

ПРИМЕНЕНИЕ ВЕКТОРНО-СКАЛЯРНОГО ПРИЕМНИКА ДЛЯ АНАЛИЗА НАПРАВЛЕННЫХ СВОЙСТВ ПОЛЯ

© 2022 г. С. Г. Михайлов*

Институт общей физики им. А.М. Прохорова РАН, ул. Вавилова 38, Москва, 119991 Россия

**e-mail: s.mikhailov@mail.ru*

Поступила в редакцию 27.04.2022 г.

После доработки 24.05.2022 г.

Принята к публикации 26.05.2022 г.

Исследуется возможность изучения направленных свойств поля с помощью одиночного комбинированного векторно-скалярного приемника. Рассматривается математическая модель поля на основе пуассоновского процесса. Аналитически показана связь математического ожидания углового распределения модуля вектора Умова и плотности вероятности его аргумента (фазы) с угловой плотностью и угловой плотностью вероятности акустического поля в предельных случаях редких импульсов и гауссова приближения. На основе численного расчета анализируется эволюция указанных функций при изменении ширины частотной полосы анализа.

Ключевые слова: векторно-скалярный приемник, векторно-фазовые методы, угловая плотность поля, плотность вероятности модуля и фазы вектора Умова

DOI: 10.31857/S0320791922050070

ВВЕДЕНИЕ

Направленные свойства акустического поля обычно характеризуются угловым спектром. Угловой спектр является одной из важнейших характеристик поля и широко применяется при прогнозировании работоспособности различных гидроакустических устройств. Возможности устройства по угловому разрешению нескольких источников или выделению сосредоточенного источника на фоне помех тесно связаны с решением таких важных технических задач, как обнаружение и пеленгование. Для моделирования углового спектра используются как теоретические модели [1, 2], так и аппроксимации экспериментальных данных [3]. Для накопления экспериментальных данных, их обобщения и последующего уточнения представлений о процессах, формирующих шумовые поля, необходимо проводить исследования направленности морских (океанских) шумов в различных диапазонах частот. Экспериментально в условиях открытого моря оценка углового спектра обычно выполняется с помощью протяженных многоэлементных узконаправленных антенн [4–8], имеющих размер несколько десятков длин волн. Большие габариты этих устройств существенно усложняют проведение экспериментов. Кроме того, для многоэлементных антенн характерно значительное расширение характеристики направленности с

уменьшением частоты [5], что затрудняет анализ направленных свойств поля в этом диапазоне.

Комбинированный векторно-скалярный приемник (ВСП) [9] в отличие от протяженной антенны имеет размер существенно меньше длины волны и поэтому может входить в состав компактных средств исследования океана. ВСП включает в себя ненаправленный приемник давления (скалярная часть) и два или три приемных канала, имеющих взаимно перпендикулярные дипольные характеристики направленности (векторная часть). ВСП обладает следующей важной особенностью: характеристики направленности канала давления и каналов его векторной части близки к теоретическим и практически неизменны в широком диапазоне частот, достигающем до двух–трех декад. Это свойство позволяет анализировать широкополосные сигналы, принятые приемником, полагая характеристики направленности всех его каналов равными теоретическим и не зависящими от частоты. Будем также считать, что фазовые центры всех приемных каналов совпадают, а выходные сигналы каналов векторной части пропорциональны компонентам колебательной скорости.

ВСП применяется для решения различных гидроакустических задач [10]. Используемые при этом методы часто именуются векторно-фазовыми. Теоретическое изучение статистических свойств поля [11] и пеленгования [12] с помощью комби-

нированных приемников, выполненное для гауссовых (нормальных) полей, показало, что ВСП обладает весьма ограниченными возможностями по исследованию направленных свойств поля и разрешению локальных источников. Однако, известны экспериментальные данные ([10], с. 221), показывающие, что с помощью ВСП возможно разрешение, по крайней мере, двух источников. Это указывает на необходимость углубления понимания возможностей ВСП, что требует не только расширения представлений о статистических свойствах гауссова поля, но и применения модели морского шума, обладающей более широкими возможностями по варьированию свойств моделируемого поля.

МОДЕЛЬ ШУМОВОГО ПОЛЯ

В традиционных моделях [1, 2, 13] шумовое поле рассматривается как результат сложения гармонических волн, излучаемых многочисленными или иными источниками с равными среднеквадратическими интенсивностями, но со случайными фазами. Источники равномерно располагаются в объеме, на сфере, в конусе, на плоскости или прямой. Такие модели хорошо подходят для анализа свойств гауссовых полей и находящихся в них устройств в узкой полосе частот. Для исследования полей, формируемых широкополосными сигналами, требуется иной подход. Пример такого подхода изложен в [12]. Он основан на представлении, что события, приводящие к излучению шумов, происходят независимо друг от друга в различных точках водной толщи или на ее поверхностях. Считается, что некоторые из этих событий порождаются сходными процессами и при этом излучаются близкие по форме импульсы. Такими процессами могут быть: падение капель, разрушение гребней волн, растрескивание и торошение льда, звуки, издаваемые животными одного вида, схлопывание кавитационных пузырьков, некоторые виды технических шумов и т.п. Общей особенностью перечисленных процессов является то, что они создают короткие звуковые импульсы. В рамках модели рассматриваются статистические свойства акустического поля, создаваемого в безграничном однородном и изотропном пространстве источниками, находящимися на окружности достаточно большого радиуса r , лежащей в плоскости xOy . Такое приближение допустимо, поскольку в [1] отмечалось, что корреляционные характеристики поля при определенных условиях будут одинаковыми как в случае объемной изотропной модели, так и при расположении точечных источников на поверхности сферы большого радиуса. Плоская двумерная модель выбрана для сокращения объема формул и может

быть при необходимости преобразована в трехмерную.

