

КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ
И ТЕОРИИ ВОЛН

УДК 534.23

ОСОБЕННОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН ЛЭМБА В КЛИНЕ
ИЗ АБС-ПЛАСТИКА С ПАРАБОЛИЧЕСКИМ ПРОФИЛЕМ

© 2022 г. А. А. Агафонов^а, А. И. Коробов^а *, М. Ю. Изосимова^а,
А. И. Кокшайский^а, Н. И. Одина^а

^аМосковский государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический факультет, кафедра акустики,
Ленинские горы, ГСП-1, Москва, 119991 Россия

*e-mail: aikor42@mail.ru

Поступила в редакцию 25.05.2022 г.

После доработки 02.06.2022 г.

Принята к публикации 07.06.2022 г.

Приведены результаты экспериментальных исследований распространения упругих изгибных волн в элементе метаматериала, представляющем собой клин, толщина которого меняется по параболическому закону. Образец изготовлен методом 3D-печати из полимера АБС. Описана экспериментальная установка для генерации и регистрации упругих изгибных волн в изготовленном образце клина. Регистрация и визуализация упругих волн в клине осуществлялась лазерным сканирующим виброметром. Экспериментально исследованы особенности распространения изгибных волн в изготовленном образце клина параллельно и перпендикулярно ребру клина. Анализируются результаты эксперимента. Проведенные исследования показали, что изготовленный в работе клин является волноводом, концентрирующим энергию акустической волны, что является важным при разработке акустических метаматериалов и поглощающих устройств, работающих по принципу “акустической черной дыры”.

Ключевые слова: параболический клин, волна Лэмба, лазерная виброметрия, акустическая черная дыра

DOI: 10.31857/S0320791922050021

ВВЕДЕНИЕ

В последнее время в связи с интересными особенностями распространения звука внимание исследователей привлекают элементы метаматериалов различной формы [1]. В работах [2–6] были предсказаны и исследованы структуры, называемые “акустическими черными дырами” (АЧД), которые представляют интерес для задач структурной акустики и звукопоглощения. Основным свойством таких объектов является то, что вдоль некоторого направления (в зависимости от геометрии структуры) скорость упругих волн уменьшается до нуля, что должно приводить к бесконечному времени распространения волны на конечном участке в пространстве. Это приводит к отсутствию отраженной волны при распространении падающей волны вдоль этого направления. В АЧД такое уменьшение скорости волны связано с уменьшением локальной жесткости, которое обычно достигается с помощью модификации геометрии: уменьшения толщины пластины по степенному закону [2], специального закона изменения поперечного сечения стержня вдоль его оси [3, 4], уменьшения размеров составных эле-

ментов стержней и цилиндров [5–7] и др. В статьях [8, 9] представлен обстоятельный обзор работ по этому направлению.

Рассматриваемый в настоящей работе пример такой структуры – клин, толщина которого медленно меняется по параболическому закону (рис. 1) [2, 10–12]. В идеальном случае при возбуждении в нем акустического импульса не должно быть отраженной волны.

В основополагающей работе [2] впервые проведен анализ распространения изгибной волны в тонкой пластине, толщина которой плавно уменьшается до нуля на конечном интервале. Было показано, что локальный волновой вектор k изгибной волны зависит от толщины пластины $h(x)$, а амплитуда A определяется законом сохранения потока энергии, переносимого волной:

$$k = \left(\frac{12\rho\omega^2(1-\nu^2)}{Eh^2(x)} \right)^{1/4},$$

$$A = A_0 \left(\frac{h_0}{h(x)} \right)^{3/4},$$

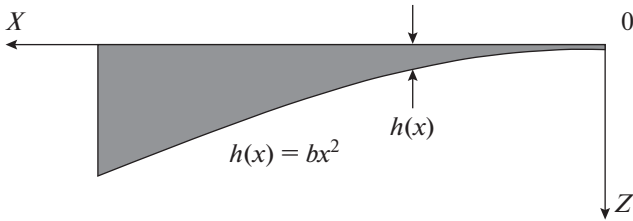


Рис. 1. Профиль параболического клина.

где x – координата вдоль направления распространения волны, ρ – плотность материала пластины, E – модуль Юнга материала пластины, ν – коэффициент Пуассона, ω – частота волны.

Фазовая скорость изгибной волны в пластине зависит от ее толщины по корневому закону:

$$c_\phi = \frac{\omega}{k} = \left(\frac{E}{12\rho(1-\nu^2)} \right)^{1/4} \sqrt{\omega h(x)}.$$

Для клиньев со степенным профилем: $h(x) = bx^m$ в случае $m > 0$ фазовая скорость на конечном интервале уменьшается и равна нулю на вершине клина. В [2] показано, что при $m \geq 2$ в идеальном случае время распространения волны к ребру бесконечно и поэтому волна никогда не отразится обратно.

