

УДК 534.222

## НЕЛИНЕЙНЫЕ ЛОКАЛИЗОВАННЫЕ ПРОДОЛЬНЫЕ ВОЛНЫ В МЕТАМАТЕРИАЛЕ, ЗАДАВАЕМОМ КАК ЦЕПОЧКА “МАССА-В-МАССЕ”

© 2022 г. В. И. Ерофеев<sup>а</sup>, \*, Д. А. Колесов<sup>а</sup>, А. О. Мальханов<sup>а</sup>

<sup>а</sup>Институт проблем машиностроения РАН – филиал ФГБНУ “Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики Российской академии наук”, ул. Белинского 85, Нижний Новгород, 603024 Россия

\*e-mail: erof.vi@yandex.ru

Поступила в редакцию 09.03.2022 г.

После доработки 09.03.2022 г.

Принята к публикации 30.03.2022 г.

Рассматривается математическая модель акустического (механического) метаматериала, представляющая собой цепочку осцилляторов, состоящую из нелинейно-упругих элементов и масс, каждая из которых содержит внутренний нелинейный осциллятор. Показано, что в длинноволновом приближении полученная система уравнений может быть сведена к нелинейному эволюционному уравнению Бенджамина–Бона–Махони, в рамках которого исследовано взаимодействие трех модулированных квазигармонических волн (волновых пакетов) при выполнении условий фазового синхронизма. Исследовано также формирование связанных трехчастотных солитонов огибающих, т.е. волновых пакетов, сохраняющих свои амплитудно-фазовые профили при распространении в метаматериале благодаря компенсирующему действию нелинейных эффектов. Отмечено, что кроме решений, описывающих квазигармонические процессы, полученное эволюционное уравнение имеет точное аналитическое решение в виде уединенной стационарной волны (солитона). Выявлены различия свойств этого солитона и классического солитона Кортевега–де Вриза.

**Ключевые слова:** математическое моделирование, нелинейные волны, акустический метаматериал, цепочка “масса-в-массе”, одномерная система

**DOI:** 10.31857/S0320791922040049

### ВВЕДЕНИЕ

Акустические (или механические) метаматериалы, являясь, по сути дела, не материалами, а ячеистыми периодическими конструкциями, в длинноволновом диапазоне ведут себя подобно непрерывным материалам. Изучение особенностей дисперсии, диссипации и проявления нелинейности акустических волн в метаматериалах представляет интерес. Этот интерес обусловлен как фундаментальной значимостью, так и перспективами практических приложений метаматериалов [1–4], среди которых все чаще называют возможность создания на их основе суперпоглотителей звука [5–8].

Руководствуясь математической аналогией между акустическими и электромагнитными волнами, многие исследователи пытались построить континуальные модели механических метаматериалов. Однако большого успеха на этом пути добиться не удалось, поскольку механические аналоги реально существующих материалов с отрицательной диэлектрической проницаемостью представляют собой деформируемые твердые тела, обладающие отрицательной

массой, плотностью или отрицательным модулем упругости [9–13]. А таких материалов в природе не существует. Избежать этого недостатка удалось на пути структурного моделирования метаматериалов.

В работе [14] рассматривалась одномерная цепочка, содержащая одинаковые массы  $m_1$ , связанные упругими элементами (пружинами), обладающими одинаковой жесткостью  $k_1$ , при этом каждая масса внутри себя содержала еще одну массу  $m_2$  и еще один упругий элемент – пружину с жесткостью  $k_2$  (рис. 1). Такая модель, названная цепочкой “масса-в-массе”, не дает упомянутых абсурдных результатов.

### МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И НЕЛИНЕЙНОЕ ЭВОЛЮЦИОННОЕ УРАВНЕНИЕ

Обобщим модель [14] путем учета квадратичной нелинейности внешнего и внутреннего упругих элементов.