Пусть поле формируется в результате последовательности событий, заключающихся в том, что в случайные моменты времени t_i в точках, лежащих на окружности радиуса r под углом φ_i , $-\pi \leq \varphi_i < \pi$, происходит кратковременный импульс, создающий в центре окружности изменение давления

$$p_i(t) = \frac{r_0}{r} a_i g(\varphi_i) s(t - t_i - r/c).$$

Здесь r_0 – единичный радиус, a и φ – независимые случайные величины, $g(\varphi)$ – неслучайная функция, $s(t)$ – ограниченный во времени импульс, $s(t) = 0$, если $t < -\tau/2$ и $t > \tau/2$, τ – длительность импульса, c – скорость звука в среде. Соответствующее такому случайному процессу давление в центре окружности равно:

$$p_s(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} p_i(t),$$

а компоненты колебательной скорости

$$v_x(t) = \frac{1}{\rho c} \sum_{i=-\infty}^{\infty} p_i(t) \cos(\varphi_i + \pi),$$

$$v_y(t) = \frac{1}{\rho c} \sum_{i=-\infty}^{\infty} p_i(t) \sin(\varphi_i + \pi),$$

где ρ – плотность среды. Происходит сдвиг фазы на π , так как импульс распространяется в сторону, противоположную источнику (см. рис. 1а). В качестве допустимого упрощения принято, что при достаточно большом r связь между скоростью и давлением во всем рассматриваемом частотном диапазоне соответствует плоской волне. Далее исследуется случайный процесс, имеющий нормированные составляющие:

$$P(t) = p_s(t), \quad X(t) = \rho c v_x(t), \quad Y(t) = \rho c v_y(t). \quad (1)$$

Согласно [12], если процесс (1) является пуассоновским, то его характеристическая функция имеет вид:

$$\begin{aligned} \Psi(u_1, u_2, u_3) = & \exp \left(q \int_{-\infty}^{\infty} w_a(a) da \int_{-\pi}^{\pi} w_\varphi(\varphi) d\varphi \times \right. \\ & \left. \times \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \exp \left[ia \sum_{j=1}^3 g_j(\varphi) s(t) u_j \right] - 1 \right\} dt \right). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь w_a и w_φ – плотности вероятности случайных величин a_i и φ_i , q – средняя частота появления импульсов, $g_1(\varphi) = g(\varphi)$, $g_2(\varphi) = -g(\varphi) \cos \varphi$ и $g_3(\varphi) = -g(\varphi) \sin \varphi$. Соответствующие кумулянты равны:

$$\kappa_{nkl} = (-1)^{k+l} q \int_{-\infty}^{\infty} a^{n+k+l} w_a(a) da \times \\ \times \int_{-\pi}^{\pi} g^{n+k+l}(\varphi) \cos^k \varphi \sin^l \varphi w_{\varphi}(\varphi) d\varphi \int_{-\infty}^{\infty} s^{n+k+l}(t) dt.$$

Величина $n + k + l$ – порядок кумулянта. Кумулянты первого порядка – средние значения, второго – центральные моменты второго порядка, т.е. дисперсии и функции взаимной корреляции процессов P, X, Y . Следовательно, дисперсия пульсаций давления равна:

$$\sigma_p^2 = \kappa_{200} = q \sigma_a^2 \sigma_s^2 \int_{-\pi}^{\pi} g^2(\varphi) w_{\varphi}(\varphi) d\varphi.$$

Здесь $\sigma_a^2 = \int_{-\infty}^{\infty} a^2 w_a(a) da$, $\sigma_s^2 = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt$. Аналогично вычисляются дисперсии компонент колебательной скорости:

$$\sigma_x^2 = \kappa_{020} = q \sigma_a^2 \sigma_s^2 \int_{-\pi}^{\pi} g^2(\varphi) \cos^2 \varphi w_{\varphi}(\varphi) d\varphi,$$

$$\sigma_y^2 = \kappa_{002} = q \sigma_a^2 \sigma_s^2 \int_{-\pi}^{\pi} g^2(\varphi) \sin^2 \varphi w_{\varphi}(\varphi) d\varphi.$$

Взаимная корреляционная функция компонент колебательной скорости дается формулой:

$$R_{XY} = \kappa_{011} = q \sigma_a^2 \sigma_s^2 \int_{-\pi}^{\pi} g^2(\varphi) \cos \varphi \sin \varphi w_{\varphi}(\varphi) d\varphi,$$

а взаимные корреляционные функции давления и компонент колебательной скорости равны:

$$R_{pX} = -q \sigma_a^2 \sigma_s^2 \int_{-\pi}^{\pi} g^2(\varphi) \cos \varphi w_{\varphi}(\varphi) d\varphi,$$

$$R_{pY} = -q \sigma_a^2 \sigma_s^2 \int_{-\pi}^{\pi} g^2(\varphi) \sin \varphi w_{\varphi}(\varphi) d\varphi. \tag{3}$$

Из полученных формул видно, что дисперсии и взаимные корреляционные функции давления и колебательной скорости зависят только от функции $G(\varphi) = q \sigma_a^2 \sigma_s^2 g^2(\varphi) w_{\varphi}(\varphi)$, которую назовем угловой плотностью поля. На зависимость функции $G(\varphi)$ от угла влияет как относительная частота попадания импульсов в различные секторы углов (угловая плотность вероятности $w_{\varphi}(\varphi)$), так и квадрат локальной амплитуды импульсов (функция $g^2(\varphi)$). По влиянию на дисперсии и корреляционные функции эти факторы эквивалентны.

ВЕКТОР УМОВА

Анализируя движение энергии в волновых полях в упругой среде, Н.А. Умов пришел к выводу