В случае $m = 2$, $h(x) = bx^2$ волновой вектор изгибной волны определяется выражением:

$$k = \left(\frac{12\rho(1-\nu^2)}{Eb^2} \right)^{1/4} \frac{\sqrt{\omega}}{x}.$$

Локальная фазовая скорость волны в этом случае следующим образом зависит от x :

$$c_\phi = \left(\frac{E}{12\rho(1-\nu^2)} \right)^{1/4} \sqrt{b\omega} x. \tag{1}$$

Амплитуда волны в таком клине зависит от пройденного ею расстояния x и определяется выражением:

$$A = A_0 \left(\frac{x_0}{x} \right)^{3/4}, \tag{2}$$

где x_0 – координата, при которой амплитуда равна A_0 .

Таким образом, в пластине с параболическим профилем фазовая скорость клиновой волны при ее приближении к вершине клина уменьшается и линейно стремится к нулю, при этом амплитуда волн нарастает до бесконечности.

В работе [2] указано на то, что при наличии поглощения интегральный декремент затухания стремится к бесконечности, и даже небольшое поглощение в материале приведет к полному затуханию волны в такой структуре. Отмечаются

трудности изготовления такой структуры, а именно кромки пластины. Изготовить кромку параболического профиля нулевой толщины невозможно, на практике пластина обрывается на некоторой конечной толщине h_0 . Однако если добавить на острие клина поглощающий слой, то, в соответствии с расчетами работы [11], оказывается, что амплитуду отраженной волны можно уменьшить до 2%. Увеличение амплитуды волны у острия такого клина может приводить к появлению нелинейных эффектов, которые могут, в свою очередь, способствовать затуханию волны за счет нелинейного поглощения [8].

Следует отметить, что приведенные выше формулы для амплитуды (2) и фазовой скорости (1) изгибной волны в пластине переменной толщины получены для случая тонкой пластины с медленно меняющимся профилем.

Условие медленности изменения пластины записывается как:

$$\frac{1}{k} \frac{dk}{dx} \ll k, \tag{3}$$

а условие для тонкой пластины записывается следующим образом:

$$\frac{k_i h}{2} \ll 1, \tag{4}$$

где k_i – волновой вектор сдвиговой волны. На практике условия (3) и (4) выполняются не для всего диапазона частот.

Точные решения были получены только для уравнения поперечных колебаний стержня [3, 4], поперечное сечение которого медленно меняется по специальному закону (толщина уменьшается по параболическому закону, а ширина по степенному закону). При этом поперечные размеры стержня должны быть много меньше локальной длины изгибной волны.

Для определения скорости изгибной волны Лэмба в пластине произвольной толщины удобно использовать характеристическое уравнение, соответствующее антисимметричным модам волн Лэмба [13]:

$$\frac{\operatorname{tg}\sqrt{1-\zeta^2}\bar{d}}{\operatorname{tg}\sqrt{\xi^2-\zeta^2}\bar{d}} = -\frac{(2\xi^2-1)^2}{4\xi^2\sqrt{1-\zeta^2}\sqrt{\xi^2-\zeta^2}}, \tag{5}$$

где

$$\bar{d} = \frac{k_i h}{2}, \quad \zeta^2 = \left(\frac{c_l}{c} \right)^2, \quad \xi^2 = \left(\frac{c_l}{c_l} \right)^2,$$

c , c_l и c_t – скорости антисимметричных мод волн Лэмба, сдвиговой и продольной волн, соответственно.

В качестве материала для изготовления экспериментального образца был выбран АБС-пластик

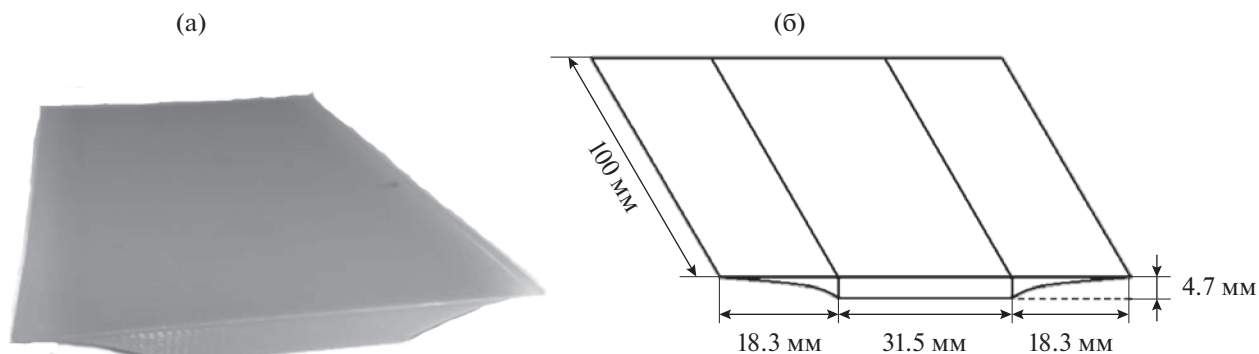


Рис. 2. (а) – Фото образца; (б) – размеры образца.

(акрилонитрил бутадиен стирол), используемый в 3D-печати. Этот материал обладает рядом преимуществ при изготовлении деталей в автомобильной промышленности, сувенирной продукции, музыкальных инструментов, различного инвентаря, элементов мебели и др., такими как ударопрочность, жесткость, износостойкость, простота механической обработки [14, 15]. Поэтому при проектировании всевозможных деталей в указанных выше областях можно использовать ребро клина специальной формы для уменьшения вибрации всей детали.

