

УДК 534.222

ВОЗМУЩЕНИЯ МОДАЛЬНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ЗАТУХАНИЯ И ГРУППОВЫХ СКОРОСТЕЙ, ВЫЗВАННЫЕ ВАРИАЦИЯМИ ГЛУБИНЫ ВДОЛЬ АКУСТИЧЕСКОЙ ТРАССЫ В МЕЛКОМ МОРЕ

© 2022 г. А. Д. Захаренко^а, *, П. С. Петров^а, **

^аФедеральное государственное бюджетное учреждение науки Тихоокеанский океанологический институт им. В.И. Ильичева ДВО РАН,
ул. Балтийская 43, Владивосток, 690041 Россия

*e-mail: zakharenko@poi.dvo.ru

**e-mail: petrov@poi.dvo.ru

Поступила в редакцию 20.06.2022 г.

После доработки 06.07.2022 г.

Принята к публикации 27.07.2022 г.

Рассмотрено возмущение коэффициентов затухания и групповых скоростей акустических мод в волноводе мелкого моря с неоднородным рельефом дна. Построены явные формулы для расчета первых и вторых производных указанных величин по глубине моря, основанные на теории возмущений, разработанной в предыдущих работах авторов. Применение полученных формул проиллюстрировано в модельном примере. Показано, что они позволяют с высокой точностью аппроксимировать зависимость групповых скоростей и модальных коэффициентов затухания от глубины моря. Предложенные формулы могут использоваться для получения простых аналитических оценок потерь при распространении звука в нерегулярных волноводах, а также для учета неоднородностей рельефа дна при выполнении геоакустической инверсии по данным о волноводной дисперсии сигнала.

Ключевые слова: акустика мелкого моря, метод нормальных волн, групповые скорости, модальные коэффициенты затухания, нерегулярный волновод

DOI: 10.31857/S0320791922060144

ВВЕДЕНИЕ

Известно, что неоднородности рельефа дна являются одним из наиболее важных факторов, определяющих характер распространения звука в мелком море [1, 2]. Они существенным образом изменяют не только интерференционную картину акустического поля, но также и скорость убывания его энергетических характеристик по мере удаления от источника. В случае импульсных сигналов вариации глубины могут также оказывать существенное влияние на их дисперсию при распространении в геоакустических волноводах на шельфе [3–5].

Правильный учет указанных зависимостей необходим при решении многих практических задач акустики океана, в том числе в задачах геоакустической инверсии, мониторинга антропогенных акустических шумов, а также при организации систем акустической навигации и дальнометрии [4–9]. С другой стороны, расчет акустических полей и различных их характеристик в нерегулярных волноводах мелкого моря представляет собой сложную математическую задачу [10–12], полное решение которой сопряжено с большими

вычислительными затратами, которые не всегда приемлемы на практике.

В предшествующих работах [13, 14] была показана возможность существенного сокращения вычислительных затрат при расчете звуковых полей в волноводах переменной глубины в рамках модовой теории. Вместо многократного решения спектральной задачи предлагалось решить ее в одной или нескольких опорных точках трассы, а в остальных точках аппроксимировать горизонтальные волновые числа и собственные функции мод рядами Тейлора, коэффициенты которых были вычислены в указанных работах. В настоящем исследовании мы проводим дальнейшее развитие этого подхода и предлагаем методику аппроксимации групповых скоростей мод и модальных коэффициентов затухания [1, 2] (мнимых частей горизонтальных волновых чисел).

Пусть $k_j(r)$ и $\phi_j(z, r)$ — суть решения следующей задачи Штурма–Лиувилля, возникающей при вычислении мод в поперечном сечении геоакустического волновода мелкого моря при данном значении r [2]:

$$\begin{cases} \frac{d^2\phi_j}{dz^2} + \frac{\omega^2}{(c(z))^2}\phi_j = k_j^2\phi_j, & z \in (0, h) \cup (h, H], \\ \phi_j|_{z=0} = 0, \\ \phi_j|_{z=H} = 0, \\ \phi_j|_{z=h^-} = \phi_j|_{z=h^+}, \\ \frac{1}{\rho} \frac{d\phi_j}{dz} \Big|_{z=h^-} = \frac{1}{\rho} \frac{d\phi_j}{dz} \Big|_{z=h^+}. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь $\omega = 2\pi f$ – частота звука, $z = h(r)$ – зависящая от удаления от источника r глубина моря, $c = c(z)$ – профиль скорости звука в водном слое (который в масштабах задачи разумно считать не зависящим от r), $\rho(z)$ – плотность, имеющая разрыв первого рода на границе раздела вода–дно, а $z = H$ – нижняя граница расчетной области. Мы ограничиваем область снизу, чтобы не иметь дела с непрерывным спектром. В рамках данной работы мы для простоты будем считать дно однородным слоем переменной толщины $H - h(r)$.