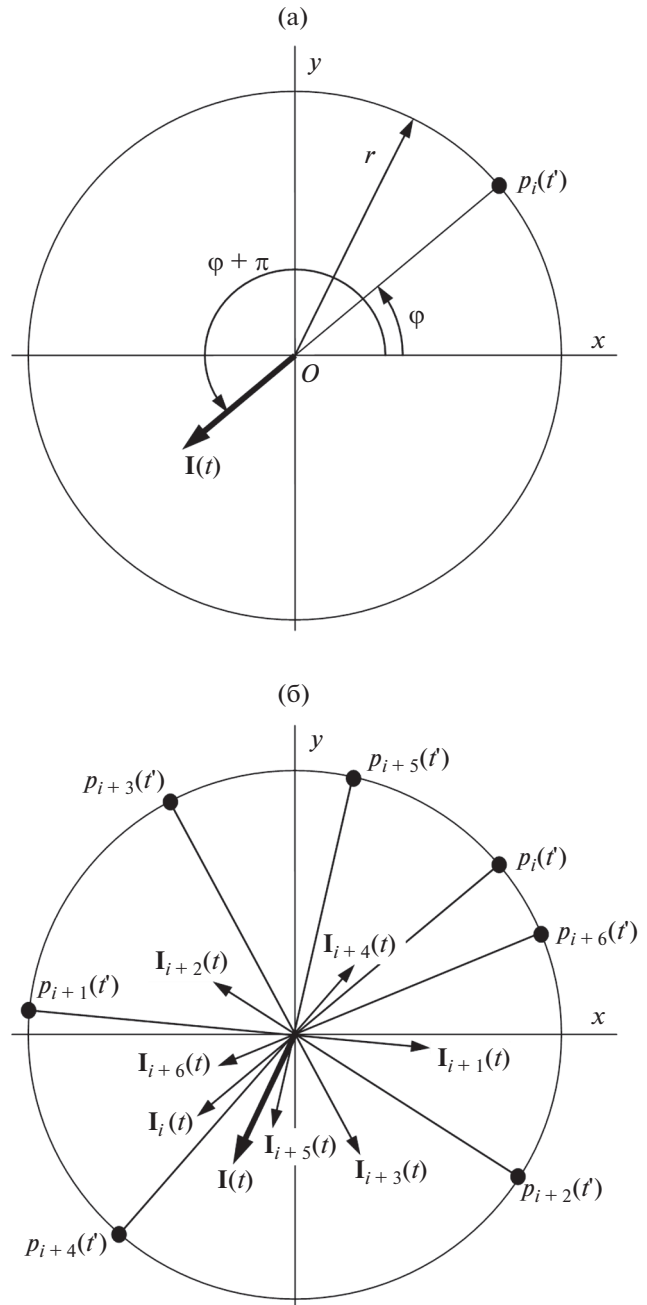


Рис. 1. Схема формирования вектора Умова (а) – при отсутствии наложения импульсов и (б) – при наложении нескольких импульсов. Результирующий вектор $I(t)$ показан утолщенным, $t' = t + r/c$.

[13–15], что в каждый момент времени направление движения энергии задается вектором, который для жидкости в принятых здесь обозначениях имеет вид: $\mathbf{J}(t) = p_s(t)\mathbf{v}(t)$, где $\mathbf{v}(t)$ – вектор колебательной скорости, в двумерном пространстве равный $\mathbf{v}(t) = v_x(t) + iv_y(t)$. Эта величина под названием вектор Умова (Умова–Пойнтинга) [10], а для аналитического сигнала в форме, указанной в

[17], широко применяется в акустике, в том числе для статистического анализа полей [10–12].

Рассмотрим случайный процесс

$$\mathbf{I}(t) = I_x + iI_y = P(X + iY), \quad (4)$$

отличающийся от вектора Умова только постоянным множителем. Далее вектором Умова для краткости будем называть процесс $\mathbf{I}(t)$. Его характеристическая функция равна:

$$\begin{aligned} \psi_I(u) = & \exp \left(q \int_{-\infty}^{\infty} w_a(a) da \int_{-\pi}^{\pi} w_{\varphi}(\varphi) d\varphi \times \right. \\ & \left. \times \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \exp \left[-ia^2 g^2(\varphi) s^2(t) u e^{i\varphi} \right] - 1 \right\} dt \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Соответствующий ей кумулянт первого порядка – математическое ожидание процесса \mathbf{I} равно:

$$\begin{aligned} M[\mathbf{I}] &= M[I_x] + iM[I_y] = \\ &= -q\sigma_a^2\sigma_s^2 \int_{-\pi}^{\pi} g^2(\varphi) w_{\varphi}(\varphi) e^{i\varphi} d\varphi. \end{aligned}$$

Иногда эту функцию называют потоком акустической мощности и возлагают на нее особые надежды в решении ряда задач [10, 18]. Однако, приведенное выражение показывает, что математические ожидания компонент вектора Умова $M[I_x]$ и $M[I_y]$ совпадают с взаимными корреляционными функциями давления и компонент колебательной скорости R_{PX} и R_{PY} . Как вытекает из формулы (3), эти функции полностью определяются первой гармоникой разложения угловой плотности в ряд Фурье по углу φ [12], и ожидание того, что с их помощью удастся получить полное описание направленных свойств поля, представляется необоснованным.

Более перспективно изучение свойств распределений, которые могут быть получены на основании мгновенных значений вектора Умова, описываемых его модулем $I(t) = |\mathbf{I}(t)|$ и аргументом (фазой) $\theta(t)$:

$$\theta(t) = \begin{cases} \text{arcctg}[I_x(t)/I_y(t)], & I_y(t) > 0, \\ 0, & I_y(t) = 0, I_x(t) \neq 0, \\ \text{arcctg}[I_x(t)/I_y(t)] + \pi, & I_y(t) < 0, \end{cases} \quad (6)$$

$0 \leq \theta(t) < 2\pi$, причем если $I_x(t) = 0$, то значение $\theta(t)$ не определено.

Следует заметить, что все приведенные соотношения выполняются независимо от величины произведения (интенсивности процесса) $q\tau$, определяющего характер поля. При высокой интенсивности $q\tau \gg 1$ в результате взаимного наложения большого числа импульсов процесс (1), как известно, приближается к нормальному [19]. В противоположном случае $q\tau \ll 1$ будут наблюдаться отдельные импульсы почти без наложе-

ния. Различия в формировании вектора Умова в том и другом случае иллюстрирует рис. 1. Рассмотрим эти два предельных случая подробнее.

УГЛОВАЯ ПЛОТНОСТЬ МОДУЛЯ И ПЛОТНОСТЬ ВЕРОЯТНОСТИ АРГУМЕНТА ВЕКТОРА УМОВА В СЛУЧАЕ РЕДКИХ ИМПУЛЬСОВ

Когда средняя частота появления импульсов низкая, а сами импульсы короткие: $q\tau \ll 1$, вероятность наложения следующих друг за другом импульсов мала. Для упрощения анализа совсем исключим такие события из рассмотрения. При этом условии в течение времени прохождения через точку начала координат i -го импульса процесса (1) значение аргумента вектора Умова будет равно: $\theta_i = \varphi_i + \pi$.