Потенциальная энергия элементарной ячейки цепочки “масса-в-массе” запишется в виде:

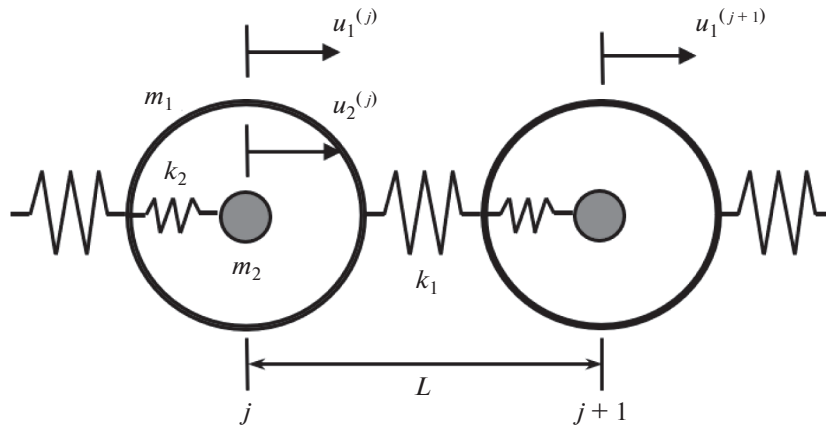


Рис. 1. Механическая модель акустического метаматериала.

$$W^{(j)} = \frac{1}{2} \left[ k_1 (u_1^{(j+1)} - u_1^{(j)})^2 + k_2 (u_2^{(j)} - u_1^{(j)})^2 + h_1 (u_1^{(j+1)} - u_1^{(j)})^3 + h_2 (u_2^{(j)} - u_1^{(j)})^3 \right], \quad (1)$$

где  $h_{1,2}$  – коэффициенты, характеризующие нелинейные добавки к жесткостям пружин; а ее кинетическая энергия – в виде:

$$T^{(j)} = \frac{1}{2} \left[ m_1 (\dot{u}_1^{(j)})^2 + m_2 (\dot{u}_2^{(j)})^2 \right]. \quad (2)$$

Позволим  $u_1(x)$  и  $u_2(x)$  быть непрерывными функциями, которые дают смещения всех  $m_1$  и  $m_2$ , соответственно. Используя разложение перемещений в ряд Тэйлора и ограничиваясь при этом двумя слагаемыми, получим

$$u_1^{(j+1)} = u_1(x + L) = u_1(x) + \frac{\partial u_1}{\partial x} L = u_1^{(j)} + \frac{\partial u_1}{\partial x} L. \quad (3)$$

Техника разложения перемещений в (3) эффективно применялась И.А. Куниным [15] при преобразовании многомассовых дискретных систем в квазиконтинуум.

Плотности потенциальной и кинетической энергий для эквивалентного континуума, полученные из (5) и (6), запишутся в виде:

$$W = \frac{1}{2L} \left[ k_1 \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} L \right)^2 + k_2 (u_2 - u_1)^2 + h_1 \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} L \right)^3 + h_2 (u_2 - u_1)^3 \right], \quad (4)$$

$$T = \frac{1}{2L} \left[ m_1 (\dot{u}_1)^2 + m_2 (\dot{u}_2)^2 \right]. \quad (5)$$

Сформируем из (4) и (5) лагранжиан  $\mathcal{L} = T - W = \mathcal{L}(\dot{u}_1, \dot{u}_2, u_1, u_2)$  и воспользуемся уравнениями аналитической механики

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{1,x}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_1} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_2} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_2} = 0 \end{cases}$$

для получения системы уравнений в перемещениях. В результате получим:

$$\begin{aligned} \frac{m_1}{L} \ddot{u}_1 - k_1 L \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - 3h_1 L^3 \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \\ - \frac{k_2}{L} (u_2 - u_1) - \frac{3h_2}{2L} (u_2 - u_1)^2 = 0, \quad (6) \\ \frac{m_2}{L} \ddot{u}_2 - \frac{k_2}{L} (u_2 - u_1) - \frac{3h_2}{2L} (u_2 - u_1)^2 = 0. \end{aligned}$$

Перейдем в (6) в движущуюся систему координат  $\xi = x - ct$ ,  $\tau = \epsilon t$ , где  $c$  – скорость волны, заранее не известная,  $\epsilon$  – малый параметр, характеризующий отношение максимальной амплитуды перемещения к длине волны. Выбор переменных объясняется тем, что возмущение, распространяясь со скоростью  $c$  вдоль оси  $x$ , медленно эволюционирует во времени из-за нелинейности и дисперсии.

