

КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ
И ТЕОРИИ ВОЛН

УДК 534.23; 534.26

К ДИФРАКЦИИ ТОЧЕЧНОГО ИСТОЧНИКА ЗВУКА
НА БЕСКОНЕЧНОМ КЛИНЕ

© 2022 г. М. А. Сумбатян^а, *, **, Т. С. Мартынова^а, Н. К. Мусатова^а

^аЮжный федеральный университет, Институт математики, механики и компьютерных наук им. Воровича,
ул. Мильчакова 8а, Ростов-на-Дону, 344090 Россия

*e-mail: masumbatyan@sfnu.ru

**e-mail: sumbatma@mail.ru

Поступила в редакцию 09.09.2021 г.

После доработки 13.01.2022 г.

Принята к публикации 25.01.2022 г.

Рассматривается двумерная задача дифракции гармонической звуковой волны, исходящей из точечного источника звука, который расположен вблизи острого угла бесконечного клина несимметрично относительно его граней. Граница считается акустически жесткой. В рамках метода граничных интегральных уравнений при несимметричном расположении источника звука задача сводится к системе из двух интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Поведение решения при приближении к окрестности угловой точки определяется условием Мейкснера. В явном виде находится значение давления на конце клина в вершине угла. Производится асимптотическая оценка поведения функции давления на бесконечности. Дискретизация сводит систему основных граничных интегральных уравнений к системе линейных алгебраических уравнений. Предлагается “улучшенная” схема дискретизации с тремя интервалами различной плотности на каждой грани. Построено давление в рассеянном поле.

Ключевые слова: звуковое поле, метод граничных интегральных уравнений, уравнение Фредгольма, функция Грина

DOI: 10.31857/S0320791922030145

ВВЕДЕНИЕ

Задача дифракции акустических волн на твердом бесконечном клине является классической [1]. По-видимому, Зоммерфельд, создавая свою теорию дифракции, впервые применил к этой задаче строгие математические методы [2]. Геометрическая теория дифракции Келлера [3] также эффективна в применении к рассматриваемой задаче. Что касается численных методов, то их приложение к дифракции на клине изложено в работах [4–6], где также приводятся много других полезных ссылок. Общий подробный обзор известных методов дан в работе [7]. В работах [8–10] также рассматриваются задачи дифракции, однако в качестве областей взяты замкнутые контуры в виде тел вращения. В недавней работе [11] авторами рассмотрен частный случай задачи, когда точечный источник звука расположен симметрично относительно граней клина. Главной целью настоящей работы является обобщение результатов работы [11] на случай произвольного несимметричного расположения источника.

Заметим, что эффективные численные методы на основе граничных элементов для дифракции на телах с углами с успехом развивались ранее [12, 13], однако они применимы лишь к выпуклым препятствиям.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА
ЗАДАЧИ

Рассмотрим двумерную задачу дифракции гармонической звуковой волны, исходящей из точечного источника звука с координатами (x_0, y_0) , который расположен вблизи острого угла бесконечного клина с углом раствора 2θ , как показано на рис. 1. Считаем границу акустически жесткой (однородное граничное условие Неймана) и состоящей из двух частей – верхней l_1 и нижней l_2 .

В рамках метода граничных интегральных уравнений (ГИУ) [14] при несимметричном расположении источника звука задача дифракции сводится к системе из двух интегральных уравнений Фредгольма второго рода:

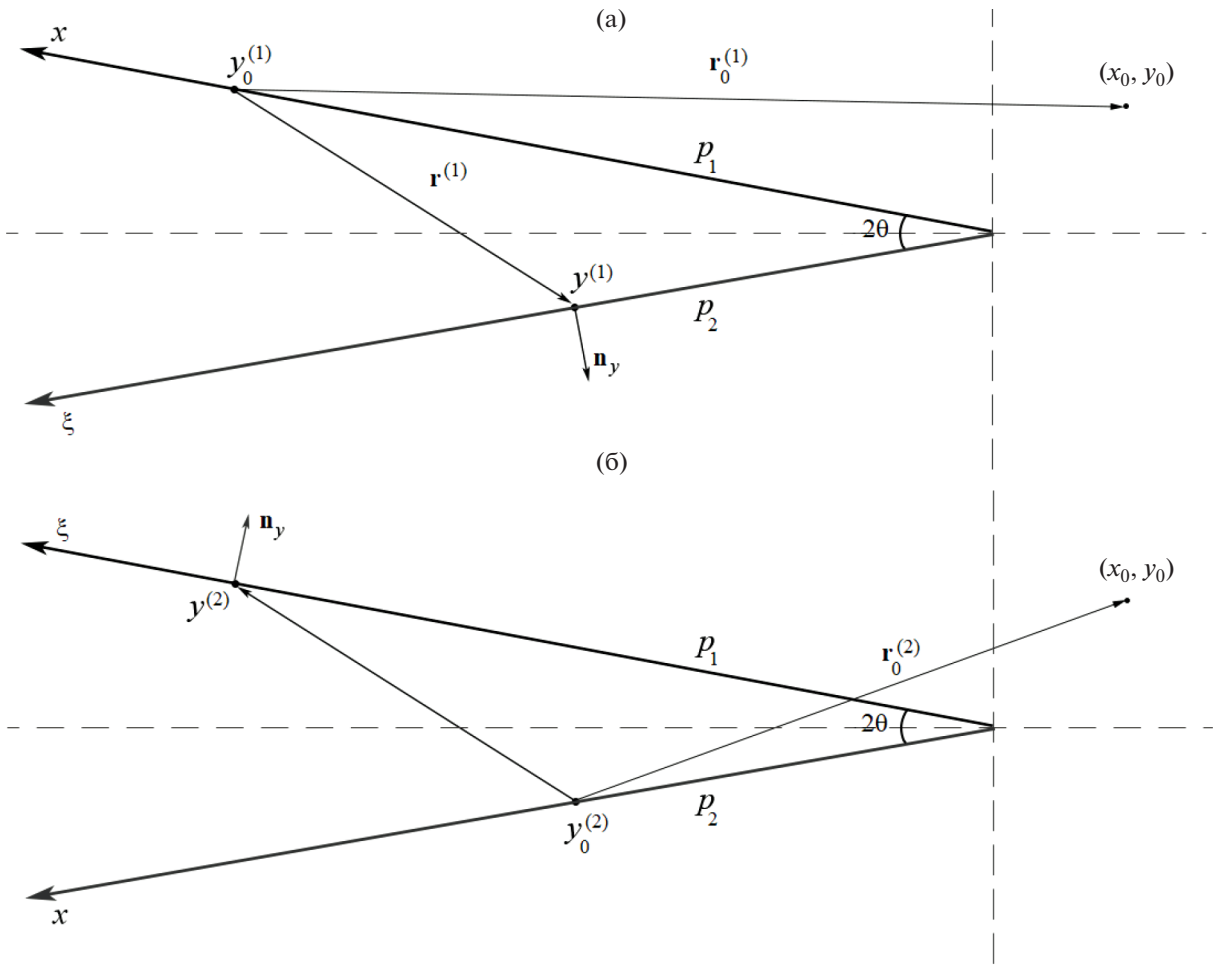


Рис. 1. Дифракция звуковой волны, излучаемой точечным источником, вблизи бесконечного клина, соответствующая (а) – первому ($y_0 \in l_1, y \in l_2$) и (б) – второму ($y_0 \in l_2, y \in l_1$) уравнениям.

$$\begin{cases} p_1(y_0^{(1)}) - 2 \int_{l_2} \frac{\partial G(y^{(2)}, y_0^{(1)})}{\partial n_y^{(2)}} p_2(y^{(2)}) dl_y^{(2)} = \\ = 2p_1^{\text{inc}}(y_0^{(1)}), y_0^{(1)} \in l_1, \\ -2 \int_{l_1} \frac{\partial G(y^{(1)}, y_0^{(2)})}{\partial n_y^{(1)}} p_1(y^{(1)}) dl_y^{(1)} + p_2(y_0^{(2)}) = \\ = 2p_2^{\text{inc}}(y_0^{(2)}), y_0^{(2)} \in l_2, \end{cases} \quad (1)$$

где $p_1(y)$ и $p_2(y)$ – полное акустическое давление на верхней и нижней гранях соответственно; p^{inc} – акустическое давление в падающей волне; $G = (i/4)H_0^{(1)}(kr)$ – функция Грина; $n_y^{(1)}, n_y^{(2)}$ – единичная нормаль к граничному контуру в точках $y^{(1)}$ и $y^{(2)}$ соответственно; $dl_y^{(1)}, dl_y^{(2)}$ – элементарная длина граничной кривой в точках $y^{(1)}$ и $y^{(2)}$ соответственно; $H_0^{(1)}$ – функция Ханкеля первого рода

нулевого порядка. “Внутренние” $y^{(1)}, y^{(2)}$ и “внешние” $y_0^{(1)}, y_0^{(2)}$ точки – двумерные точки на границе, т.е. точки, имеющие две декартовы координаты в плоскости рис. 1. В этих формулах опущен временной множитель $\exp(-i\omega t)$, где ω – круговая частота гармонических колебаний.

В системе (1) учтено, что в случае, когда точки $y^{(1)}$ и $y_0^{(1)}$ (или $y^{(2)}$ и $y_0^{(2)}$) лежат на одной стороне клина, вклад соответствующей части интегрального оператора равен нулю, так как в этом случае

$$\frac{\partial G}{\partial n_y} = \frac{\partial G}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n_y}, \quad \frac{\partial r}{\partial n_y} = \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}_y)}{|\mathbf{r}|} = 0, \quad \mathbf{r} = \mathbf{y} - \mathbf{y}_0,$$

поскольку вектор расстояния \mathbf{r} ортогонален вектору нормали.

Поведение решения при приближении к окрестности угловой точки определяется условием Мейкснера (см., например, [7]). Оно гласит, что для того, чтобы физическая энергия сохраня-

лась конечной в любой окрестности угла клина, решение должно удовлетворять следующему условию при $r \rightarrow 0$:

$$p(y) \sim D + O(r^\delta), \quad \delta = \min\left(\frac{\pi}{2(\pi - \theta)}, 2\right),$$

где r – расстояние между текущей точкой и углом клина, D – некоторая константа. Поскольку параметр δ всегда положительный, сингулярности решения в окрестности угла нет. Поэтому вклад малой окрестности угла в интеграл является малым, следовательно, нет необходимости помещать внешние точки $y_0^{(1)}$ и $y_0^{(2)}$ точно в угол. Именно по этой причине коэффициент перед интегральными операторами в системе ГИУ (1) равен двойке. В противном случае пришлось бы применять коэффициент, зависящий от угла раствора клина.

Выпишем декартовы координаты точек и нормалей, входящих в первое уравнение системы (1). Для этого в первом уравнении направим ось x по верхней грани клина от угла влево, а ось ξ аналогично по нижней грани. Соответственно, во втором уравнении ось x направим по нижней грани клина от угла влево, а ось ξ аналогично по верхней грани. Тогда в системе координат, связанной естественным образом с горизонтальной и вертикальной осью, имеем

$$y^{(2)} = (-\xi \cos \theta, -\xi \sin \theta), \quad y_0^{(1)} = (-x \cos \theta, x \sin \theta), \\ n_y^{(2)} = (\sin \theta, -\cos \theta).$$

Вектор расстояния между точками $y^{(2)}$ и $y_0^{(1)}$ равен

$$(y^{(2)} - y_0^{(1)}) = ((x - \xi) \cos \theta, -(x + \xi) \sin \theta), \\ |y^{(2)} - y_0^{(1)}| = \sqrt{x^2 + \xi^2 - 2x\xi \cos 2\theta},$$

а вектор расстояния между точкой $y_0^{(1)}$ и источником звука $S = (x^0, y^0)$

$$r_0^{(1)} = (S - y_0^{(1)}) = (x^0 + x \cos \theta, y^0 - x \sin \theta), \\ r_0^{(1)} = \sqrt{(x^0)^2 + (y^0)^2 + x^2 + 2x(x^0 \cos \theta - y^0 \sin \theta)}.$$

Для второго уравнения имеем

$$y^{(1)} = (-\xi \cos \theta, \xi \sin \theta), \quad y_0^{(2)} = (-x \cos \theta, -x \sin \theta), \\ n_y^{(1)} = (\sin \theta, \cos \theta),$$

поэтому

$$(y^{(1)} - y_0^{(2)}) = ((x - \xi) \cos \theta, (x + \xi) \sin \theta), \\ |y^{(1)} - y_0^{(2)}| = \sqrt{x^2 + \xi^2 - 2x\xi \cos 2\theta}.$$