Для проведения экспериментов был рассчитан и изготовлен методом технологии 3D-печати из полимера АБС экспериментальный образец. Образец представляет собой пластину постоянной толщины, на двух противоположных сторонах которой были изготовлены клинья, толщины которых уменьшались по параболическому закону при приближении к ребру клина. В одном из этих клиньев проводились эксперименты, второй клин был изготовлен для того, чтобы уменьшить отражения волн от пластины при возбуждении клиновых волн в экспериментальном клине.

Общий вид и характерные размеры образца приведены на рис. 2. Толщина пластины равна 4.7 мм, ширина пластины – 31.5 мм, а ее длина – 100 мм. Длина клиньев и их ширина равнялись соответственно 100 и 18.3 мм, толщина ребер клиньев – 140 мкм.

В полимере АБС, из которого был изготовлен экспериментальный образец, ультразвуковым импульсным методом были измерены скорости объемных акустических волн: сдвиговых $c_t = 895 \pm 20$ м/с и продольных $c_l = 1690 \pm 25$ м/с. Плотность полимера, используемого в работе, 940 кг/м³. Рассчитанные по этим параметрам модуль Юнга и коэффициент Пуассона были равны соответственно $E = (1.96 \pm 0.30) \times 10^9$ Па, $\nu = 0.30 \pm 0.04$.

В диапазоне частот $f = 7\text{--}95$ кГц для пластины исследуемого в работе образца из АБС-пластика был выполнен расчет фазовых скоростей изгиб-

ных волн Лэмба по формуле (1) и путем численного решения характеристического уравнения (5), так как не во всем исследуемом диапазоне частот исследуемая пластина может считаться тонкой. Результаты расчетов приведены на рис. 3.

Как видно из графиков, значения фазовой скорости волн Лэмба для нашего образца, полученные по формуле (1), применимы только в небольшом диапазоне используемых частот в силу того, что условие приближения тонкой пластины (4) не выполняется для высоких частот. Поэтому, в дальнейшем, при теоретических расчетах используются значения, полученные численно из характеристического уравнения (5).

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ УСТАНОВКА И МЕТОДИКА ИЗМЕРЕНИЙ

Для проведения экспериментальных исследований распространения изгибных волн в образце – клине с параболическим профилем – была разра-

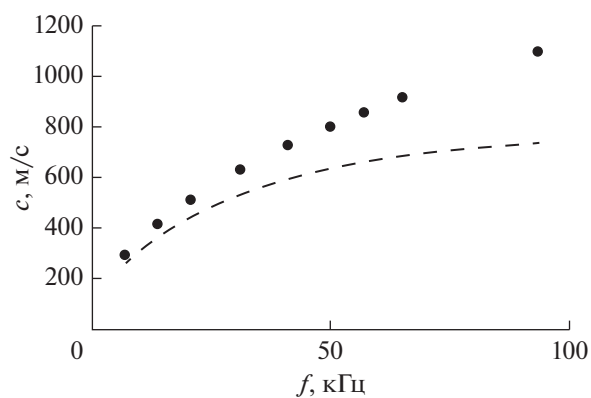


Рис. 3. Зависимость скорости волны Лэмба в однородной пластине образца от частоты: пунктиром показаны результаты расчетов на основании характеристического уравнения (5), а точками – расчетные значения скорости по формуле (1).

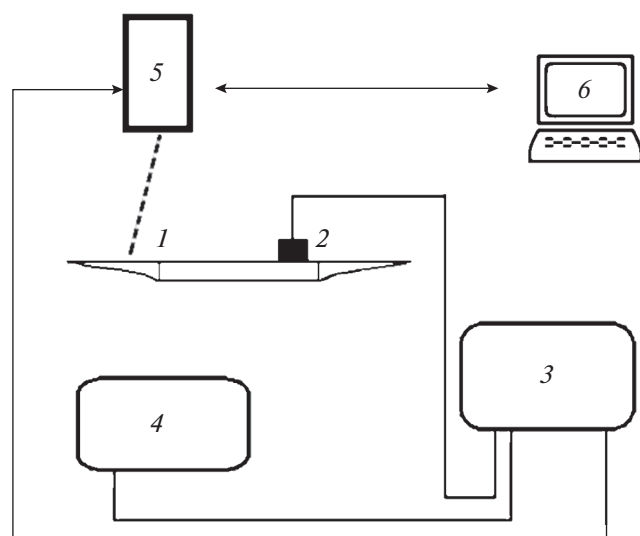


Рис. 4. Схема экспериментальной установки.

ботана экспериментальная установка, схема которой изображена на рис. 4.

Возбуждение изгибных волн в образце (1) осуществлялось керамическим пьезоэлектрическим преобразователем (2). Генерация электрических сигналов в пьезопреобразователе (2) осуществлялась ультразвуковым генератором Rigol DG 2041A (3). Форма и амплитуда сигналов, поступающих на пьезопреобразователь, контролировались в режиме реального времени цифровым осциллографом DS09104A (Agilent) (4). Визуализация и измерение параметров упругой клиновидной волны в образце осуществлялись с помощью лазерного виброметра PSV-300 (Polytec) (5), управ-

ление которым осуществлялось персональным компьютером (6).