Предположим, что нерегулярность волновода связана исключительно с перепадами $\Delta h(r)$ глубины моря $h = h_0 + \Delta h(r)$ вдоль акустической трассы, в то время как зависимость скорости звука $c(z)$ от глубины одинакова во всей рассматриваемой области. Тогда k_j , ϕ_j , которые параметрически зависят от r , можно считать функциями от h . Считая эти функции гладкими, мы будем рассматривать их разложения в ряд Тейлора

$$k_j(r) \sim k_{j,0} + k'_{j,0}\Delta h(r) + \frac{1}{2}k''_{j,0}(\Delta h(r))^2 + \dots, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \phi_j(z, r) &\sim \phi_{j,0}(z) + \phi'_{j,0}(z)\Delta h(r) + \\ &+ \frac{1}{2}\phi''_{j,0}(z)(\Delta h(r))^2 + \dots, \end{aligned} \quad (3)$$

где $h = h_0 + \Delta h(r)$, штрих обозначает производную по h , а $k_{j,0}$, $\phi_{j,0}$ – суть решения спектральной задачи (1) при $h = h_0$.

В работах [6, 10] с применением стандартной теории возмущений найдены производные волнового числа по глубине $k'_{j,0} = \frac{1}{h_0}k_{j,1}$, $k''_{j,0} = \frac{1}{h_0^2}k_{j,2}$, $k'''_{j,0} = \frac{1}{h_0^3}k_{j,3}$, а также соответствующие производные модовых функций

$$\begin{aligned} \frac{d\phi_j}{dh} \Big|_{h=h_0} &= \frac{1}{h_0} \left(-\frac{\phi_{j,0}}{2} - z \frac{\partial \phi_{j,0}}{\partial z} + \phi_{j,1} \right) \Big|_{h=h_0}, \\ \frac{d^2\phi_j}{dh^2} \Big|_{h=h_0} &= \frac{1}{h_0^2} \left(\frac{3\phi_{j,0}}{4} + 3z \frac{\partial \phi_{j,0}}{\partial z} - \phi_{j,1} + \right. \\ &\left. + z^2 \frac{d^2\phi_{j,0}}{dz^2} - 2z \frac{\partial \phi_{j,1}}{\partial z} + \phi_{j,2} \right) \Big|_{h=h_0}, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\phi_{j,1}, \phi_{j,2}$ представляются в виде рядов по собственным функциям невозмущенной задачи Штурма–Лиувилля (1) при $h = h_0$.

Мы не приводим здесь выражения для $k_{j,1}, k_{j,2}, k_{j,3}$ и для $\phi_{j,1}, \phi_{j,2}$, ввиду их громоздкости, отсылая читателя к работам [13, 14] (отметим, однако, что формула для $k_{j,1}$ приведена ниже при обсуждении производных групповых скоростей мод).

Отметим, что, как это обычно бывает в теории возмущений, выражения $\phi_{j,1}, \phi_{j,2}$, входящие в формулу (4), содержат ряды по собственным функциям $\phi_{j,0}$ невозмущенной спектральной задачи. Для того чтобы формулы (2) и (3) обеспечивали высокую точность аппроксимации, при суммировании этих рядов недостаточно одних лишь водных мод, и необходимо учесть “донные” моды. Этим мод в нашем случае счетное число, что обеспечивается искусственным ограничением расчетной области при $z = H$. Как было отмечено в [14], указанные ряды сходятся достаточно быстро, и учет лишь небольшого числа донных мод (аппроксимирующих вклад непрерывного спектра, который возникает при устремлении H к бесконечности) оказывается достаточным для решения практических задач (требуется 10–20 донных мод на частотах порядка 100–300 Гц).

ВОЗМУЩЕНИЕ МОДАЛЬНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ЗАТУХАНИЯ, ВЫЗВАННОЕ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ РЕЛЬЕФА ДНА

Если математическая модель предусматривает поглощение среды (в вычислительном отношении задачу (1) выгоднее оставить самосопряженной, а мнимую часть горизонтальных волновых чисел рассчитывать методом возмущений), то при построении акустического поля необходимо учитывать мнимые части волновых чисел, которые могут быть найдены по формуле [1, 2]

$$\alpha_j = \frac{\omega^2}{k_j} \int_0^H \frac{\beta(z)\phi_j^2(z)}{\rho(z)c^2(z)} dz, \quad (5)$$

где $\beta(z)$ — зависимость коэффициента поглощения звука в среде от глубины (обычно исчисляемая в дБ на длину волны).