Кроме того,

$$r_0^{(2)} = (S - y_0^{(2)}) = (x^0 + x \cos \theta, y^0 + x \sin \theta), \\ r_0^{(2)} = \sqrt{(x^0)^2 + (y^0)^2 + x^2 + 2x(x^0 \cos \theta + y^0 \sin \theta)}.$$

Заметим, что модуль расстояния между “внутренней” и “внешней” точками для двух уравнений имеет один и тот же вид:

$$|y^{(2)} - y_0^{(1)}| = |y^{(1)} - y_0^{(2)}| = \\ = r = \sqrt{x^2 + \xi^2 - 2x\xi \cos 2\theta}.$$

Помимо этого легко видеть, что один и тот же вид имеют скалярные произведения вектора расстояния на нормаль в обоих уравнениях. Следовательно, производная функции Грина по нормали вычисляется одинаковым образом для обоих уравнений:

$$G = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(kr), \quad \frac{\partial G}{\partial n_y} = \frac{\partial G}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n_y}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial G}{\partial r} = -\frac{ik}{4} H_1^{(1)}(kr),$$

$$\frac{\partial r}{\partial n_y} = \frac{(rn_y)}{r} =$$

$$= \frac{(x - \xi) \cos \theta \sin \theta + (x + \xi) \cos \theta \sin \theta}{\sqrt{x^2 + \xi^2 - 2x\xi \cos \theta}} = \\ = \frac{x \sin 2\theta}{\sqrt{x^2 + \xi^2 - 2x\xi \cos \theta}}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial G}{\partial n_y} = -\frac{ikx \sin 2\theta}{4\sqrt{x^2 + \xi^2 - 2x\xi \cos \theta}} H_1^{(1)}(kr). \quad (4)$$

Собирая вместе формулы (2)–(4), преобразуем систему ГИУ (1) к следующему виду

$$\begin{cases} p_1(x) + \frac{ikx \sin 2\theta}{2} \int_0^\infty \frac{H_1^{(1)}(kr)}{r} p_2(\xi) d\xi = \\ = 2p_1^{\text{inc}}(x), \quad x \in (0, \infty), \\ \frac{ikx \sin 2\theta}{2} \int_0^\infty \frac{H_1^{(1)}(kr)}{r} p_1(\xi) d\xi + p_2(x) = \\ = 2p_2^{\text{inc}}(x), \quad x \in (0, \infty). \end{cases} \quad (5)$$

При этом давление в падающем поле в первом уравнении равно $p_1^{\text{inc}}(x) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(kr_0^{(1)})$, а во втором $p_2^{\text{inc}}(x) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(kr_0^{(2)})$.

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ В УГЛЕ

В статье авторов [11] найдено точное значение решения в угле в случае источника, расположенного симметрично относительно граней клина. Найдем значение давления на конце клина в яв-

ном виде в рассматриваемом несимметричном случае. Для этого к системе (5) применим замену переменной $\xi = tx$. Тогда интегральный член в первом уравнении примет вид

$$\int_0^{\infty} \frac{H_1^{(1)}(kx\sqrt{1-2t\cos 2\theta+t^2})}{\sqrt{1-2t\cos 2\theta+t^2}} p_2(tx) dt. \quad (6)$$

Устремим $x \rightarrow 0$ в (6) и вынесем значение $p_2(0)$ за знак интеграла. Принимаем во внимание асимптотическое разложение функции Ханкеля для малого аргумента [15]

$$H_1^{(1)}(\eta) \sim \frac{2}{\pi i \eta}, \quad \eta \rightarrow 0.$$

В итоге в (6) возникает интеграл, который вычисляется в явном виде [16]

$$\int_0^{\infty} \frac{dt}{1-2t\cos 2\theta+t^2} = \frac{\pi-2\theta}{x \sin 2\theta}.$$

После подстановки всех полученных выражений система ГИУ (5) приводит к следующему соотношению

$$\begin{cases} p_1(0) + p_2(0) \frac{\pi-2\theta}{\pi} = 2p_1^{\text{inc}}(0), \\ p_2(0) + p_1(0) \frac{\pi-2\theta}{\pi} = 2p_2^{\text{inc}}(0). \end{cases}$$

Поскольку, как легко видеть, $p_1^{\text{inc}}(0) = p_2^{\text{inc}}(0)$, то точное решение в угле имеет простой вид:

$$p_1(0) = p_2(0) = \frac{\pi}{\pi-\theta} p^{\text{inc}}(0), \quad (7)$$

что совпадает с точным значением в симметричном случае [11]. Формула (7) также подтверждает, что решение в угле действительно непрерывно.

ОЦЕНКА РЕШЕНИЯ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ

Перейдем к безразмерным переменным $z = kx$, $t = k\xi$, в результате система (5) преобразуется к следующему виду

$$\begin{cases} P_1(z) + \frac{iz \sin 2\theta}{2} \int_0^{\infty} \frac{H_1^{(1)}(r(t,z))}{r(t,z)} P_2(t) dt = 2p_1^{\text{inc}}(z), \\ \frac{iz \sin 2\theta}{2} \int_0^{\infty} \frac{H_1^{(1)}(r(t,z))}{r(t,z)} P_1(t) dt + P_2(z) = 2p_2^{\text{inc}}(z), \\ r(t,z) = \sqrt{z^2 + t^2 - 2zt \cos 2\theta}, \quad P(z) = p\left(\frac{z}{k}\right), \end{cases} \quad (8)$$

$$p_{1,2}^{\text{inc}}(z) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}\left(\sqrt{(kx_0)^2 + (ky_0)^2 + z^2 + 2z(kx_0 \cos \theta \mp ky_0 \sin \theta)}\right).$$

Важно отметить, что в (8) ядро интегрального оператора в левых частях обоих уравнений системы не зависит от волнового числа k , а единственная зависимость от данного параметра находится в правых частях. При переходе к дискретной форме матрица соответствующей системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) также не содержит волновое число k .

В дальнейшем все величины, связанные с линейными размерами, будем выражать в безразмерном виде. В частности, далее величины kx_0 и ky_0 будем обозначать просто x_0 и y_0 соответственно.