Пьезоэлектрический преобразователь (2) с размерами $1 \times 1 \times 8.5$ см с помощью струбины мог крепиться к образцу в двух положениях (рис. 5): параллельно ребру клина (рис. 5а), и перпендикулярно ребру клина (рис. 5б). Акустический контакт между пьезопреобразователем и образцом осуществлялся с помощью специально изготовленной склейки на основе глицерина и сахара [16]. Размеры пьезопреобразователя давали возможность при его установке согласно рис. 5б одновременно возбуждать плоские упругие волны в образце, направленные параллельно ребрам клиньев как в пластине, так и в прилегающих к ней клиньях. Экспериментальная установка позволяла возбуждать и исследовать распространение клиновидных упругих волн в изготовленном образце в выбранном для исследования диапазоне частот $f = 1-90$ кГц в режиме бегущих волн, импульсов и стоячих волн.

На боковые стороны клина, параллельные направлению распространения клиновидной волны, для поглощения возможных отражений наносилась пластилин.

РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ

В интервале частот $f = 20-90$ кГц были измерены длины волн и построена дисперсионная кривая для нулевой изгибной моды в пластине образца, толщина которой постоянна (рис. 6). Результаты экспериментов и численных расчетов находятся в хорошем согласии.

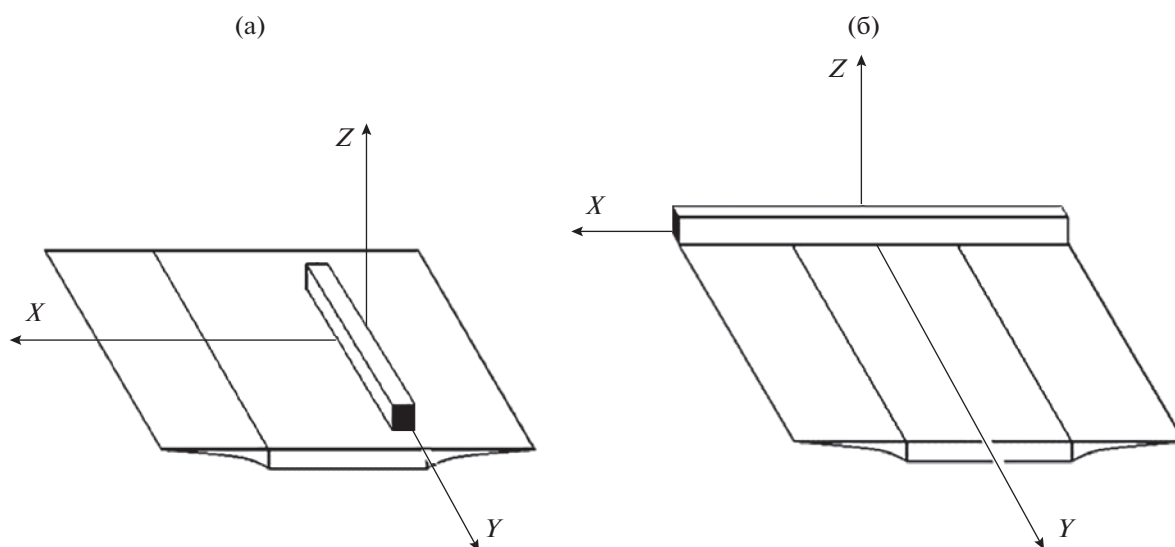


Рис. 5. Схема установки преобразователя на образце: (а) – преобразователь установлен параллельно ребру клина, (б) – преобразователь установлен перпендикулярно ребру клина.