Нашей целью является вычисление первой и второй производных $\alpha'_{j,0}, \alpha''_{j,0}$ для дальнейшей аппроксимации $\alpha_j(r)$ рядом Тейлора, подобным (2). Для простоты будем полагать $\beta(z)$ равным нулю в водном слое и некоторой положительной константе β в верхнем слое дна (скорость звука и плотность в этом слое обозначим c_b и ρ_b). Мы также ограничимся рассмотрением коэффициентов затухания водных мод, экспоненциально затухающих в дне.

Для нахождения производных $\partial\alpha_j/\partial h$ продифференцируем (5) по h :

$$\frac{d\alpha_j}{dh} = -\frac{dk_j}{dh} \frac{1}{k_j} \alpha_j + \frac{2}{k_j} \int_h^H \beta Q \frac{\phi_j(z)}{\rho(z)} \frac{d\phi_j(z)}{dh} dz - \frac{1}{k_j} \beta Q \frac{\phi_j^2(h)}{\rho_b}, \quad (6)$$

где использовано обозначение $Q = \omega^2/c_b^2$.

Подставляя выражения для $dk_j/\partial h$, $d\phi_j/\partial h$, интегрируя по частям и переходя к пределу $h \rightarrow h_0$, получаем

$$\frac{d\alpha_j}{dh} \Big|_{h=h_0} = \frac{1}{h_0} \left(-\frac{k_{j,1}}{k_{j,0}} \alpha_{j,0} + \frac{2}{k_j} \int_{h_0}^H \beta Q \frac{\phi_{j,0}(z)\phi_{j,1}(z)}{\rho(z)} dz \right). \quad (7)$$

Далее, дифференцируя (6), находим

$$\begin{aligned} \frac{d^2\alpha_j}{dh^2} = & -\frac{1}{k_j} \frac{d^2k_j}{dh^2} \alpha_j - \frac{2}{k_j} \frac{dk_j}{dh} \frac{d\alpha_j}{dh} + \\ & + \frac{2}{k_j} \int_h^H \beta Q \frac{\phi_j(z)}{\rho(z)} \frac{d^2\phi_j(z)}{dh^2} dz - \\ & - \frac{1}{k_j} \beta Q \frac{d}{dh} \left(\frac{\phi_j^2(h)}{\rho_b} \right) + \frac{2}{k_j} \int_h^H \beta Q \left(\frac{d\phi_j(z)}{dh} \right)^2 dz - \\ & - \frac{2}{k_j} \beta Q \frac{\phi_j(h)}{\rho_b} \frac{d\phi_j}{dh}(h). \end{aligned} \quad (8)$$

Переходя в последнем выражении к пределу $h \rightarrow h_0$, с использованием интегрирования по частям, получаем окончательную формулу

$$\begin{aligned} \frac{d^2\alpha_j}{dh^2} \Big|_{h=h_0} = & \frac{1}{h_0^2} \left(-\frac{k_{j,2}}{k_{j,0}} \alpha_{j,0} - 2 \frac{k_{j,1}}{k_j} \frac{d\alpha_j}{dh} \Big|_{h=h_0} + \right. \\ & + \frac{2}{k_j} \int_{h_0}^H \beta Q \frac{\phi_{j,0}(z)\phi_{j,2}(z)}{\rho} dz + \\ & \left. + \frac{2}{k_j} \int_{h_0}^H \beta Q \frac{\phi_{j,1}^2(z)}{\rho} dz \right). \end{aligned} \quad (9)$$

ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ α_j

На основании полученных формул можно исследовать поведение функций $\alpha_j(h)$, определив знаки производных в (7) и (9). Далее мы предполагаем, что $k_{j,1} > 0$ и $k_{j,2} < 0$. Эти неравенства обычно удовлетворяются для водных мод в волноводах, близких к волноводу Пекериса. Действительно, если мы не находимся вблизи глубины отсечки, то зависимости $k_j(h)$ схожи с зависимостями, имеющими место в волноводе с идеально

отражающими стенками, где $k_j(h) = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2 j^2}{h^2}}$.

Дифференцируя данное выражение, легко убедиться, что указанные неравенства справедливы. Разумеется, для сложных зависимостей $c(z)$ они могут нарушаться в отдельных точках, однако в наиболее типичных ситуациях они выполняются.