Выделим малую дугу (θ' , $\theta' + \Delta\theta$) такую, чтобы выполнялось условие $|1 - \theta' / (\theta' + \Delta\theta)| \ll 1$, что делает возможным только малое изменение значений функции $\exp(\theta)$, когда $\theta' \leq \theta < \theta' + \Delta\theta$. Из исходного процесса (1) выберем подпоследовательность, для которой $\theta' \leq \theta_i < \theta' + \Delta\theta$. Так как в рассматриваемом случае углы θ и φ связаны однозначно: $\varphi_i = \theta_i - \pi$, вероятность попадания i -го импульса в указанный интервал и его включения в новую подпоследовательность равна:

$$F = \int_{\theta' - \pi}^{\theta' + \Delta\theta - \pi} w_{\varphi}(\varphi) d\varphi, \quad (7)$$

причем вероятность F не зависит от номера импульса i . При выполнении этого условия новая подпоследовательность также будет пуассоновским процессом со средней частотой появления импульсов qF ([19], с. 410–411). Переобозначим новую последовательность в порядке возрастания t_k . Запишем новый процесс в виде:

$$P_{\Delta\theta}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k(t), \quad \mathbf{V}_{\Delta\theta}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k(t) e^{i(\varphi_k + \pi)}.$$

Найдем математическое ожидание вектора Умова $\mathbf{I}_{\Delta\theta}(t) = P_{\Delta\theta}(t)\mathbf{V}_{\Delta\theta}(t)$, порождаемого источниками, находящимися на выделенной дуге. Характеристическая функция процесса $\mathbf{I}_{\Delta\theta}(t)$ отличается от (4) только пределами интегрирования по φ и равна:

$$\begin{aligned} \psi_{\Delta\theta}(u) = & \exp \left(q \int_{-\infty}^{\infty} w_a(a) da \int_{\theta' - \pi}^{\theta' - \pi + \Delta\theta} w_{\varphi}(\varphi) d\varphi \times \right. \\ & \left. \times \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \exp \left[-ia^2 g^2(\varphi) s^2(t) u e^{i\varphi} \right] - 1 \right\} dt \right). \end{aligned}$$

Соответствующее ей математическое ожидание равно:

$$M[I_{\Delta\theta}] = -q\sigma_a^2\sigma_s^2 \int_{\theta' - \pi}^{\theta' - \pi + \Delta\theta} e^{i\varphi} g^2(\varphi) w_\varphi(\varphi) d\varphi.$$

Если произведение $g^2(\varphi) \exp(i\varphi)$ мало изменяется при $\theta' - \pi \leq \varphi \leq \theta' + \Delta\theta - \pi$, то

$$\begin{aligned} M[I_{\Delta\theta}] &= -q\sigma_a^2\sigma_s^2 g^2(\theta - \pi) e^{i(\theta - \pi)} \int_{\theta' - \pi}^{\theta' - \pi + \Delta\theta} w_\varphi(\varphi) d\varphi = \\ &= q\sigma_a^2\sigma_s^2 g^2(\theta - \pi) e^{i\theta} F. \end{aligned}$$

Если произведение $g^2(\varphi)w(\varphi)$ является непрерывной функцией угла φ , то существует предел отношения $M[I_{\Delta\theta}]/\Delta\theta$ при уменьшении длины дуги $\Delta\theta$, равный:

$$\lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} (M[I_{\Delta\theta}]/\Delta\theta) = q\sigma_a^2\sigma_s^2 g^2(\theta - \pi) w_\varphi(\theta - \pi) e^{i\theta}.$$

Заметим, что модуль полученного выражения:

$$\begin{aligned} U_r(\theta) &= \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} |M[I_{\Delta\theta}]/\Delta\theta| = \\ &= q\sigma_a^2\sigma_s^2 g^2(\theta - \pi) w_\varphi(\theta - \pi) \end{aligned} \quad (8)$$

равен угловой плотности поля $G(\theta - \pi) = G(\varphi)$. Для сравнения процессов удобнее использовать нормированную угловую плотность:

$$\Gamma(\varphi) = G(\varphi) \int_{-\pi}^{\pi} G(\varphi) d\varphi. \quad (9)$$

Заметим также, что при условии непрерывности функции $w_\varphi(\varphi)$ из (7) вытекает, что пределом отношения $F/\Delta\theta$ при уменьшении дуги $\Delta\theta$ является угловая плотность вероятности $w_\varphi(\theta - \pi)$:

$$\lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} (F/\Delta\theta) = w_\varphi(\theta - \pi).$$

Таким образом, в случае редкого процесса вычисление угловых распределений модуля и аргумента вектора Умова позволяет получить достоверные оценки угловой плотности и угловой плотности вероятности поля.

УГЛОВАЯ ПЛОТНОСТЬ МОДУЛЯ И ПЛОТНОСТЬ ВЕРОЯТНОСТИ АРГУМЕНТА ВЕКТОРА УМОВА В ГАУССОВОМ ПОЛЕ

В [12] найдены выражения для совместной плотности вероятности модуля и аргумента вектора Умова и плотности вероятности его аргумента (фазы) для случайного процесса вида (1). Совместная плотность вероятности модуля и аргумента вектора Умова после замены функции Макдональда порядка $\frac{1}{2}$ ее выражением через элементарные функции ([20], ф-ла 8.469.3) принимает вид:

$$w_g(I, \theta) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\alpha}} \exp\left\{-\frac{I}{C}[(c_4c_5 - c_2c_3)\cos\theta + (c_3c_5 - c_1c_4)\sin\theta + \sqrt{\alpha\beta}]\right\}. \quad (10)$$

Эта формула справедлива, если случайный процесс (1) является стационарным, нормальным и центрированным. Коэффициенты c_i представляют собой измеренные или рассчитанные статистические моменты второго порядка пульсаций давления и компонент колебательной скорости:

$c_0 = \sigma_p^2$, $c_1 = \sigma_X^2$, $c_2 = \sigma_Y^2$, $c_3 = R_{pX}$, $c_4 = R_{pY}$, $c_5 = R_{XY}$, а коэффициенты α , β и C выражаются через них:

$$\begin{aligned} \alpha &= (c_0c_2 - c_4^2)\cos^2\theta + (c_0c_1 - c_3^2)\sin^2\theta + \\ &+ 2(c_3c_4 - c_0c_5)\cos\theta\sin\theta, \quad \beta = c_1c_2 - c_5^2, \end{aligned}$$

$$C = c_0c_1c_2 + 2c_3c_4c_5 - c_0c_5^2 - c_1c_4^2 - c_2c_3^2.$$

Интегрирование (10) по I от 0 до ∞ приводит к следующему выражению

$$\begin{aligned} w_g(\theta) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{\alpha}} \times \\ &\times \frac{C}{(c_4c_5 - c_2c_3)\cos\theta + (c_3c_5 - c_1c_4)\sin\theta + \sqrt{\alpha\beta}}, \end{aligned} \quad (11)$$