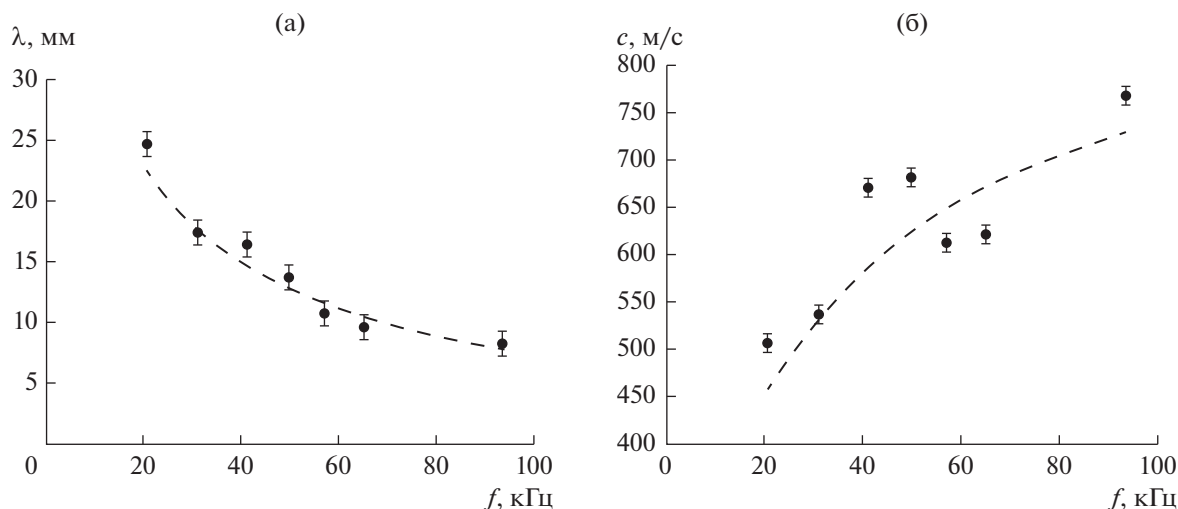


Рис. 6. Зависимость длины волны и фазовой скорости волны Лэмба в однородной пластине образца от частоты. Пунктиром показаны результаты расчетов с использованием характеристического уравнения (5), а точками — экспериментальные результаты.

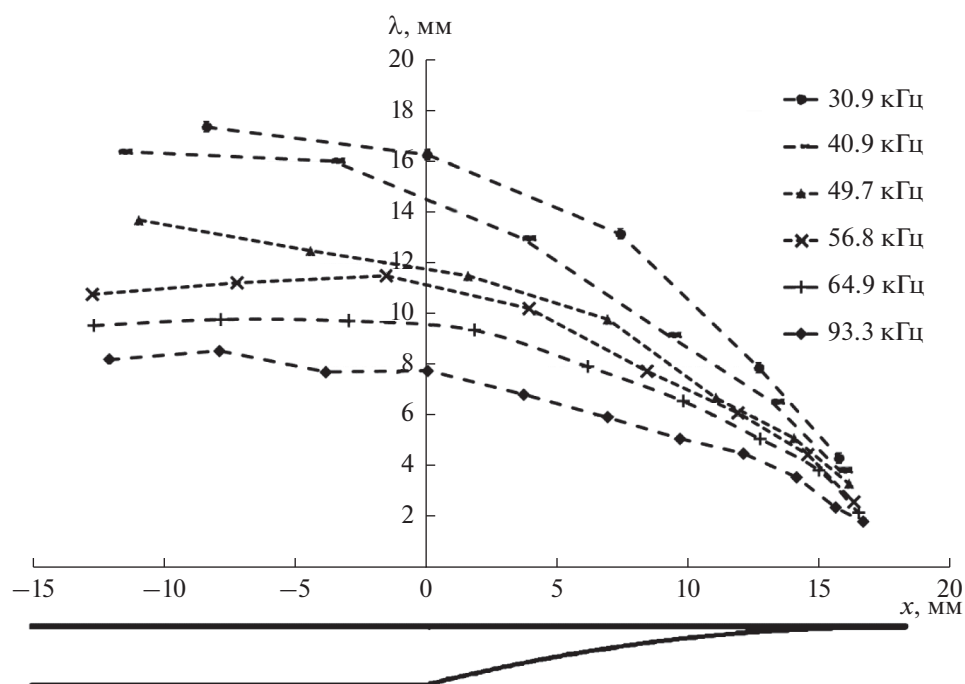


Рис. 7. Зависимость длины волны Лэмба от расстояния от границы между пластиной и параболическим клином в диапазоне частот $f = 20\text{--}100$ кГц на разных участках образца (в пластине и в клине). Под графиком помещен профиль параболического клина, точно соответствующий координатам x графика.

В диапазоне частот $f = 20.5\text{--}93.3$ кГц были измерены длины волны Лэмба, распространяющейся перпендикулярно ребру клина на разных участках образца: в пластине и клине (рис. 7). Под графиком помещен профиль параболического клина, точно соответствующий координатам x графика. Ноль в образце на оси Ox находится на границе пластина/параболический клин.

Как видно из рис. 7, для всех частот наблюдается тенденция уменьшения длины волны в клине и ее стремление к нулю при приближении волны к ребру клина. Это вызвано уменьшением толщины клина в направлении к ребру клина и, как следствие, уменьшением скорости волны Лэмба, что находится в согласии с выражением (1). Скорости не обращаются в ноль на ребре клина в силу

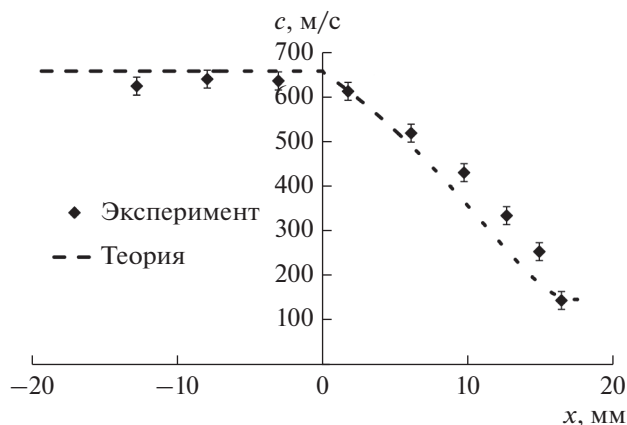


Рис. 8. Скорость волны Лэмба в пластине и клине образца в зависимости от расстояния от границы между пластиной и параболическим клином на частоте $f = 64.9$ кГц.