Так как мы рассматриваем только моды, распространяющиеся в водном слое, то при $z > h$ функции $\phi_{j,0}(z)$ будут иметь вид

$$\phi_{j,0}^b(z) = C_j(h) \exp(\sqrt{\lambda_j}(h-z)), \quad (10)$$

где $\lambda_j = k_j^2 - Q$ и $C_j(h)$ — некоторая константа (положительная или отрицательная), зависящая от номера моды и от h . Таким образом, при $z > h$ функции $\phi_{j,0}^b(z)$ для водных мод являются либо положительными убывающими, либо отрицательными возрастающими.

Функции $\phi_{j,1}^b(z)$ и $\phi_{j,2}^b(z)$, по построению являющиеся рядами из функций $\phi_{j,0}^b(z)$, по-видимому, ведут себя схожим образом, однако ответ на вопрос о том, какой знак имеет произведение $\phi_{j,0}^b(z)\phi_{j,n}^b(z)$, $n = 1, 2$, неочевиден.

Тем не менее, поскольку скорость звука c_b в донном слое предполагается постоянной, мы можем проинтегрировать соответствующие уравнения и найти явный вид решений. Уравнение для $\phi_{j,1}^b(z)$ имеет вид [14]

$$\frac{d^2\phi_{j,1}^b}{dz^2} + (Q - k_{j,0}^2)\phi_{j,1}^b = 2((k_{j,0}^2 - Q) + k_{j,0}k_{j,1})\phi_{j,0}^b. \quad (11)$$

Обозначим $A = 2((k_{j,0}^2 - Q) + k_{j,0}k_{j,1})$. Очевидно, что $A > 0$, и правая часть (11) имеет вид $AC_j(h) \exp(\sqrt{\lambda_j}(h-z))$, тогда решением (11) будет

$$\phi_{j,1}^b = -\frac{AC(h)}{4\lambda} (1 + 2\sqrt{\lambda}z) e^{\sqrt{\lambda_j}(h-z)}. \quad (12)$$

Таким образом, $\phi_{j,1}^b(z)$ также представляет собой показательную функцию со знаком, противоположным знаку $\phi_{j,0}^b(z)$. Таким же образом можно показать, что знак функции $\phi_{j,2}^b(z)$ совпадает со знаком $\phi_{j,0}^b(z)$. Отсюда можно сделать вывод, что $\phi_{j,0}^b(z)\phi_{j,1}^b(z) < 0$ и $\frac{d\alpha_j}{dh} < 0$, а значит, для второй производной модального коэффициента затухания (9), как правило (при выполнении неравенств, приведенных в начале раздела), выполняется соотношение $\frac{d^2\alpha_j}{dh^2} > 0$.

Отметим, что в этом разделе мы пользуемся формулой (10), которая верна только при $H \rightarrow \infty$ (см. задачу (1)). В практических расчетах однако H выбирается настолько большим, что модовые функции при $z > h$ фактически не отличимы от убывающих экспонент (коэффициент при экспоненте, возрастающей с глубиной, на несколько порядков меньше $C_j(h)$), и приведенные здесь рассуждения сохраняют свою истинность, хотя и исключительно на физическом уровне строгости.

ПРОИЗВОДНЫЕ ГРУППОВЫХ СКОРОСТЕЙ ПО ГЛУБИНЕ МОРЯ

В этом разделе мы покажем, каким образом поправки к решению спектральной задачи можно использовать для оценки времен распространения звука вдоль трассы, а также для расчета дисперсионных кривых, которые, например, могут быть использованы при решении задач геоакустической инверсии [3, 15].

Известно, что общее время распространения звука вдоль трассы длиной R определяется формулой

$$\tau_j = \int_0^R W_j(r) dr, \quad (13)$$

где $W_j(r)$ – величина, обратная модовой групповой скорости V_j , которая может быть найдена по формуле

$$W_j = \frac{1}{V_j} = \frac{\omega}{k_j} \int_0^H \frac{\phi_j^2(z)}{\rho(z)c^2(z)} dz. \quad (14)$$

При решении задач геоакустической инверсии возникает необходимость расчета дисперсионных кривых, т.е. зависимостей $\tau_j = \tau_j(f)$ (f – частота звука) для обширного интервала значений f . С учетом необходимости делать это многократно при наличии вариации глубины вдоль трассы, представляется весьма привлекательной возможностью аппроксимировать $W(r)$ рядом Тейлора

$$W_j(r) = W_{j,0} + W'_{j,0}\Delta h(r) + \frac{1}{2}W''_{j,0}(\Delta h(r))^2. \quad (15)$$