Представим перемещения в виде разложений в ряды по степеням малого параметра

$$\begin{aligned} u_1(\xi, \tau) &= u_1^{(0)}(\xi, \tau) + \epsilon u_1^{(1)}(\xi, \tau) + \dots, \\ u_2(\xi, \tau) &= u_2^{(0)}(\xi, \tau) + \epsilon u_2^{(1)}(\xi, \tau) + \dots \end{aligned} \quad (7)$$

Подставляя разложения (7) в (6), приходим к системе уравнений разного порядка малости по степеням  $\epsilon$ . Нулевое приближение по малому параметру позволяет вычислить значение скорости  $c = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} L$  и определяет связь между перемещениями

$$u_1^{(0)} = u_2^{(0)} - \frac{m_2 k_1 L^2}{m_1 k_2} \frac{\partial^2 u_2^{(0)}}{\partial \xi^2}. \quad (8)$$

Первое приближение приводит к эволюционному уравнению

$$\begin{aligned} & -2\sqrt{m_1 k_1 \varepsilon} \frac{\partial U}{\partial \tau} - \frac{m_2 k_1 L}{m_1} \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{2m_2 k_1 L \sqrt{k_1}}{k_2 \sqrt{m_1}} \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^2 \partial \tau} - \\ & - 3h_1 L^3 U \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{3h_1 L^5 m_2 k_1}{m_1 k_2} \frac{\partial U}{\partial \xi} \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \\ & + \frac{3h_1 L^5 m_2 k_1}{m_1 k_2} U \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3} - 3h_1 L^3 \left( \frac{m_2 k_1 L^2}{m_1 k_2} \right)^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3} - \\ & - \frac{3h_2}{2L} \left( \frac{m_2 k_1 L^2}{m_1 k_2} \right)^2 \left( \frac{\partial U}{\partial \xi} \right)^2 = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $U = \frac{\partial^2 u_2^{(0)}}{\partial \xi^2}$ .

Пусть  $\xi/\xi_0 = X$ ,  $\tau/\tau_0 = T$ , а пространственный и временной масштабы выбраны так, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{\xi_0}{\tau_0} = \frac{3h_1 L^3}{2\sqrt{m_1 k_1 \varepsilon}}.$$

В новых переменных уравнение (9) переписывается в виде

$$\begin{aligned} & \frac{\partial U}{\partial T} + d_1 \frac{\partial U}{\partial X} - d_2 \frac{\partial^3 U}{\partial X^2 \partial T} + U \frac{\partial U}{\partial X} + \\ & + g_1 \frac{\partial U}{\partial X} \left( U \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} \right) + g_2 \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} \frac{\partial^3 U}{\partial X^3} + g_3 \left( \frac{\partial U}{\partial X} \right)^2 = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{m_2 k_1}{3m_1 h_1 L^2}, \quad d_2 = \frac{m_2 k_1}{\varepsilon 10^2 m_1 k_2 L}, \quad g_1 = -\frac{10^{-2} m_2 k_1}{m_1 k_2}, \\ g_2 &= \frac{10^{-4} (m_2 k_1)^2}{(m_1 k_2)^2}, \quad g_3 = \frac{h_2 (m_2 k_1)^2}{20h_1 L^3 (m_1 k_2)^2}. \end{aligned}$$

Для длинноволновых процессов ( $\xi_0 \sim 10L$ ),  $g_1, g_2, g_3 \ll 1$  и (10) переходит в известное в нелинейной волновой динамике уравнение Бенджамина–Бона–Махони:

$$\frac{\partial U}{\partial T} + d_1 \frac{\partial U}{\partial X} - d_2 \frac{\partial^3 U}{\partial X^2 \partial T} + U \frac{\partial U}{\partial X} = 0. \quad (11)$$

### КВАЗИГАРМОНИЧЕСКИЕ МОДУЛИРОВАННЫЕ ВОЛНЫ

Пусть в цепочке, описываемой уравнением (11), распространяются три волновых пакета (модулированные квазигармонические волны):

$$U(X, T) = \sum_{n=1}^N A_n(\varepsilon X, \varepsilon T) e^{i(\omega_n T - q_n X + \phi_n^{(0)})} + \text{к.с.} + \varepsilon Q_n, \quad (12)$$

где  $A_n$  – комплексные амплитуды, медленно изменяющиеся во времени и в пространстве;  $\phi_n^{(0)}$  – начальные сдвиги фаз;  $Q_n$  – малые добавки.