того, что невозможно физически реализовать уменьшение толщины клина до нуля по параболическому закону. При толщине клина в основании 4.7 мм и у ребра клина 0.14 мм, их отношение составляет примерно 34. Согласно (1) скорость волны пропорциональна корню из толщины. Поэтому скорости у основания и ребра в эксперименте отличаются только в 5.8 раз. Чтобы скорость снизилась хотя бы в 100 раз, толщина клина на ребре должна составить доли микрона. В нашем случае ограничение определяется методом изготовления клина: толщина наносимого слоя пластика составляет 140 мкм.

На рис. 8 приведены результаты эксперимента и численного расчета скорости волны Лэмба в образце, распространяющейся в пластине и боковом клине перпендикулярно его ребру в зависимости от расстояния до ребра клина на частоте $f = 64.9$ кГц. Расчет проводился с использованием характеристического уравнения (5). Экспериментально скорость изгибных волн измерялась импульсным ультразвуковым методом. Качественно эти зависимости совпадают.

Экспериментально исследовано распределение колебательной скорости в изгибной волне перпендикулярно к ребру клина (рис. 9). Было установлено, что при приближении изгибной волны Лэмба к ребру параболического клина наблюдается рост амплитуды колебательной скорости в волне и уменьшение скорости распространения изгибной волны. На это указывает уменьшение расстояния между максимумами изгибной волны при приближении к ребру клина. Изменения вызваны уменьшением толщины клина в направлении распространения волны и находятся в согласии с (1).

На рис. 10, демонстрирующем зависимость амплитуды колебательной скорости волны Лэмба

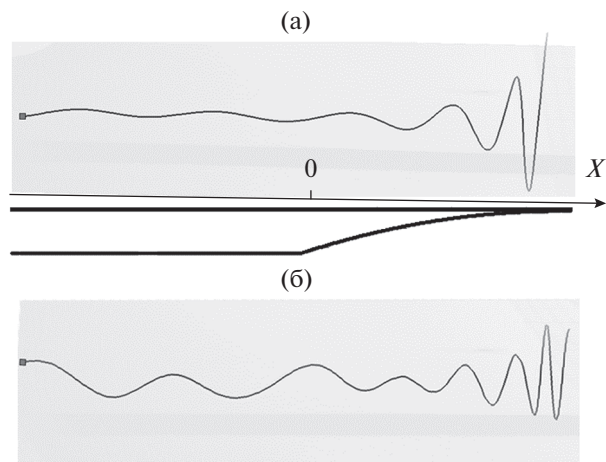


Рис. 9. Распределение колебательной скорости в стоячей волне Лэмба вдоль оси OX на частотах (а) $f = 64.9$ кГц и (б) 134 кГц (визуализация с виброметра). Под рисунком (а) схематически изображен профиль параболического клина.

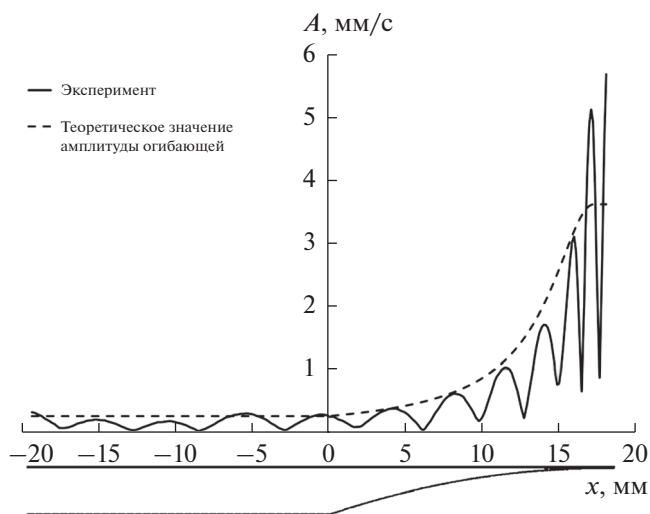


Рис. 10. Зависимость амплитуды колебательной скорости стоячей волны Лэмба на частоте $f = 64.9$ кГц в образце от расстояния от ребра клина. Сплошной линией показаны результаты эксперимента, пунктирной линией – результат расчета огибающей амплитуды по формуле (2). Под графиком помещен профиль параболического клина, точно соответствующий координатам x графика.

на частоте $f = 64.9$ кГц в образце от расстояния вдоль направления распространения волны перпендикулярно ребру клина, также наблюдается уменьшение длины волны и увеличение ее амплитуды при приближении к ребру клина, что находится в согласии с теоретическими результатами, полученными в [2].