Если при этом h_0 выбрано таким (наиболее естественным) образом, что $\int_0^R \Delta h(r) dr = 0$, то общее время распространения вдоль трассы длиной R сводится к выражению

$$\tau_j = W_{j,0}R + \frac{1}{2}W''_{j,0} \int_0^R (\Delta h(r))^2 dr. \quad (16)$$

Из формулы ясно, что важное значение имеет именно вторая производная W_j по глубине. В зависимости от знака этой величины модальные компоненты акустического сигнала будут распространяться быстрее или, наоборот, медленнее, чем в волноводе сравнения с усредненной глубиной моря h_0 .

Покажем, что производные $W'_{j,0}, W''_{j,0}$ могут быть найдены непосредственно из поправок к волновым числам $k_{j,1}, k_{j,2}, k_{j,3}$. В случае, когда задан некоторый профиль скорости звука в воде $c_w = c(z)$, имеем для $k_{j,1}$ [14]

$$k_{j,1} = -\frac{k_{j,0}}{h} + \frac{1}{hk_{j,0}} \int_0^H Q(z) \frac{(\phi_{j,0}(z))^2}{\rho(z)} dz + \frac{1}{2k_{j,0}} \int_0^H zQ'(z) \frac{(\phi_{j,0}(z))^2}{\rho(z)} dz, \quad (17)$$

где $Q'(z)$ – производная Q по z . Отсюда получаем, что

$$W_{j,0} = \frac{1}{\omega} (h\tilde{k}_{j,1} + k_{j,0}), \quad (18)$$

где

$$\tilde{k}_{j,1} = \frac{k_{j,0}}{h} + \frac{1}{hk_{j,0}} \int_0^H Q(z) \frac{(\phi_{j,0}(z))^2}{\rho(z)} dz.$$

Дифференцируя это выражение по h , получаем

$$\begin{aligned} W'_{j,0} &= \frac{1}{\omega} (\tilde{k}_{j,1} + h\tilde{k}_{j,2} + k_{j,1}), \\ W''_{j,0} &= \frac{1}{\omega} (2\tilde{k}_{j,2} + h\tilde{k}_{j,3} + k_{j,2}), \end{aligned} \quad (19)$$

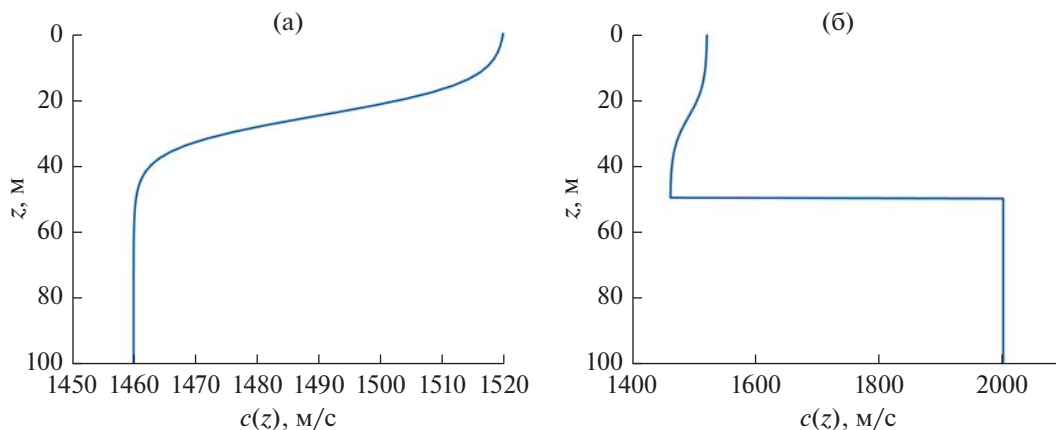


Рис. 1. (а) – Зависимость скорости звука от глубины в водном слое, а также (б) – с учетом верхнего слоя дна.