Ключевым моментом является оценка того, на какой интервал конечной длины $0 < z < L$ следует заменить полубесконечный интервал интегрирования, чтобы обеспечить необходимую точность вычислений при численных расчетах. Для прояснения этого момента проведем асимптотическую оценку функции $P(z)$ при $z \rightarrow \infty$. Приме-

ним стандартное асимптотическое разложение функций r и r_0 :

$$r = z - t \cos 2\theta + O\left(\frac{1}{z}\right),$$

$$r_0^{(1,2)} = z + (x_0 \cos \theta \mp y_0 \sin \theta) + O\left(\frac{1}{z}\right), \quad z \rightarrow \infty.$$

Примем во внимание асимптотическое поведение функции Ханкеля [15]

$$H_n^{(1)}(\eta) = \left(\frac{2}{\pi \eta}\right)^{1/2} \exp[i(\eta - \pi n/2 - \pi/4)],$$

$$\eta \rightarrow \infty.$$

В силу того, что различия двух уравнений системы локализуются только в правых частях уравнений и не влияют на общий ход рассуждений, объединим эти два случая вместе:

$$\begin{aligned}
 P_{1,2}(z) &= \frac{i}{2} \left(\frac{2}{\pi z} \right)^{1/2} \exp[i(z + (x_0 \cos \theta \mp y_0 \sin \theta) - \pi/4)] - \\
 &\quad - \frac{iz \sin 2\theta}{2} \int_0^\infty \left(\frac{2}{\pi z} \right)^{1/2} \frac{\exp[i(z - t \cos 2\theta - 3\pi/4)]}{z} P_{1,2}(t) dt = \\
 &= \frac{e^{iz}}{\sqrt{z}} \left(\frac{\exp(\pi i/4) \exp[i(x_0 \cos \theta \mp y_0 \sin \theta)]}{\sqrt{2\pi}} - \frac{\exp(-3\pi/4) \sin 2\theta}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \exp(-it \cos 2\theta) P_{1,2}(t) dt \right) \sim A_\pm \frac{\exp(iz)}{\sqrt{z}},
 \end{aligned} \tag{9}$$

где A_\pm – некоторая константа. Далее можно показать, что с учетом оценки (9) вклад интегралов по отрезку (L, ∞) имеет порядок $O(1/L^2)$. Таким образом, при применении численных методов следует брать достаточно большую величину L . Эта оценка может быть заметно улучшена введением так называемого “нейтрализатора” Ван дер Корпута [11], который дает экспоненциальное убывание отбрасываемого полубесконечного интеграла.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОСНОВНОЙ СИСТЕМЫ ГИУ

Для удобства дальнейшей дискретизации перепишем (8) в виде

$$\begin{cases} P_1(z) + \int_0^L K(t, z) P_2(t) dt = 2p_1^{\text{inc}}(z), & 0 < z < L, \\ \int_0^L K(t, z) P_1(t) dt + P_2(z) = 2p_2^{\text{inc}}(z), & 0 < z < L, \end{cases} \tag{10}$$

$$K(t, z) = \frac{iz \sin 2\theta H_1^{(1)}(r(t, z))}{2r(t, z)}.$$

Разобьем интервал $0 < z < L$ на N малых интервалов равной длины, и выберем в центре каждого из них соответствующий узел сетки:

$$z_m = (m - 1/2)h, \quad m = 1, \dots, N,$$

где $h = L/N$ – шаг дискретизации. Тогда справедливо соотношение

$$\int_0^L K(t, z_m) P_{1,2}(t) dt = \sum_{j=1}^N \int_{z_j-h/2}^{z_j+h/2} K(t, z_m) P_{1,2}(t) dt.$$

Теперь интегрирование по каждому малому интервалу проведем, используя квадратурную формулу Симпсона [17]. С этой целью введем на интервале $t \in (z_j - h/2, z_j + h/2)$ три точки начала,

конца и середины: $t_1^j = z_j - h/2$, $t_2^j = z_j + h/2$, $t_0^j = z_j$. Формула Симпсона дает [17]:

$$\begin{aligned}
 b_{mj} &= \int_{z_j-h/2}^{z_j+h/2} K(t, z_m) dt \approx \\
 &\approx \frac{h}{6} [K(t_1^j, z_m) + 4K(t_0^j, z_m) + K(t_2^j, z_m)].
 \end{aligned}$$

Применяемая дискретизация сводит систему (10) к СЛАУ размером $2N \times 2N$ относительно вектора $P = \{P_j\}$:

$$AP = f. \tag{11}$$

В матричном виде система (11) записывается так:

$$\begin{pmatrix} \delta_{mj} & b_{mj} \\ b_{mj} & \delta_{mj} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1^j \\ P_2^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1^m \\ f_2^m \end{pmatrix}, \quad m, j = 1, \dots, N,$$

где δ_{mj} – символ Кронекера, а элементы вектора правой части имеют вид:

$$f_1^m = \frac{i}{2} H_0^{(1)}(r_0^{(1)}), \quad f_2^m = \frac{i}{2} H_0^{(1)}(r_0^{(2)}), \quad j = 1, \dots, N.$$

Однако наилучшего соотношения точности к количеству узлов удалось достичь при следующей схеме дискретизации. Каждая грань клина разбивается на три интервала $(0, L_1)$, (L_1, L_2) , (L_2, L_3) с различными, но равномерными шагами N_1, N_2, N_3 соответственно. При этом, чем ближе интервал к вершине угла, тем он меньше по длине и тем большая у него плотность узлов, например

$$\begin{aligned}
 L_1 &= 0.01, & N_1 &= 1500, \\
 L_2 &= 0.05, & N_2 &= 500, \\
 L_3 &= 50, & N_3 &= 300
 \end{aligned}$$

при длине грани, равной $L = L_3$ и общем количестве узлов $N = N_1 + N_2 + N_3$. Тестирование такой сетки показало, что удается значительно повысить точность решения в окрестности вершины

угла, при меньшей общей размерности сетки. Заметим также, что примененный нами подход для уточнения решения в угле лучше, чем неравномерная сетка, сгущающаяся к узлу, т.к. для последней применение квадратурной формулы Симпсона крайне затруднительно. При этом известное точное решение в угле дает надежный метод контроля точности построенного численного решения.