Несущие частоты пакетов связаны соотношением

$$\omega_3 = \omega_1 + \omega_2, \quad (13)$$

а волновые числа – соотношением

$$q_3 = q_1 + q_2. \quad (14)$$

Подставляя (12) в уравнение динамики (11) и проводя процедуру усреднения по быстрым переменным [16], приходим к системе

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_1}{\partial X} + \frac{1}{v_{gr1}} \frac{\partial A_1}{\partial T} &= -i\Gamma_1 A_3 A_2^*, \\ \frac{\partial A_2}{\partial X} + \frac{1}{v_{gr2}} \frac{\partial A_2}{\partial T} &= -i\Gamma_2 A_3 A_1^*, \\ \frac{\partial A_3}{\partial X} + \frac{1}{v_{gr3}} \frac{\partial A_3}{\partial T} &= -i\Gamma_3 A_1 A_2, \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$v_{grj} = \frac{d_1 - 2q_j \omega_j d_2}{1 + q_j^2 \omega_j d_2}$$

– групповые скорости;

$$\Gamma_j = -\frac{q_j}{\varepsilon(d_1 - 2q_j \omega_j d_2)}.$$

При отсутствии нелинейного взаимодействия ( $\Gamma_j = 0$ ) правые части системы (15) исчезают и каждый волновой пакет распространяется со своей групповой скоростью.

В [17] показано, что в квадратично-нелинейной среде могут сформироваться трехчастотные, параметрически связанные солитоны огибающих. Такие солитоны распространяются с некоторой общей групповой скоростью  $v_{grc}$ .

Профили солитонов определяются из системы уравнений

$$\begin{aligned} v_{c1} \frac{dB_{1c}}{d\theta_c} &= -\Gamma_1 B_{3c} B_{2c}, \quad v_{c2} \frac{dB_{2c}}{d\theta_c} = -\Gamma_2 B_{3c} B_{1c}, \\ v_{c3} \frac{dB_{3c}}{d\theta_c} &= \Gamma_3 B_{1c} B_{2c}, \end{aligned} \quad (16)$$

которая получается из системы (15) при нахождении ее квазистационарных решений. Здесь

$B_{nc}(\theta_c)$  — действительные амплитуды волновых пакетов;  $\theta_c = T - X/v_{\text{grc}}; v_{cj} = \frac{1}{v_{\text{grc}}} - \frac{1}{v_{\text{grc}}}$ .

Одним из решений системы уравнений (16) является набор из трех квазистационарных профилей амплитуд квазигармонических волн:

$$\begin{aligned} B_{1c} &= E_{01} \operatorname{sech}(\theta_c/T_c), & B_{2c} &= E_{02} \operatorname{sech}(\theta_c/T_c), \\ B_{3c} &= E_{03} \operatorname{th}(\theta_c/T_c). \end{aligned} \quad (17)$$

Амплитуды огибающих  $E_{0n}$ , их длительность  $T_c$  и групповая скорость связаны соотношениями

$$v_{nc} E_{0n}^2 = \Gamma_n T_c E_{01} E_{02} E_{03} \quad (n = 1, 2, 3). \quad (18)$$

### НЕСИНУСОИДАЛЬНАЯ ЛОКАЛИЗОВАННАЯ ВОЛНА

Кроме решений, описывающих квазигармонические процессы, уравнение (11) имеет точное аналитическое решение в виде уединенной стационарной волны (солитона) [18]:

$$U = 3(V - d_1) \operatorname{sech}^2 \left[ \frac{\sqrt{V - d_1}}{2Vd_2} (X - VT) \right], \quad (19)$$

где  $d_2 > 0, V > d_1$ .