связывающему плотность вероятности аргумента вектора Умова θ и вторые центральные статистические моменты процесса (1). Плотность вероятности модуля I при условии, что аргумент равен θ , найдем из (10) как условную плотность вероятности [21]:

$$w_g(I|\theta) = w_g(I, \theta)/w_g(\theta).$$

Следовательно, математическое ожидание модуля вектора Умова при условии, что его аргумент равен θ , рассчитывается по формуле:

$$M[I|\theta] = \frac{1}{w_g(\theta)} \int_0^\infty I w_g(I, \theta) dI.$$

По аналогии с (8) угловая плотность модуля вектора Умова в гауссовом поле U_g равна произведению условного математического ожидания на плотность вероятности аргумента:

$$U_g(\theta) = M[|I|\theta]w_g(\theta) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\alpha}} \times \frac{C^2}{[(c_4c_5 - c_2c_3)\cos\theta + (c_3c_5 - c_1c_4)\sin\theta + \sqrt{\alpha\beta}]^2} \quad (12)$$

Функцию $G_g(\varphi) = U_g(\theta - \pi)$ формально можно рассматривать как оценку угловой плотности, полученную в гауссовом поле, так же как функцию $w_g(\theta - \pi)$ как оценку угловой плотности вероятности $w_\varphi(\varphi)$. Оценка нормированной угловой плотности в гауссовом поле равна:

$$\Gamma_g(\varphi) = G_g(\varphi) / \int_{-\pi}^{\pi} G_g(\varphi) d\varphi.$$

В гауссовом поле угловые плотности аргумента (11) и модуля (12) вектора Умова вычисляются через дисперсии и функции взаимной корреляции компонент поля, которые зависят только от нулевой, первой и второй гармоник разложения $G(\varphi)$ по углу φ . Это позволяет предположить, что оценки угловой плотности $G_g(\varphi)$ и угловой плотности вероятности $w_g(\varphi)$ могут существенно отличаться от функций $G(\varphi)$ и $w_\varphi(\varphi)$.

ЭВОЛЮЦИЯ УГЛОВОЙ ПЛОТНОСТИ МОДУЛЯ И ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТИ АРГУМЕНТА ВЕКТОРА УМОВА ПРИ ИЗМЕНЕНИИ ИНТЕНСИВНОСТИ ПРОЦЕССА

Полученные в предыдущих разделах формулы позволяют проанализировать асимптотическое поведение статистических характеристик поля при $q\tau \rightarrow 0$ и $q\tau \rightarrow \infty$. Однако, можно ожидать, что в практически важных случаях процесс (1) будет иметь некоторое промежуточное значение интенсивности $q\tau$. Анализ изменения статистических характеристик поля при изменении интенсивности процесса (1) проведем численно.

В качестве примера рассмотрим шумовое поле, имеющее угловую плотность в виде суммы изотропного и трех локальных составляющих шума. В качестве модели такого шумового поля был сконструирован трехкомпонентный дискретный по времени процесс (P_0, X_0, Y_0) . Частота дискретизации f_d принята равной 1. Длина выборки составляла N отсчетов. Изотропная составляющая шума моделировалась пуассоновским процессом, образованным импульсами, следующими со средней частотой $q_0 = 1/16$, плотность вероятности распределения импульсов по длине выборки равномерная. Амплитуда импульсов a_0 распределена нормально со средним значением, равным 0, и дисперсией 1. Распределение по углу φ в области $-\pi \leq \varphi < \pi$ равномерное. Локальные шумовые составляющие представляли собой независимые пуассоновские последовательности со средними

частотами следования импульсов: $q_1 = 1/64$, $q_2 = 1/32$, $q_3 = 1/128$. Распределение по углу φ локальных составляющих шума – нормальное со средними значениями $\varphi_{01} = -90^\circ$, $\varphi_{02} = 0^\circ$, $\varphi_{03} = 90^\circ$ и равными среднеквадратическими отклонениями $\sigma_\varphi = 5^\circ$. Длина импульсов всех составляющих равна 1. Отношение дисперсий амплитуд локальных и изотропной составляющих шума составляло: $g_1^2 = \sigma_{a1}^2 / \sigma_{a0}^2 = 1$, $g_2^2 = \sigma_{a2}^2 / \sigma_{a0}^2 = 1/2$, $g_3^2 = \sigma_{a3}^2 / \sigma_{a0}^2 = 2$. Фрагмент полученного процесса приведен на рис. 2. Описанному процессу соответствует угловая плотность вероятности

$$w_\varphi(\varphi) = \frac{1}{1 + q_1/q_0 + q_2/q_0 + q_3/q_0} \times \left(\frac{1}{2\pi} + \sum_{j=1}^3 \frac{q_j}{q_0 \sqrt{2\pi\sigma_\varphi}} \exp\left[-(\varphi - \varphi_{0j})^2 / 2\sigma_\varphi^2\right] \right) \quad (13)$$

и угловая плотность

$$G(\varphi) = \frac{q_0 \sigma_{a0}^2}{2\pi} \times \left\{ 1 + \sum_{j=1}^3 \frac{g_j^2 q_j \sqrt{2\pi}}{\sigma_\varphi q_0^2} \exp\left[-(\varphi - \varphi_{0j})^2 / 2\sigma_\varphi^2\right] \right\}. \quad (14)$$

Для изменения формы и длительности импульсов использовалась операция фильтрования. В качестве фильтров применялись цифровые фильтры Баттерворта первого порядка с частотами среза $f_j = 0.256 \times 2^{-j}$, $j = 1 \dots 9$, индекс 0 соответствует исходному процессу. Зависимости от времени нормированных откликов фильтров $h_j(t)$ на импульс единичной амплитуды при различных частотах среза приведены на рис. 3.