где

$$\begin{aligned} \tilde{k}_{j,2} &= 3k_{j,0} - \frac{\tilde{k}_{j,1}^2}{k_{j,0}} + \frac{2}{k_j^{(0)}} \int_0^H Q \frac{\phi_{j,1}\phi_{j,0}}{\rho} dz - \\ &\quad - \frac{3}{k_{j,0}} \int_0^H Q \frac{\phi_{j,0}^2}{\rho} dz, \\ \tilde{k}_{j,3} &= -6 \left(k_{j,1} + k_{j,2} + \frac{k_{j,1}^2}{k_{j,0}} + \frac{k_{j,1}k_{j,2}}{2k_{j,0}} \right) + \\ &\quad + \frac{3}{k_{j,0}} \int_0^H Q \frac{(\phi_{j,2} + \phi_{j,1})\phi_{j,0}}{\rho} dz. \end{aligned} \quad (20)$$

В заключение этого раздела отметим еще, что, в отличие от модальных коэффициентов затухания, относительно зависимостей групповых скоростей от глубины ни в каких разумных предположениях нельзя доказать общих утверждений о характере их выпуклости (см. пример в следующем разделе). По-видимому, величины W_j положительны для волноводов, сходных по параметрам с волноводом Пекериса. Это же утверждение выполняется и для водных мод больших номеров в волноводах с типичными профилями скорости звука.

ЧИСЛЕННЫЕ ПРИМЕРЫ

В качестве модельного примера рассмотрим двуслойный волновод общей глубиной $H = 200$ м при частоте звука $f = 100$ Гц. Пусть глубина моря h варьируется в интервале от 40 до 60 м (это характерные глубины, например, для сахалинского шельфа, а также для залива Петра Великого в Японском море). Профиль скорости звука в водном слое (рис. 1) будем описывать выражением

$$c_w(z) = c_0 - d \operatorname{th} \left(\frac{z - z_0}{\sigma} \right),$$

где $c_0 = 1490$ м/с, $z_0 = 25$ м, $d = 30$ м/с, $\sigma = 10$ м. Скорость звука в донном слое примем равной $c_b = 2000$ м/с, а плотность в воде и дне, соответственно, равны $\rho_w = 1$, $\rho_b = 2$ г/см³. Коэффициент поглощения звука в дне β равен 0.5 дБ/л. Отметим, что рассматриваемый профиль хорошо параметризует типичные зависимости скорости звука от глубины на шельфе Японского моря в теплый сезон и характеризуется выраженным сезонным термоклинном, наличие которого, как видно из предыдущих разделов, некоторым образом усложняет формулы теории возмущения.

Для построения эталонных решений спектральная задача (1) была решена 20 раз для всех значений глубины моря от 40 до 60 м с использованием разработанной в ТОИ ДВО РАН библиотеки `ac_modes` [16]. Формулы теории возмущений, полученные в данной работе, использовались для $h_0 = 50$ м. Отметим, что в рассматриваемом волноводе для разных значений h возбуждается 3–4 водных моды, причем глубина отсечки четвертой моды составляет 42 м.

На рис. 2 представлены аппроксимации модальных коэффициентов затухания по формулам теории возмущения первого и второго порядка для первой, второй и четвертой водных мод. Видно, что, во-первых, функции являются выпуклыми вниз (как и предсказано в разделе, посвященном исследованию функций α_j). Кроме того, формулы второго порядка обеспечивают очень хорошее приближение эталонных кривых во всех случаях, кроме случая четвертой моды вблизи глубины ее отсечки.

На рис. 3 представлены аппроксимации групповых скоростей, полученные с использованием формул (15) для первой, второй и четвертой мод рассматриваемого волновода. Вновь можно кон-

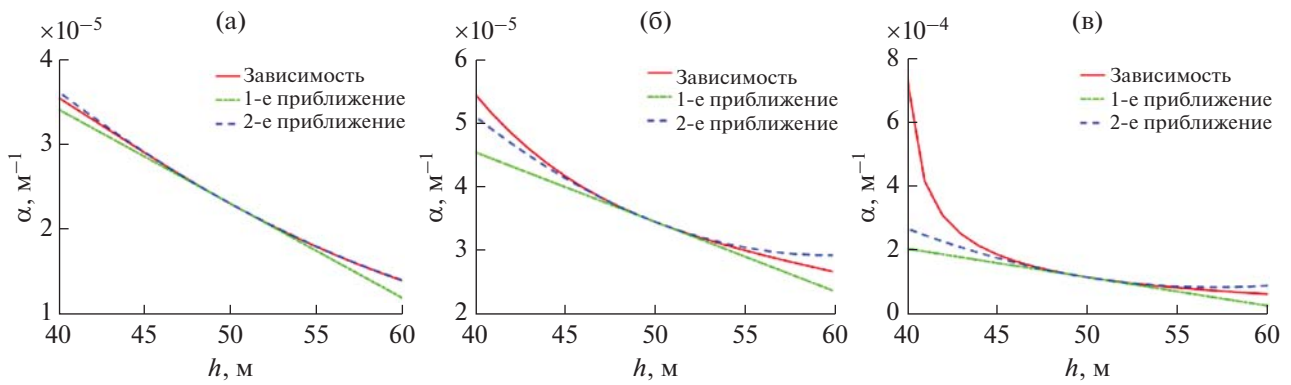


Рис. 2. Зависимость модальных коэффициентов затухания от глубины моря для (а) — первой, (б) — второй и (в) — четвертой мод.