Из (19) следует, что для рассматриваемого метаматериала амплитуда солитона определяется соотношением

$$A = 3 \left( V - \frac{m_2 k_1}{3m_1 h_1 L^2} \right), \quad (20)$$

а его ширина соотношением

$$\Delta = \frac{2Vm_2 k_1}{\epsilon 10^2 m_1 k_2 L \sqrt{V - \frac{m_2 k_1}{3m_1 h_1 L^2}}}. \quad (21)$$

Амплитуда солитона линейно растет с ростом скорости. Для системы с “мягкой” нелинейностью ( $h_1 < 0$ ) нарастает стремительнее, чем для систем с “жесткой” нелинейностью ( $h_1 > 0$ ). С ростом скорости увеличивается и ширина солитона, что говорит о принципиальном различии свойств солитона (19) и классического солитона Кортевега–де Вриза.

Заметим, что дальнейшие обобщения рассматриваемой модели могут быть получены путем учета соударений внешней и внутренней масс цепочки. Подобные задачи рассматривались в работах [19].

Работа выполнялась при поддержке Российского научного фонда (грант № 21-19-00813).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Буров В.А., Волошинов В.Г., Дмитриев К.В., Поликарпова Н.В. Акустические волны в метаматериалах, кристаллах и структурах с аномальным преломлением // Успехи физ. наук. 2011. Т. 181. № 11. С. 1205–1211.
2. Norris A.N., Haberman M.R. Introduction to the Special issue on acoustic metamaterials // J. Acoust. Soc. Am. 2012. V. 132. № 4(2). P. 2783–2945.
3. Acoustic metamaterials and phononic crystals / Ed. Deymier P.A. Berlin: Springer-Verlag, 2013. 378 p.
4. Acoustic metamaterials: negative refraction, imaging, lensing and cloaking / Eds. Craster R.V., Guenneau S. Dordrecht: Springer, 2013. 323 p.
5. Бобровницкий Ю.И. Эффективные параметры и энергия акустических метаматериалов и сред // Акуст. журн. 2014. Т. 60. № 2. С. 137–144.
6. Бобровницкий Ю.И. Модели и общие волновые свойства двумерных акустических метаматериалов и сред // Акуст. журн. 2015. Т. 61. № 3. С. 283–294.
7. Бобровницкий Ю.И., Томилина Т.М., Лактионова М.М. Дискретная модель акустических метаматериалов с потерями // Акуст. журн. 2016. Т. 62. № 1. С. 3–9.
8. Федотовский В.С. Поперечные волны в дисперсном метаматериале со сферическими включениями // Акуст. журн. 2015. Т. 61. № 3. С. 311–316.
9. Li J., Chan C.T. Double-negative acoustic metamaterial // Phys. Rev. 2004. E 70. 055602.
10. Fang N., Xi D., Xu J., Ambati M., Srituravanich W., Sun C., Zhang X. Ultrasonic metamaterials with negative modulus // Nat. Mater. 2006. V. 5. P. 452–456.
11. Ding Y., Liu Z., Qiu C., Shi J. Metamaterial with simultaneously negative bulk modulus and mass density // Phys. Rev. Lett. 2007. V. 99. P. 093904.
12. Cheng Y., Xu J.Y., Liu X.J. One-dimensional structured ultrasonic metamaterials with simultaneously negative dynamic density and modulus // Phys. Rev. B. 2008. V. 77. P. 045134.
13. Chan C.T., Li J., Fung K.H. On extending the concept of double negativity to acoustic waves // J. Zhejiang Univ. SCIENCE A. 2006. V. 7(1). P. 24–28.
14. Huang H.H., Sun C.T., Huang G.L. On the negative effective mass density in acoustic metamaterials // Int. J. Eng. Sci. 2009. V. 47. P. 610–617.
15. Kunin I.A. Elastic Media with Microstructure I & II. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1982–1983.
16. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984. 432 с.
17. Сухоруков А.П. Нелинейные волновые взаимодействия в оптике и радиофизике. М.: Наука, Физматлит, 1988. 232 с.
18. Селезов И.Т., Корсунский С.В. Нестационарные и нелинейные волны в электропроводящих средах. Киев: Наукова думка, 1991. 200 с.
19. Крупенин В.Л. Об описании сильно нелинейных вибропроводящих и виброгенерирующих сред // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2016. № 4. С. 9–19.