Для исходного (P_0, X_0, Y_0) и каждого из профильтрованных процессов (P_j, X_j, Y_j) и значений t_n , $n = 0 \dots N-1$, рассчитывался модуль вектора Умова: $I_{nj} = |P_j X_j + i P_j Y_j|$, а аргумент θ_{nj} вычислялся согласно (6). Число отсчетов, для которых определены значения аргумента вектора Умова, равно:

$$N_j = \sum_{n=0}^{N-1} \begin{cases} 1, & I_{nj} \neq 0, \\ 0, & I_{nj} = 0, \end{cases} \quad j = 0 \dots 9.$$

Область $0 \dots 2\pi$ разбивалась на M равных интервалов: $\theta_m = 2\pi m / M$, $m = 0 \dots M-1$. Оценка плотности вероятности аргумента вектора Умова рассчитывалась по формуле:

$$\hat{w}_{Uj}(\theta_m) = \frac{M}{2\pi N_j} \sum_{n=0}^{N-1} \begin{cases} 1, & \theta_m \leq \theta_{nj} < \theta_{m+1}, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Оценки плотностей вероятности угла φ для каждого процесса вычислялись согласно выражению: $\hat{w}_{\varphi j}(\varphi_m) = \hat{w}_{Uj}(\varphi_m + \pi)$, где $\varphi_m = \theta_m - \pi$. Оценки уг-

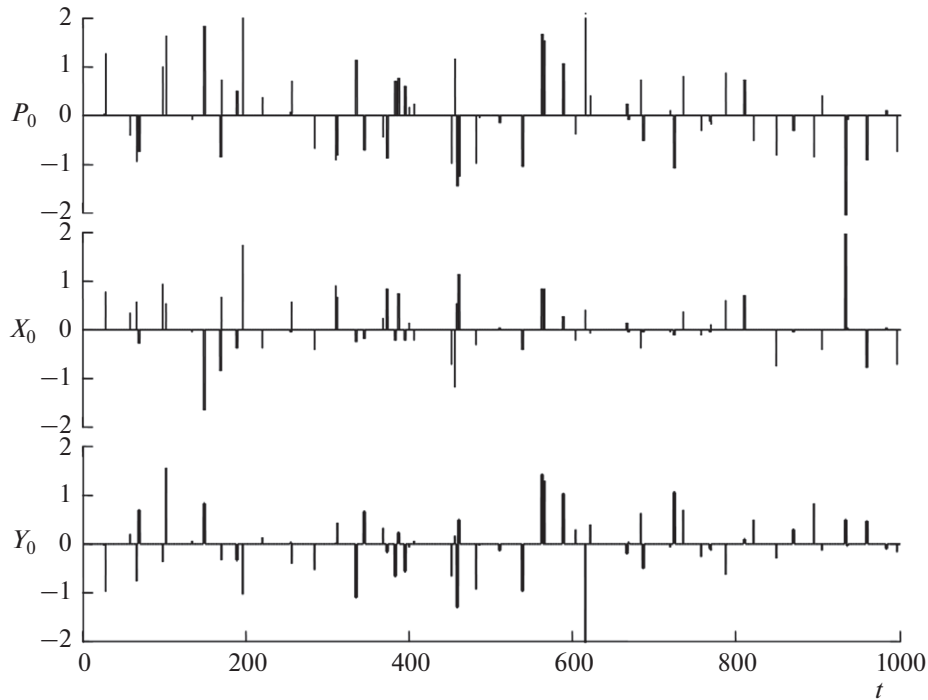


Рис. 2. Фрагмент синтезированного случайного процесса (P_0, X_0, Y_0) .

ловой плотности модуля вектора Умова для каждого процесса рассчитывались по формуле:

$$\hat{U}_j(\theta_m) = \frac{M}{2\pi N_j} \sum_{n=0}^{N-1} \begin{cases} I_{nj}, & \theta_m \leq \theta_{nj} < \theta_{m+1}, \\ 0. & \end{cases}$$

Оценка угловой плотности поля по процессу (P_j, X_j, Y_j) равна: $\hat{G}_j(\varphi_m) = \hat{U}_j(\varphi_m + \pi)$. Для сравнения результатов удобнее пользоваться нормированными оценками угловых плотностей

$$\Gamma_j(\theta_m) = \hat{G}_j(\theta_m) / \sum_{m=0}^{M-1} \hat{G}_j(\theta_m).$$

Результаты расчетов угловой плотности вероятности $w_\varphi(\varphi)$ и ее оценок представлены на рис. 4. На рис. 4а сплошными гладкими линиями 1 и 2 изображены результаты расчетов плотности вероятности угла φ исходного процесса по формуле (13) и ее оценки в гауссовом приближении – по формуле (11). Ступенчатые линии – рассчитанные гистограммы оценок плотности вероятности угла φ исходного процесса (P_0, X_0, Y_0) $\hat{w}_{\varphi 0}(\varphi)$ и $\hat{w}_{\varphi 9}(\varphi)$, соответствующая частоте среза $f_9 = 0.0005$. Парное сопоставление кривых показывает, что численные расчеты удовлетворительно совпадают с аналитическими результатами. Следует отметить существенное различие угловой плотности вероятности поля и ее оценки, полученной в

гауссовом приближении. На рис. 4б показана эволюция оценки плотности вероятности угла $\hat{w}_{\varphi j}(\varphi)$ при изменении частоты среза фильтра f_j .

На рис. 5 представлены результаты расчета нормированной угловой плотности поля и ее оценок. На рис. 5а сплошными гладкими линиями 1 и 2 изображены результаты расчетов нормированной угловой плотности $\Gamma(\varphi)$ исходного процесса по формуле (14) и ее оценки в гауссовом приближении – по формуле (12). Ступенчатые линии – рассчитанные гистограммы оценок нормированной угловой плотности исходного процесса (P_0, X_0, Y_0) $\Gamma_0(\varphi)$ и $\Gamma_9(\varphi)$ при частоте среза фильтра $f_9 = 0.0005$. Сопоставление кривых показывает, что численные расчеты удовлетворительно совпадают с аналитическими. Следует также подчеркнуть существенное различие угловой плотности поля и ее оценки, полученной в гауссовом приближении. На рис. 5б показана эволюция оценки угловой плотности $\Gamma_j(\varphi)$ при изменении частоты среза фильтра f_j .

Поведение оценок угловой плотности и угловой плотности вероятности при сужении полосы анализа практически совпадает и показывает, что при снижении частоты среза фильтра f_c ниже 0.004 или $f_c/(q_0 + q_1 + q_2 + q_3) < 0.03$, эти характеристики близки к найденным для гауссова приближения. Напротив, для того чтобы оценки при-