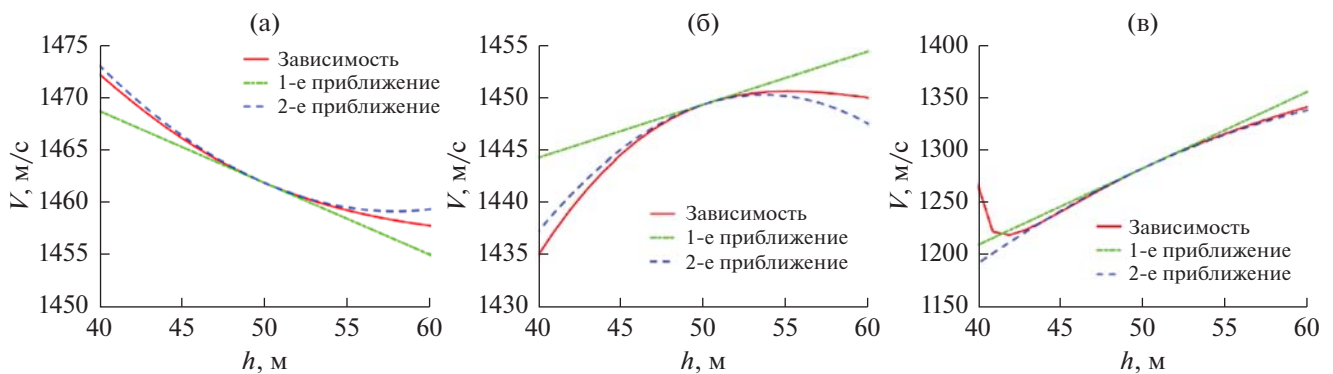


Рис. 3. Зависимости групповых скоростей (а) — первой, (б) — второй и (в) — четвертой мод от глубины моря, а также их аппроксимации первого и второго порядков по формуле (15).

статировать, что полученные формулы обеспечивают достаточно точное для практического применения приближение эталонных кривых, и исключение вновь составляет лишь четвертая мода в окрестности глубины ее отсечки. Как это обычно бывает при использовании асимптотических методов, точную оценку ошибки аппроксимации привести затруднительно, так как на практике она зависит от множества различных параметров волновода.

Важно отметить, что график первой моды является выпуклым вниз, в то время как графики мод 2–4 оказываются вогнутыми (выпуклыми вверх). Физически этот факт означает, что первая мода в реальном волноводе с перепадами глубин от 40 до 60 м (при средней глубине 50 м) будет распространяться несколько быстрее, чем в волноводе сравнения с постоянной глубиной 50 м, в то время как 2–4 моды в волноводе с неоднородностями рельефа дна, наоборот, будут распространяться медленнее.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе вычислены производные модальных коэффициентов затухания и групповых скоростей мод по глубине моря. Помимо академического интереса, который представляет исследование указанных зависимостей, полученные формулы позволяют приближать их с помощью полиномов Тейлора первого и второго порядков. Такого рода приближения могут быть полезны при решении различных практических задач акустики мелкого моря, где требуется многократное решение акустической спектральной задачи в волноводе с меняющейся вдоль трассы глубиной. В частности, формулы (15) позволяют выполнять геоакустическую инверсию параметров дна волновода с учетом вариаций глубины моря между точками приема и излучения без дополнительных вычислительных затрат по сравнению с аналогичной инверсионной процедурой, выполняемой в предположении о постоянстве глубины. Поскольку задачи геоакустической инверсии и так очень трудоемки в вычислительном

отношении, то дополнительное кратное увеличение вычислительной стоимости, необходимое для учета вариаций глубины “обычным” способом, представляется нежелательным. Заметим, что с несколько иной точки зрения вопрос о влиянии неоднородностей батиметрии на точность решения задач геоакустической инверсии рассмотрен в недавней работе [3].

Отметим также непосредственные и интересные с нашей точки зрения физические следствия, которые можно извлечь из построенной здесь теории. Во-первых, анализ характера выпуклости зависимостей модальных коэффициентов затухания от глубины показывает, что потери при распространении звука в волноводе с вариациями глубин относительного среднего значения будут всегда выше, чем в волноводе сравнения с постоянной средней глубиной.