Лазерный виброметр позволил визуализировать распространение изгибных клиновидных волн в

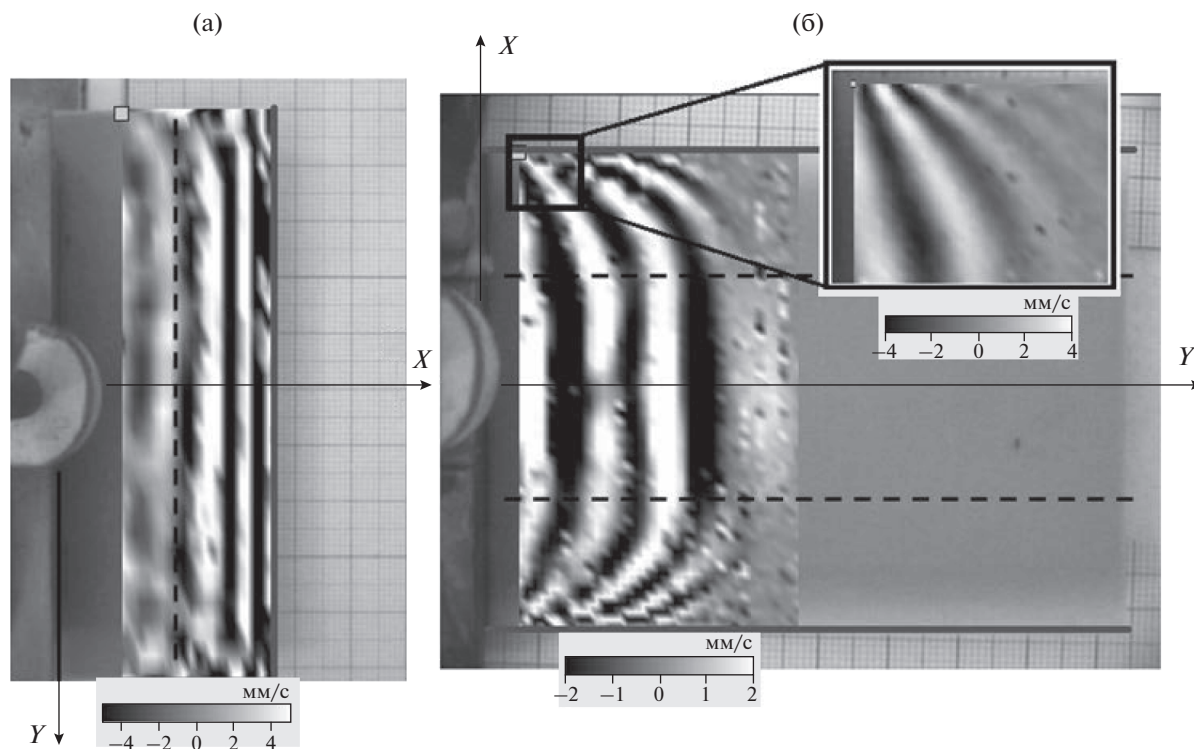


Рис. 11. Визуализация распространения волны Лэмба в образце клина в направлении: (а) – перпендикулярно к ребру клина на частоте 60 кГц; (б) – вдоль ребра клина на частоте 64.9 кГц. Ребра клиньев показаны толстой серой линией, а граница “пластина–параболический клин” – черной штриховой линией.

образце и измерять их амплитуду при различных вариантах расположения пьезопреобразователей на образце (рис. 5). На рис. 11 приведены примеры такой визуализации на частоте $f = 60$ кГц (преобразователь параллелен ребру клина) и частоте $f = 64.9$ кГц (преобразователь установлен перпендикулярно ребру клина).

При конфигурации, показанной на рис. 5а, от преобразователя в направлении к ребру параболического клина возбуждалась изгибная волна Лэмба с плоским фронтом (рис. 11а). При этом волна распространялась в двух частях образца: первоначально в пластине, в которой ее толщина и скорость волны постоянны, а затем в клине, толщина которого, а следовательно, скорость волны и длина волны по мере приближения к ребру клина согласно (1) уменьшались в направлении распространения волны.

При возбуждении упругой волны в образце преобразователем, расположенным на образце согласно конфигурации на рис. 5б, плоская волна одновременно излучается в три части образца (рис. 2): в тонкую пластину постоянной толщины и в два боковых клина, расположенных на двух противоположных сторонах пластины. Толщины этих клиньев, как уже отмечалось ранее, уменьшаются по параболическому закону при приближении к ребру клина. Возбужденные в обе сторо-

ны от преобразователя волны первоначально с плоскими фронтами в процессе распространения начинают менять свой профиль. Это объясняется следующим. Скорость фронта упругой волны в боковых клиньях зависит от расстояния от ребра клина: толщина клина уменьшается при приближении к ребру клина и, как следствие, уменьшается скорость фронта волны. Это приводит к изменению направления распространения упругой волны в область клина с меньшей скоростью клиновой волны Лэмба (рис. 11б).

Аналогичное изменение направлений волновых фронтов волны наблюдалось ранее для случая так называемых двумерных акустических черных дыр (2D АЧД) [12], которые представляли собой углубления в пластинах, радиальная зависимость толщины в которых являлась степенной. Траектории лучей, распространяющихся в такой структуре, отклоняются в сторону области, которой соответствует меньшая скорость распространения волн – к центру 2D АЧД [12].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1) Методом 3D печати из полимера АБС был рассчитан и изготовлен элемент метаматериала в виде клина с профилем, меняющимся по параболическому закону.