ПРИМЕРЫ РАСЧЕТОВ

Заметим, что для четырех частных углов раствора клина задача дифракции имеет точное решение методом мнимых источников [11]. Это дает хорошую возможность для проверки точности используемого численного метода. Одним из таких углов является случай $\theta = 3\pi/4$, для которого полный угол раствора является тупым: $2\theta = 270^\circ$. В этом случае в дополнение к одному реальному источнику звука X_0 в результате множественных переотражений возникает еще 3 мнимых X_1, X_2, X_3 , расположенных симметрично относительно граней клина. В естественной декартовой системе координаты этих точек в безразмерном виде равны $X_0 = (x_0, y_0)$, $X_1 = (y_0, x_0)$, $X_2 = (-x_0, -y_0)$, $X_3 = (-y_0, -x_0)$. Текущая точка на верхней грани имеет координаты $\bar{X} = (z, z)/\sqrt{2}$, если считать, что z – это переменная на положительной полупрямой. Тогда расстояния записываются в виде

$$\begin{aligned} r_1^0 &= |\bar{X} - \bar{X}_0| = \sqrt{(z/\sqrt{2} - x_0)^2 + (z/\sqrt{2} - y_0)^2}, \\ r_1^1 &= |\bar{X} - \bar{X}_1| = \sqrt{(z/\sqrt{2} - y_0)^2 + (z/\sqrt{2} - x_0)^2}, \\ r_1^2 &= |\bar{X} - \bar{X}_2| = \sqrt{(z/\sqrt{2} + x_0)^2 + (z/\sqrt{2} + y_0)^2}, \\ r_1^3 &= |\bar{X} - \bar{X}_3| = \sqrt{(z/\sqrt{2} + y_0)^2 + (z/\sqrt{2} + x_0)^2}. \end{aligned}$$

Если текущая точка располагается на нижней грани $\bar{X} = (z, -z)/\sqrt{2}$, расстояния равны

$$\begin{aligned} r_2^0 &= \sqrt{(z/\sqrt{2} - x_0)^2 + (z/\sqrt{2} + y_0)^2}, \\ r_2^1 &= \sqrt{(z/\sqrt{2} - y_0)^2 + (z/\sqrt{2} + x_0)^2}, \\ r_2^2 &= \sqrt{(z/\sqrt{2} + x_0)^2 + (z/\sqrt{2} + y_0)^2}, \\ r_2^3 &= \sqrt{(z/\sqrt{2} + y_0)^2 + (z/\sqrt{2} + x_0)^2}. \end{aligned}$$

Таким образом, явное аналитическое решение в этом частном случае имеет вид

$$\begin{cases} p_1(x) = p^{\text{inc}}(r_1^0) + p^{\text{inc}}(r_1^1) + p^{\text{inc}}(r_1^2) + p^{\text{inc}}(r_1^3), \\ p_2(x) = p^{\text{inc}}(r_2^0) + p^{\text{inc}}(r_2^1) + p^{\text{inc}}(r_2^2) + p^{\text{inc}}(r_2^3), \end{cases}$$

где $p^{\text{inc}}(r) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(r)$. Самым критичным при сравнении численного решения с точным является поведение в окрестности угла.

Сравнивая численное решение, построенное методом ГИУ, и аналитическое, построенное методом мнимых источников, можно сказать, что как мнимая, так и вещественная части давления визуально совпадают вдоль всего интервала $0 < z < L$ при общем количестве узлов сетки $N = 2100$, что соответствует трем верным значащим цифрам в числовых значениях. Пример для угла $\theta = 3\pi/4$ (рис. 2, 3) показывает, что разбиение граней на 3 равномерных интервала с более густой сеткой в окрестности угла сводит влияние этой окрестности на численное решение к минимуму.

ДАВЛЕНИЕ В РАССЕЯННОМ ВОЛНОВОМ ПОЛЕ

После решения системы ГИУ (5) можно считать давление в рассеянном поле в любой точке акустической среды. Пусть точка $x(x_1, x_2)$ – произвольная точка в естественной декартовой системе координат, связанной с горизонтальным и вертикальным направлениями. Рассеянное давление в ней описывается формулой

$$\begin{aligned} p^{\text{sc}}(x) &= \int_l p(y) \frac{\partial G(y, x)}{\partial n_y} dl_y = \\ &= \int_{l_1} p_1(y^{(1)}) \frac{\partial G(y^{(1)}, x)}{\partial n_y^{(1)}} dl_y^1 + \int_{l_2} p_2(y^{(2)}) \frac{\partial G(y^{(2)}, x)}{\partial n_y^{(2)}} dl_y^2. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь $p_1(y^{(1)})$, $p_2(y^{(2)})$ – полное акустическое давление на границах l_1 и l_2 , полученное при решении системы ГИУ. Производная функции Грина вычисляется аналогично вычисленной для ядра интегральных операторов выше. Случай l_1 :

$$\frac{\partial G(y, x)}{\partial n_y^{(1)}} = \frac{\partial G}{\partial r_{xy}^{(1)}} \frac{\partial r_{xy}^{(1)}}{\partial n_y^{(1)}} = -\frac{i}{4} H_1^{(1)}(r_{xy}^{(1)}) \frac{(\mathbf{r}_{xy}^{(1)} \cdot \mathbf{n}_y^{(1)})}{|\mathbf{r}_{xy}^{(1)}|}. \quad (13)$$

Для кривой l_2 в формуле (13) верхний индекс (1) заменится на (2).

Координаты точек и вектора нормали для кривой l_1 :

$$\begin{aligned} y^{(1)} &= (-\xi \cos \theta, \xi \sin \theta), \quad n_y^{(1)} = (\sin \theta, \cos \theta), \\ r_{xy}^{(1)} &= (-\xi \cos \theta - x_1, \xi \sin \theta - x_2), \\ r_{xy}^{(1)} &= \sqrt{(\xi \cos \theta + x_1)^2 + (\xi \sin \theta - x_2)^2}. \end{aligned}$$