Во-вторых, хотя аналогичного простого утверждения нельзя сделать относительно групповых скоростей мод, ясно, что неоднородности рельефа дна существенным образом меняют дисперсию импульсных акустических сигналов по сравнению с волноводом с постоянной усредненной глубиной моря. Формула (16), в частности, показывает, что в волноводе с неоднородным рельефом дна фактически имеет место два типа межмодовой дисперсии: первый связан с различием групповых скоростей мод для усредненной глубины h_0 , в то время как второй обусловлен тем, что групповые скорости разных мод неодинаковым образом реагируют на вариации глубины моря. Задержки, обусловленные дисперсией второго типа, при этом пропорциональны дисперсии флуктуаций рельефа дна вокруг среднего значения $\sigma_{\Delta h}^2$. Насколько нам известно, данный факт до сих пор не был отмечен в акустической литературе, хотя ряд результатов из работы [3], очевидно, имеет связь с данным утверждением.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-00171, <https://rscf.ru/project/22-11-00171/>.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Петров П.С., Голов А.А., Безответных В.В., Буренин А.В., Козицкий С.Б., Сорокин М.А., Моргунов Ю.Н. Экспериментальное и теоретическое исследование времен прихода и эффективных скоростей при дальнем распространении импульсных акустических сигналов вдоль кромки шельфа в мелком море // Акуст. журн. 2020. Т. 66. № 1. С. 20–33.
2. Рутенко А.Н., Боровой Д.И., Гриценко В.А., Петров П.С., Ущиповский В.Г. Акустический мониторинг и результаты исследований распространения сейсморазведочных импульсов в прибрежную зону // Акуст. журн. 2012. Т. 57. № 3. С. 356–369.
3. Моргунов Ю.Н., Голов А.А., Буренин А.В., Петров П.С. Исследование пространственно-временной структуры акустического поля, формируемого в глубоком море источником широкополосных импульсных сигналов, расположенным на шельфе Японского моря // Акуст. журн. 2019. Т. 65. № 5. С. 641–649.
4. Моргунов Ю.Н., Голов А.А., Каменев С.И., Матвиенко Ю.В. Средства и методы гидролого-акустического обеспечения высокоточного позиционирования подводных объектов на больших дальностях // Акуст. журн. 2019. Т. 65. № 6. С. 793–798.
5. Wu M., Barmin M., Andrew R., Weichman P., White A., Lavelly E., Dzieciuch M., Mercer J., Worcester P., Ritzwoller M. Deep water acoustic range estimation based on an ocean general circulation model: Application to PhilSea10 data // J. Acoust. Soc. Am. 2019. V. 146. P. 4754–4773.
6. Manul'chev D., Tyshchenko A., Fershalov M., Petrov P. Estimating sound exposure levels due to a broadband source over large areas of shallow sea // J. Marine Science and Engineering. 2022. V. 10. Art. No. 82.
7. Гулин О.Э. К расчетам низкочастотных акустических полей в нерегулярных волноводах при наличии сильного обратного рассеяния // Акуст. журн. 2008. Т. 54. № 4. С. 575–586.
8. Луньков А.А., Шерменева М.А. Спадание средней интенсивности звукового поля в мелководных волноводах с наклонным дном // Акуст. журн. 2019. Т. 65. № 5. С. 630–640.
9. Рутенко А.Н., Козицкий С.Б., Манульчев Д.С. Влияние наклонного дна на распространение звука // Акуст. журн. 2015. Т. 61. № 1. С. 76–89.
10. Zakharenko A.D., Trofimov M.Yu., Petrov P.S. Improving the performance of mode-based sound propagation models by using perturbation formulae for eigenvalues and eigenfunctions // J. Marine Science and Engineering. 2021. V. 9. № 9. Art. No. 934.
11. Zakharenko A.D., Trofimov M.Yu., Petrov P.S. Modal perturbation theory for the case of bathymetry variations in shallow-water acoustics // Rus. J. Math. Phys. 2021. V. 28. № 2. P. 257–262.
12. Bonnel J., Thode A., Wright D., Chapman R. Nonlinear time-warping made simple: A step-by-step tutorial on underwater acoustic modal separation with a single hydrophone // J. Acoust. Soc. Am. 2020. V. 147. № 3. P. 1897–1926.
13. Программный комплекс ac_modes. URL: https://github.com/kaustikos/ac_modes (дата обращения: 23.06.2022).