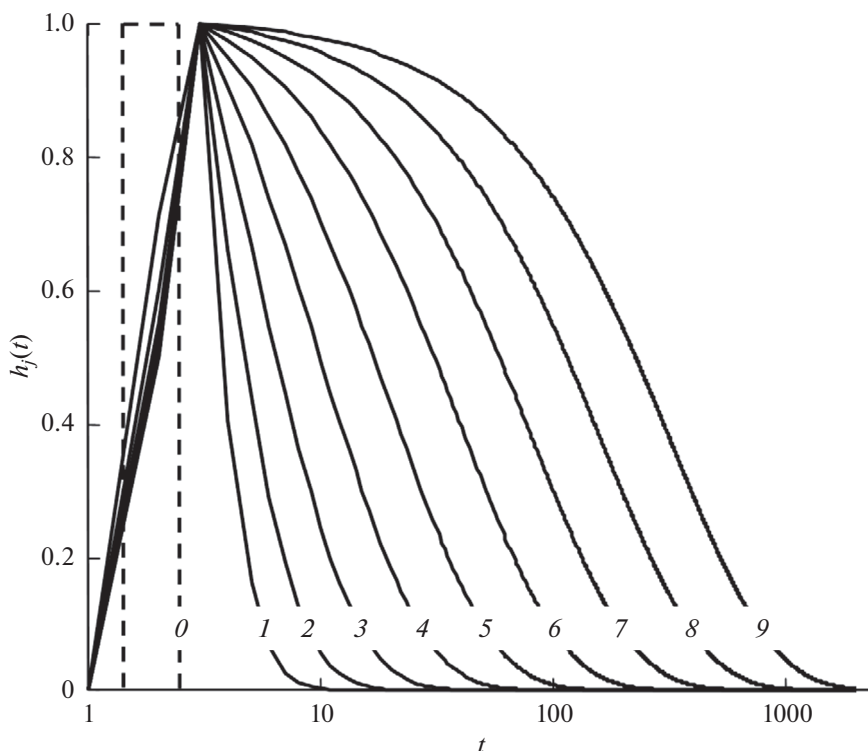


Рис. 3. Нормированный отклик цифрового фильтра на импульс единичной длины и амплитуды. Цифры у кривых соответствуют номеру частоты среза. 0 – исходный импульс.

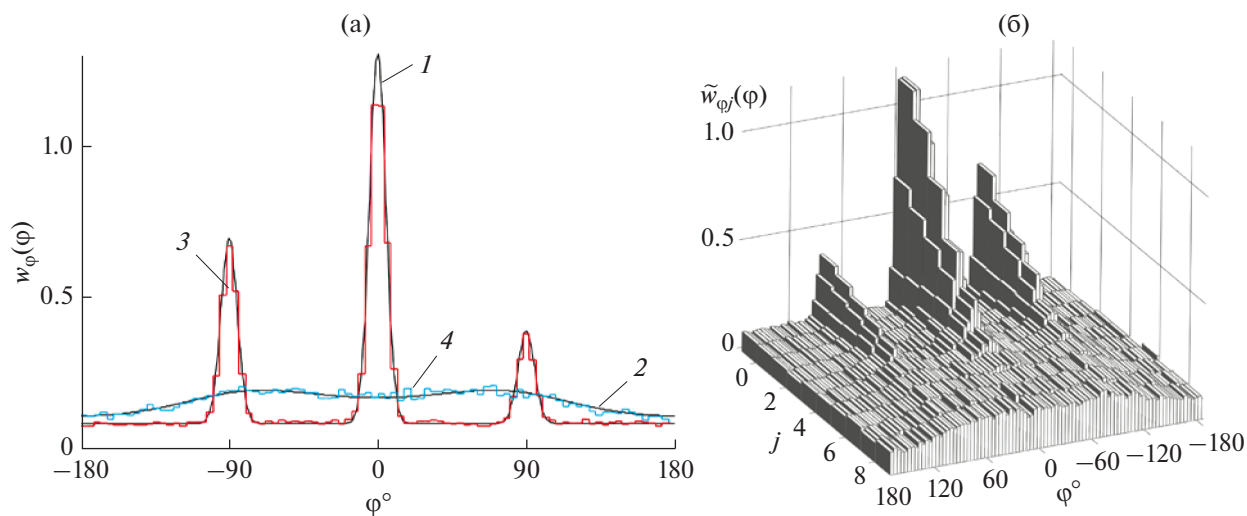


Рис. 4. (а) – Угловая плотность вероятности $w_\varphi(\varphi)$ (кривая 1), ее оценка в гауссовом поле $w_g(\varphi)$ (кривая 2), оценки $\hat{w}_{\varphi 0}(\varphi)$ (кривая 3) и $\hat{w}_{\varphi 9}(\varphi)$ (кривая 4), соответствующие исходному процессу и частоте среза $f_9 = 0.0005$; (б) – эволюция оценок плотности вероятности угла $\hat{w}_{\varphi j}(\varphi)$ при изменении частоты среза фильтра f_j . $N = 2^{19}$, $M = 90$.

ближались к истинным характеристикам поля, необходимо использовать фильтр с частотой среза более 0.064, т.е. должно выполняться условие

$f_c / (q_0 + q_1 + q_2 + q_3) > 0.5$. Однако, этот вывод справедлив только для фильтра рассмотренного типа и порядка. Использование фильтра иного типа и