2) Разработаны экспериментальные методика и установка для исследования распространения упругих изгибных волн в изготовленном образце.

3) Выполнены расчеты фазовых скоростей нулевой моды изгибных волн Лэмба на характерных участках в изготовленном образце: пластине и клине.

4) Визуализировано распространение волн в образце параболического клина для двух случаев: а) волновой вектор возбуждаемой волны Лэмба перпендикулярен ребру клина, б) волновой вектор возбуждаемой волны Лэмба параллелен ребру клина.

5) Зафиксировано уменьшение длины и увеличение амплитуды изгибной волны при ее приближении к ребру.

6) Результаты выполненных экспериментов и теоретических расчетов находятся в удовлетворительном согласии.

В исследуемом образце параболического клина, несмотря на невыполнение условий медленного изменения профиля для низких частот и условия тонкости пластины для высоких частот, наблюдается уменьшение скорости примерно до тех же значений, которые предсказывает теория для тонкой пластины с медленно меняющимся профилем. Это может способствовать расширению рабочего диапазона образца акустической черной дыры как элемента звукопоглощающего метаматериала, при уменьшении размеров образца и, следовательно, материала, требующегося для его производства, и при увеличении компактности звукопоглощающих элементов, что очень важно для применения таких элементов в самолетостроении и автомобильной промышленности. На высоких частотах для образца нарушается условие тонкости пластины, но при этом он также выполняет свою функцию концентрирующего волновода.

Проведенные в диапазоне частот 20–90 кГц эксперименты показали, что разработанный в работе образец клина является волноводом, концентрирующим энергию акустической волны, что является важным в разработке акустических метаматериалов и поглощающих устройств, работающих по принципу “акустической черной дыры”.

Исследования выполнены при поддержке Российского научного фонда (проект № 19-12-00098).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бобровницкий Ю.И., Томила Т.М. Поглощение звука и метаматериалы (обзор). *Акуст. журн.* 2018. Т. 64. № 5. С. 517–525.
2. Миронов М.А. Распространение изгибной волны в пластине, толщина которой плавно уменьшается до нуля на конечном интервале // *Акуст. журн.* 1988. Т. 34. № 3. С. 546–547.
3. Миронов М.А. Точные решения уравнения поперечных колебаний стержня со специальным законом изменения поперечного сечения вдоль его оси // IX Всесоюзная акустическая конференция, 1991. Секция Л. С. 23–26.
4. Миронов М.А. Точные решения уравнения поперечных колебаний стержня со специальным законом изменения поперечного сечения // *Акуст. журн.* 2017. Т. 63. № 1. С. 3–8.
5. Миронов М.А., Писляков В.В. Одномерные волны в замедляющих структурах со скоростью распространения, стремящейся к нулю // *Акуст. журн.* 2002. Т. 48. № 3. С. 400–405.
6. Azbaid E., Krylov V., O'Boy D.J. Investigation of the Acoustic Black Hole termination for sound waves propagating in cylindrical waveguides // *Proc. Inter-Noise-2015. San Francisco, CA, USA, 9–12 August 2015.*
7. Миронов М.А. Разрезной стержень как вибрационная черная дыра // *Акуст. журн.* 2019. Т. 63. С. 736–739.
8. Pelat A., Gautier F., Conlon S.C., Semperlotti F. The acoustic black hole: A review of theory and applications // *J. Sound Vib.* 2020. V. 476. P. 115316.
9. Zhao C., Prasad M.G. Acoustic Black Holes in structural design for vibration and noise control // *Acoustics.* 2019. V. 1. P. 220–251.
10. Bayod J.J. Experimental study of vibration damping in a modified elastic wedge of power-law profile // *J. Vib. Acoust.* 2011. V. 133. P. 061003.
11. Krylov V.V., Tilman F.J.B.S. Acoustic “black holes” for flexural waves as effective vibration dampers // *J. Sound Vib.* 2004. V. 274. P. 605–619.
12. Krylov V.V. Acoustic Black Holes: recent developments in the theory and applications // *IEEE Trans. Ultrason., Ferroelectr., Freq. Control* // 2014. V. 61. № 8. P. 1296–1306.
13. Викторов И.А. Физические основы применения ультразвуковых волн Рэлея и Лэмба в технике. М.: Наука, 1966. 170 с.
14. Тигнибидин А.В., Такаюк С.В. Использование аддитивных технологий при прототипировании. Контроль геометрических характеристик детали из пластика ABS для определения исходных размеров для печати // *ОмГТУ.* 2018. № 2. С. 57–65
15. Яковлев А.В., Филиппов В.Н. Некоторые возможности применения полиолефинов, стирола и полиамидов в автомобилестроении // *ТППС.* 2012. № 19. С. 32–35.
16. Мильков М.Г., Кокшайский А.И., Скачков И.В., Ширгина Н.В. Экспериментальное исследование акустической склейки акустооптическим способом // *Тр. 17-й Всеросс. школы-семинара “Волны-2020”.* Секция 7. Акустоэлектроника и акустооптика. М.: Физ. фак. МГУ, 2020. С. 14–16.