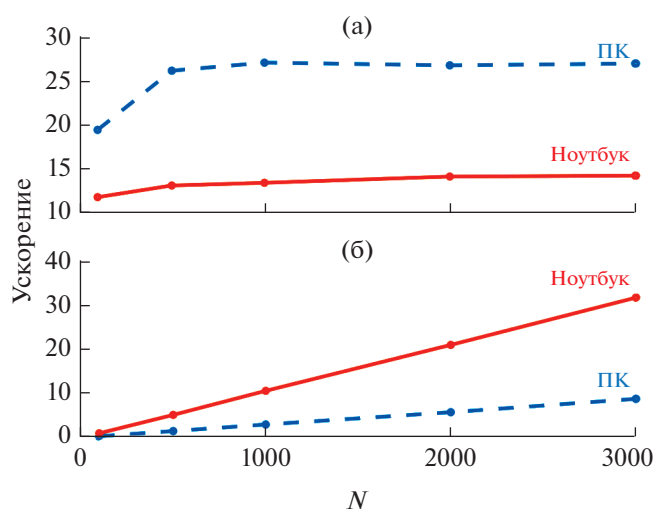


Рис. 6. Зависимость ускорения работы алгоритма на основе метода Годунова, реализованного на GPU: (а) — по сравнению с версией для CPU, (б) — по сравнению со спектральным алгоритмом на GPU в зависимости от числа гармоник N .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе реализован численный алгоритм расчета нелинейных акустических эффектов на графических процессорах (GPU) с использованием удароуправляющей схемы типа Годунова. Расчеты на GPU позволили ускорить вычисления по сравнению с алгоритмом для CPU на порядок и более как для ноутбука, так и для более мощного персонального компьютера для всех рассматриваемых размеров массива данных. Кроме того,

для характерного числа гармоник ($N = 1000$), необходимого для описания высокоамплитудных ударных фронтов, реализация схемы Годунова на GPU дала выигрыш по времени на порядок по сравнению со спектральным алгоритмом в расчетах на персональном компьютере и в 5 раз на ноутбуке. Таким образом, было показано, что проведение вычислений на графических процессорах может эффективно применяться для решения нелинейных волновых задач с использованием удароуправляющих численных схем, работающих во временном представлении.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 20-12-00145.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бэйли М.Р., Хохлова В.А., Сапожников О.А., Карел С.Г., Крам Л.А. Физические механизмы воздействия терапевтического ультразвука на биологическую ткань. (Обзор) // Акуст. журн. 2003. Т. 49. № 4. С. 437–464.
2. Rosnitskiy P.V., Yuldashev P.V., Sapozhnikov O.A. et al. Design of HIFU transducers for generating specified nonlinear ultrasound fields // IEEE Trans. Ultrason. Ferr. Freq. Control. 2016. V. 64. №. 2. P. 374–390.
3. Швецов И.А., Шербинин С.А., Астафьев П.А., Мойса М.О., Рыбьянец А.Н. Численное моделирование и оптимизация акустических полей и конструкций фокусирующих ультразвуковых преобразователей высокой интенсивности // Известия Росс. Акад. наук. Сер. физич. 2018. Т. 82. № 3. С. 355–358.
4. Карзова М.М., Юлдашев П.В., Росницкий П.Б., Хохлова В.А. Численные подходы к описанию нелинейных ультразвуковых полей медицинских диагностических датчиков // Известия Росс. Акад. наук. Сер. физич. 2017. Т. 81. № 8. С. 927–931.
5. Westervelt P.J. Parametric acoustic array // J. Acoust. Soc. Am. 1963. V. 35. №. 4. P. 535–537.
6. Kreider W., Yuldashev P.V., Sapozhnikov O.A., Farr N., Partanen A., Bailey M.R., Khokhlova V.A. Characterization of a multi-element clinical HIFU system using acoustic holography and nonlinear modeling // IEEE Trans. Ultrason. Ferr. Freq. Control. 2013. V. 60. №. 8. P. 1683–1698.
7. Okita K., Ono K., Takagi S., Matsumoto Y. Development of high intensity focused ultrasound simulator for large-scale computing // Int. J. Numer. Meth. Fluids. 2010. V. 65. № 1–3. P. 43–66.
8. Ames W.F. Numerical methods for partial differential equations. Academic, San Diego, 3rd ed. 2014. P. 380.
9. Юлдашев П.В., Хохлова В.А. Моделирование трехмерных нелинейных полей ультразвуковых терапевтических решеток // Акуст. журн. 2011. Т. 57. № 3. С. 337–347.
10. Bawiec C.R., Khokhlova T.D., Sapozhnikov O.A. et al. A prototype therapy system for boiling histotripsy in abdominal targets based on a 256-element spiral array // IEEE T. Ultrason. Ferr. 2021. V. 68. № 5. P. 1496–1510.

11. *Переёлкин Е.Е., Садовников Б.И., Иноземцева Н.Г.* Вычисления на графических процессорах (GPU) в задачах математической и теоретической физики. М.: Ленанд, 2014. 176 с.
12. *Коннова Е.О., Юлдашев П.В., Хохлова В.А.* Использование графических ускорителей при моделировании нелинейных ультразвуковых пучков на основе уравнения Вестервелта // Известия Росс. Акад. наук. Сер. физич. 2021. Т. 85. № 6. С. 811–816.
13. *Аверьянов М.В.* Экспериментальная и численная модель распространения нелинейных акустических сигналов в турбулентной атмосфере. Дисс. на соискание степ. канд. физ.-мат.наук. МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, 2008.
14. *Lee Y.-S., Hamilton M.F.* Time-domain modeling of pulsed finite-amplitude sound beams // J. Acoust. Soc. Am. 1995. V. 97. № 2. P. 906–917.
15. *Kurganov A., Tadmor E.* New high-resolution central schemes for nonlinear conservation laws and convection–diffusion equations // J. Comput. Phys. 2000. V. 160. № 1. P. 241–282.
16. *Кащеева С.С., Сапожников О.А., Хохлова В.А., Аверкью М.А., Крам Л.А.* Нелинейное искажение и поглощение мощных акустических волн в среде со степенной зависимостью коэффициента поглощения от частоты // Акуст. журн. 2000. Т. 46. № 2. С. 211–219.
17. *Руденко О.В., Солуян С.И.* Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975. С. 288.