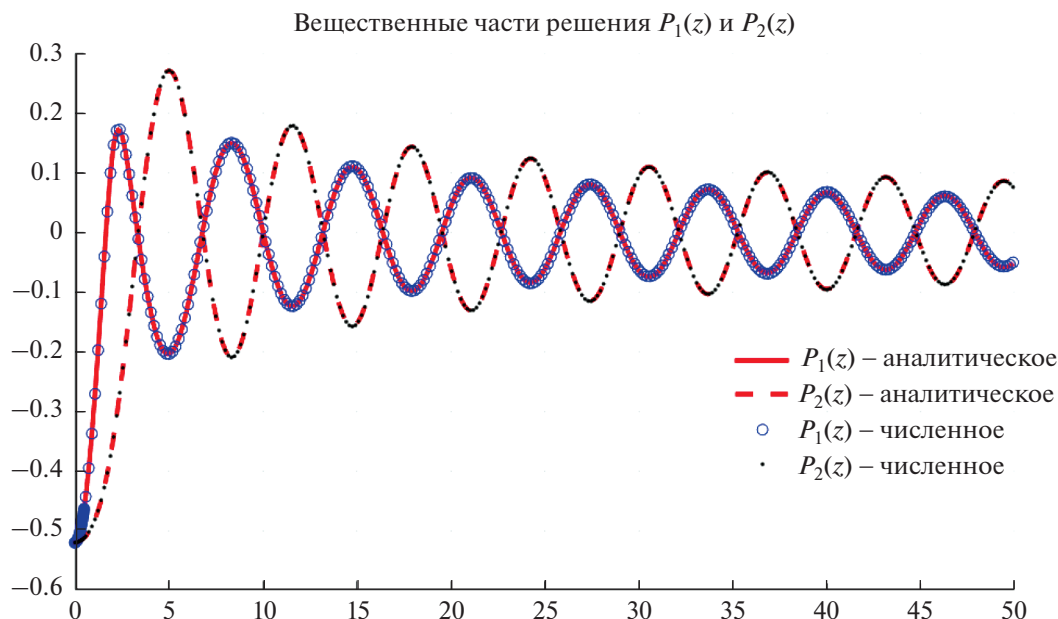


Рис. 2. Вещественные части акустического давления на верхней и нижней гранях: $\theta = 3\pi/4$, $X_0 = (2,1)$, $L_1 = 0.01$, $N_1 = 1500$, $L_2 = 0.5$, $N_2 = 300$, $L_3 = 50$, $N_3 = 300$.

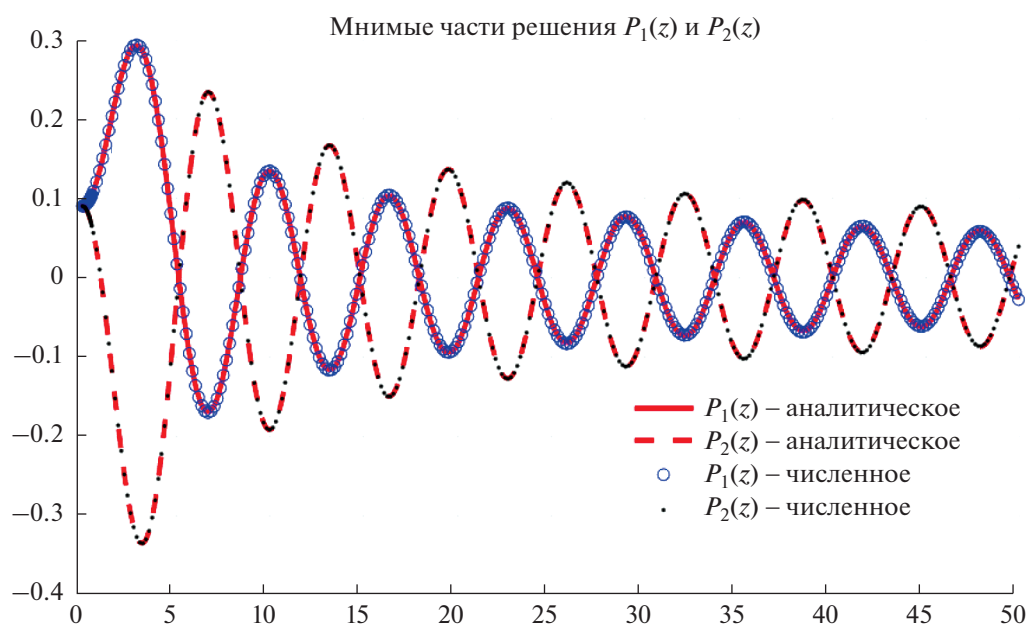


Рис. 3. Мнимые части акустического давления на верхней и нижней гранях: $\theta = 3\pi/4$, $X_0 = (2,1)$, $L_1 = 0.01$, $N_1 = 1500$, $L_2 = 0.5$, $N_2 = 300$, $L_3 = 50$, $N_3 = 300$.

Аналогичные величины для кривой l_2 :

$$y^{(2)} = (-\xi \cos \theta, -\xi \sin \theta), \quad n_y^{(2)} = (\sin \theta, -\cos \theta),$$

$$r_{xy}^{(2)} = (-\xi \cos \theta - x_1, -\xi \sin \theta - x_2),$$

$$r_{xy}^{(2)} = \sqrt{(\xi \cos \theta + x_1)^2 + (\xi \sin \theta + x_2)^2}.$$

В итоге выражение (12) принимает вид:

$$p^{sc}(x) = \frac{i}{4} \int_0^\infty \left[p_1(\xi) H_1^{(1)}(r_{xy}^{(1)}) \frac{x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta}{r_{xy}^{(1)}} + p_2(\xi) H_1^{(1)}(r_{xy}^{(2)}) \frac{x_1 \sin \theta - x_2 \cos \theta}{r_{xy}^{(2)}} \right] d\xi, \quad (14)$$