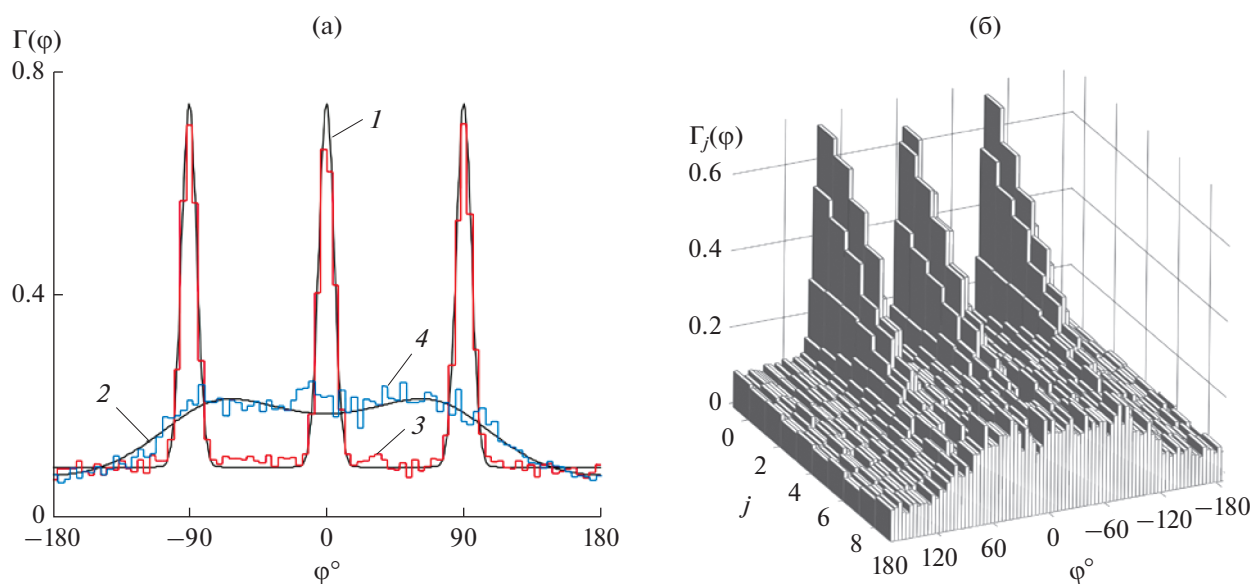


Рис. 5. (а) – Нормированная угловая плотность поля $\Gamma(\varphi)$ (кривая 1), ее оценка в гауссовом поле $\Gamma_g(\varphi)$ (кривая 2), оценки $\Gamma_0(\varphi)$ (кривая 3) и $\Gamma_9(\varphi)$ (кривая 4), соответствующие исходному процессу и частоте среза $f_9 = 0.0005$; (б) – эволюция оценок нормированной угловой плотности $\Gamma_j(\varphi)$ при изменении частоты среза фильтра f_j . $N = 2^{19}$, $M = 90$.

порядка повлияет на вид и длительность его импульсной характеристики, и, таким образом, изменит зависимость.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При обработке сигналов ВСП могут быть получены функции, характеризующие направленные свойства поля. Такими функциями являются угловое распределение модуля вектора Умова и плотность вероятности его аргумента (фазы). Однако, для получения достоверных оценок угловой плотности и угловой плотности вероятности поля необходимо иметь возможность анализа широкополосных импульсных сигналов. Это может быть достигнуто только в том случае, когда такие сигналы, во-первых, излучаются, во-вторых, не претерпевают фатальных изменений при распространении и, в-третьих, преобразуются в форму, удобную для последующей обработки (электронные сигналы), с помощью достаточно широкополосного приемника-преобразователя.

В случае узкополосного приема оценки угловой плотности модуля и плотности вероятности аргумента вектора Умова будут близки к оценкам, которые могут быть найдены аналитически для гауссова поля. Для их вычисления достаточно знания дисперсий и функций взаимной корреляции компонент поля, которые полностью определяются только нулевой, первой и второй гармониками разложения угловой плотности поля $G(\varphi)$ по углу φ . Последнее обстоятельство указывает на то, что в этом случае достоверные оценки угловой

плотности поля могут быть получены в том случае, когда она формируется только перечисленными тремя гармониками разложения в ряд Фурье по углу.

Работа выполнена при поддержке государственного задания по теме “Акустика мелкого моря, нелинейная акустическая диагностика, нелинейная динамика волн” (номер гос. регистрации АААА-А18-118021390174-1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Cron B., Sherman Ch. Spatial correlation functions for various noise models // J. Acoust. Soc. Am. 1962. V. 34(2). № 11. P. 1732–1736.
2. Бурдик В.С. Анализ гидроакустических систем. Л.: Судостроение, 1988. 392 с.
3. Кравчун П.Н., Пестов К.А., Тонаканов О.С. Об эмпирической модели шумов глубокого океана // Акуст. журн. 1992. Т. 38. № 5. С. 886–891.
4. Urick R.J. Ambient Noise in the Sea. Peninsula Publishing, 1984.
5. Hodgkiss W.S., Fisher F.H. Vertical Directionality of Ambient Noise At 32' N as a Function of Longitude // San Diego: Scripps Institution of Oceanography. Marine Physical Laboratory. MPL Technical Memorandum 387-A. 1988. 128 p.
6. Baggeroer A.B., Scheer E.K., NPAL Group. Statistics and vertical directionality of low-frequency ambient noise at the North Pacific Acoustic Laboratory site // J. Acoust. Soc. Am. 2005. V. 117. № 3. P. 1643–1665.
7. Farrokhrooza M., Wage K.E., Dzieciuch M.A., Worcester P.F. Vertical line array measurements of ambient noise in

- the North Pacific // *J. Acoust. Soc. Am.* 2017. V. 141. № 3. P. 1571–1581.
8. *Yang Q., Yang K., Cao R., Duan S.* Spatial vertical directionality and correlation of low-frequency ambient noise in deep ocean direct-arrival zones // *Sensors*. 2018. V. 18. № 2. P. 319.
 9. *Скробнев Г.К.* Комбинированные гидроакустические приемники. СПб.: Элмор, 1997. 200 с.
 10. *Гордиенко В.А.* Векторно-фазовые методы в акустике. М.: Физматлит, 2007. 480 с.
 11. *Ebeling K.J.* Statistical Properties of Random Wave Fields // *Mason W.P., Thurston R.N.* Physical Acoustics. Principles and Methods. V. XVII. Acad. Press. 1984. P. 233–310.
 12. *Михайлов С.Г.* Пеленгование векторно-скалярным приемником в поле анизотропной помехи // *Акуст. журн.* 2020. Т. 66. № 2. С. 170–180.
 13. *Захаров Л.Н., Кирилов В.А., Рожин Ф.В.* Пространственно-корреляционные функции компонент колебательной скорости для двух моделей звукового поля // *Акуст. журн.* 1972. Т. 18. № 1. С. 49–52.
 14. *Умов Н.А.* Уравнения движения энергии в телах. Одесса: типография Ульриха и Шульце, 1874. 56 с.
 15. *Умов Н.А.* Уравнения движения энергии в телах // *Умов Н.А.* Избранные сочинения. М., Л.: Гос. изд-во тех.-теор. лит-ры, 1950. С. 151–200.
 16. *Умов Н.А.* Прибавление к статье “Уравнения движения энергии в телах” // *Умов Н.А.* Избранные сочинения. М., Л.: Гос. изд-во тех.-теор. лит-ры, 1950. С. 201–226.
 17. *Morse Ph.M., Ingard K.U.* Theoretical Acoustics. McGraw-Hill book comp., 1968. 911 p.
 18. *Гордиенко В.А., Гордиенко Е.Л., Краснописцев Н.В., Некрасов В.Н.* Помехоустойчивость гидроакустических приемных систем, регистрирующих поток акустической мощности // *Акуст. журн.* 2008. Т. 54. № 5. С. 774–785.
 19. *Тихонов В.И.* Статистическая радиотехника. М.: Радио и связь, 1982. 624 с.
 20. *Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M.* Table of Integrals, Series, and Products. 7-th ed. Acad. Press. 2007. 1171 p.
 21. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике (для научных работников и инженеров). М.: Наука. 1973. 832 с.