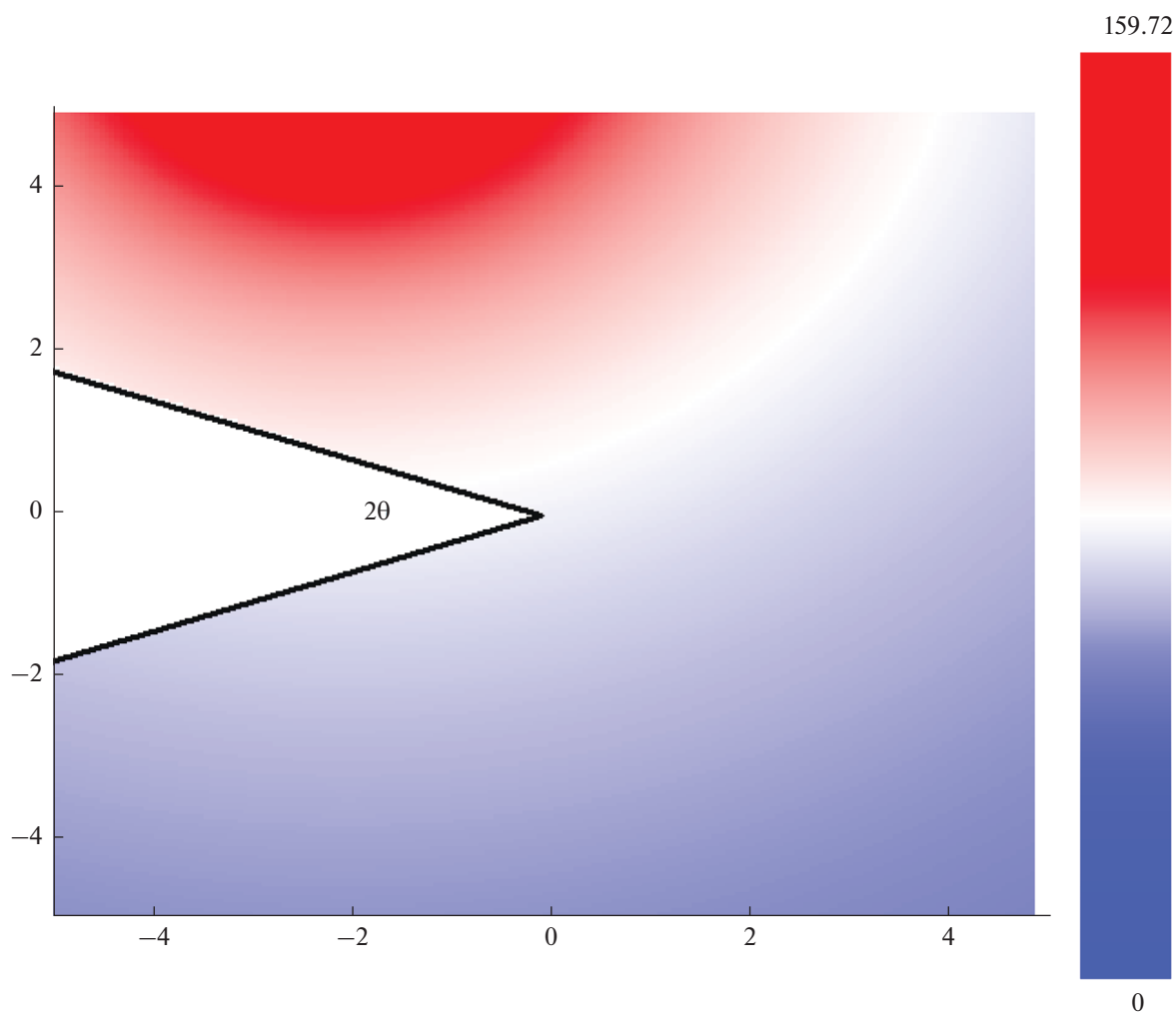


Рис. 4. Амплитуда полного акустического поля в среде вокруг бесконечного клина: $\theta = \pi/9$ (полный угол раствора клина $\theta = 40^\circ$), $X_0 = (-2, 6.5)$, $L_1 = 0.1$, $N_1 = 1000$, $L_2 = 5$, $N_2 = 500$, $L_3 = 50$, $N_3 = 300$, $N = N_1 + N_2 + N_3 = 1800$.

Таким образом, имея численные значения акустического давления на граничной кривой, по формуле (14) находится структура дифрагированной звуковой волны в произвольной точке акустической среды.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Предложенный метод позволяет распространить результаты предыдущей работы авторов [11] на случай произвольного несимметричного расположения источника звука относительно граней клина. При этом как частный случай получается решение симметричной задачи. Оказалось, что такие результаты как точное значение давления в угле, асимптотическая оценка на бесконечности (9) и аналитическое решение задачи для некоторого ограниченного числа углов могут быть также перенесены с симметричного случая на несимметричный.

2. В качестве метода решения выбран полуаналитический метод ГИУ, который позволил получить важные аналитические результаты и, кроме того, построить устойчивую численную схему. Для дискретизации была выбрана сетка, состоящая из трех интервалов, равномерно разбитых на узлы. Самая плотная сетка располагается в небольшой окрестности угла. Такой способ задания сетки доказывает свою эффективность в многочисленных тестах. Квадратурная формула Симпсона при дискретизации свела ГИУ к СЛАУ, для решения которой использовался метод наименьших квадратов LSQR Пейджа и Сондерса. Тестирование численных результатов по методу ГИУ на задаче, имеющей точное решение методом мнимых источников, показало хорошую точность на всем интервале, в том числе в небольшой окрестности угла.

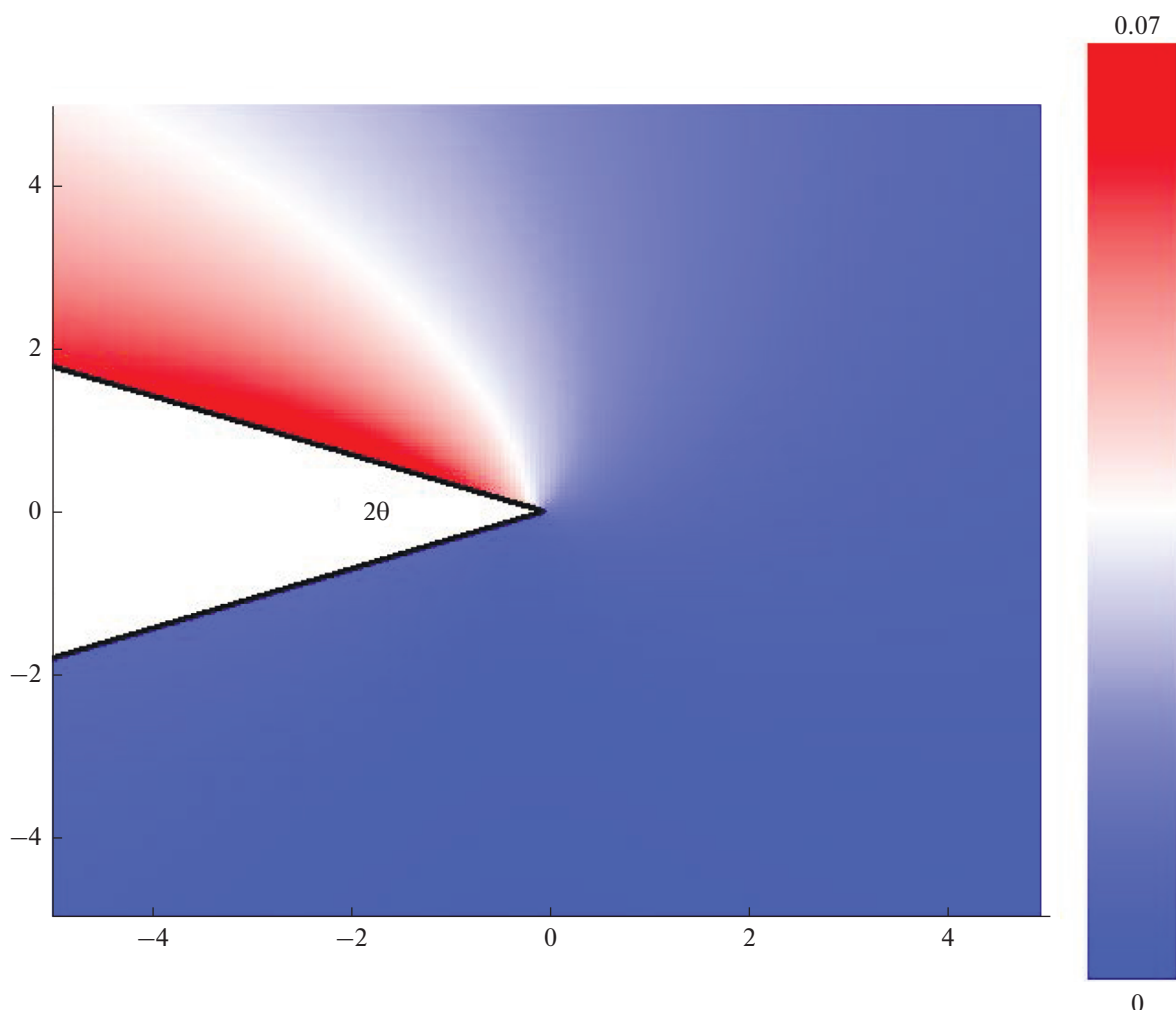


Рис. 5. Амплитуда рассеянного акустического поля в среде вокруг бесконечного клина: $\theta = \pi/9$ (полный угол раствора клина $\theta = 40^\circ$), $X_0 = (2,1)$, $L_1 = 0.1$, $N_1 = 1000$, $L_2 = 5$, $N_2 = 500$, $L_3 = 50$, $N_3 = 300$, $N = N_1 + N_2 + N_3 = 1800$.

Заметим, что детальный обзор, посвященный численным методам с адаптивными сетками, представлен в [18].

3. После того, как система ГИУ решена предложенным численным методом, волновое поле в произвольной точке акустической среды определяется в виде некоторых интегралов, выражающихся через найденные граничные значения на гранях клина.

Пример расчета амплитуды полного давления для акустического поля приведен на рис. 4, где источник находится сверху вне изображенной области. На рисунке видно, что волна от источника, распространяясь вправо и вниз, где нет препятствия, практически сохраняет свою круговую форму. В то же время, распространяясь влево и вниз, она взаимодействует с верхней гранью клина, существенно искажаясь. При этом хорошо видна зона тени снизу от клина, причем тень ста-

новится все заметнее, если двигаться вблизи нижней грани с удалением от угла.

На рис. 5 показана амплитуда рассеянного полного поля от источника, расположенного вблизи верхней грани. Любопытна структура рассеянного волнового поля сверху от клина. В первом приближении волновое поле здесь формируется путем взаимодействия падающих звуковых лучей и лучей, отразившихся от верхней грани. Структура звукового поля при этом довольно сложная. Волновое поле совсем не похоже на то круговое, которое было бы в волне от источника.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ), грант № 19-29-06013.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Скучик Е. Основы акустики. Т. 2. М.: Мир, 1976. 542 с.

2. *Sommerfeld A.* Mathematical Theory of Diffraction. Boston: Birkhauser, 2004.
https://doi.org/10.1007/978-0-8176-8196-8_2
3. *Keller J.B.* Geometrical Theory of Diffraction // *J. Opt. Soc. Amer.* 1962. P. 116–130.
<https://doi.org/10.1364/JOSA.52.000116>
4. *Hacivelioglu F., Sevgi L., Ufimtsev P.Ya.* Numerical evaluations of diffraction formulas for the canonical wedge-scattering problem. // *IEEE Antennas Propag. Mag.* 2013. V. 55. P. 257–272.
<https://doi.org/10.1109/MAP.2013.6735531>
5. *Apaydin G., Sevgi L.* A novel wedge diffraction modeling using method of moments (MoM) // *Appl. Comput. Electromagn. Soc. J.* 2015. V. 30. P. 1053–1059.
<https://doi.org/10.1109/TAP.2014.2323414>
6. *Lu B., Darmon M., Fradkin L., Potel C.* Numerical comparison of acoustic wedge models, with application to ultrasonic telemetry // *Ultrasonics.* 2016. V. 65. P. 5–9.
<https://doi.org/10.1016/j.ultras.2015.10.009>
7. *Nethercote M.A., Assier R.C., Abrahams I.D.* Analytical methods for perfect wedge diffraction: A review // *Wave Motion.* 2020. 102479.
<https://doi.org/10.1016/j.wavemoti.2019.102479>
8. *Корольков А.И., Шанин А.В., Белоус А.А.* Дифракция на вытянутом теле вращения с импедансными границами. Метод граничного параболического уравнения // *Акуст. журн.* 2019. Т. 65. № 4. С. 440–447.
<https://doi.org/10.1134/S0320791919040063>
9. *Кюркчан А.Г., Маненков С.А.* Дифракция поля точечного источника на компактном препятствии в непрерывно-слоистом волноводе // *Акуст. журн.* 2018. Т. 64. № 5. С. 526–533.
<https://doi.org/10.1134/S0320791918050052>
10. *Андронов И.В.* Высокочастотная дифракция на узком гиперboloиде вращения // *Акуст. журн.* 2017. Т. 63. № 2. С. 129–136.
<https://doi.org/10.7868/S0320791917010014>
11. *Sumbatyan M.A., Martynova T.S., Musatova N.K.* Boundary element methods in diffraction of a point-source acoustic wave by a rigid infinite wedge // *Enging Anal. Boundary Elem.* 2021. V. 125. P. 157–167.
<https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2021.01.017>
12. *Dominguez V., Graham I.G., Smyshlyaev V.P.* A hybrid numerical-asymptotic boundary integral method for high-frequency acoustic scattering // *Numer. Math.* 2007. V. 106. P. 471–510.
<https://doi.org/10.1007/s00211-007-0071-4>
13. *Arden S., Chandler-Wilde S.N., Longdon S.A.* A collocation method for high-frequency scattering by convex polygons // *J. Comp. Appl. Math.* 2007. V. 204. P. 334–343.
<https://doi.org/10.1016/j.cam.2006.03.028>
14. *Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л.* Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987.
15. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979.
16. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Т. 1. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.
17. *Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К.* Машинные методы математических вычислений. М.: Мир, 1989.
18. *Feischl M., Fuhrer Th., Heuer N., Karkulik M., Praetorius D.* Adaptive boundary element methods // *Archives Comp. Meth. Enging.* 2015. V. 22. P. 309–389.
<https://doi.org/10.1007/s11831-014-9114-z>