

КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ
И ТЕОРИИ ВОЛН

УДК 534.1, 539.3

НАПРЯЖЕНИЯ В ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ВОЛНЕ ПОХГАММЕРА–КРИ
СРЕДНЕВОЛНОВОГО ДИАПАЗОНА

© 2022 г. В. В. Мокряков*

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского
Российской академии наук, пр.-т Вернадского 101, корп. 1, Москва, 119526 Россия

*e-mail: mokr@ipmnet.ru

**e-mail: euphil@gmail.com

Поступила в редакцию 08.07.2021 г.

После доработки 20.12.2021 г.

Принята к публикации 25.01.2022 г.

Аналитически рассмотрены осесимметричные волны Похгаммера–Кри, распространяющиеся вдоль упругого стержня круглого сечения. Рассмотрено напряженно-деформированное состояние стержня. Вычислены максимумы растягивающих и эквивалентных напряжений на оси и на поверхности стержня, получены их соотношения. Особое внимание уделено диапазону волн средней длины (одного порядка с радиусом стержня), проведено сравнение с коротковолновым и длинноволновым приближениями. Продемонстрировано, что некоторые волны Похгаммера–Кри обладают рядом уникальных свойств: их относительная длина волны не зависит от упругих модулей, отношение максимального осевого растяжения к максимальному поверхностному растяжению имеет наибольшее значение и также не зависит от упругих модулей, материал стержня находится в состоянии чистого сдвига. Показано, что описанные волны соответствуют классу волн Ламе.

Ключевые слова: волны Похгаммера–Кри, волны Ламе, упругость, круглый стержень, напряженно-деформированное состояние, коэффициент Пуассона

DOI: 10.31857/S0320791922030091

ОБОЗНАЧЕНИЯ

r, θ, z – координаты цилиндрической системы координат;

a – радиус стержня;

ρ – плотность;

E – модуль Юнга;

ν – коэффициент Пуассона;

λ, μ – параметры Ламе;

ω – круговая частота;

γ – круговое волновое число;

l – длина волны;

$\Omega = \gamma z - \omega t$ – фаза волны в точке z в момент t ;

$c = \omega/\gamma$ – фазовая скорость;

$c_0 = \sqrt{E/\rho}$ – скорость бесконечно длинных волн в бесконечном стержне;

$c_1 = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ – скорость волн расширения в бесконечной среде;

$c_2 = \sqrt{\mu/\rho}$ – скорость волн сдвига в бесконечной среде;

c_R – скорость волн Рэлея (поверхностных волн в полупространстве);

J_n, I_n – функции Бесселя действительного и мнимого аргументов;

u_i – компоненты вектора смещений;

ε_{ij} – компоненты тензора деформаций;

Δ – первый инвариант тензора деформаций;

σ_{ij} – компоненты тензора напряжений;

U – обобщенная амплитуда волны Похгаммера–Кри.

В формулах используются следующие сокращения:

$$h = \gamma\sqrt{c^2/c_1^2 - 1}, \quad \kappa = \gamma\sqrt{c^2/c_2^2 - 1};$$

$$H = c^2/c_1^2 - 1 = h^2/\gamma^2; \quad K = c^2/c_2^2 - 1 = \kappa^2/\gamma^2,$$

а также следующие соотношения:

$$c_1^2 = c_0^2 \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}; \quad c_2^2 = \frac{c_0^2}{2(1+\nu)};$$

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \rho(c_1^2 - 2c_2^2);$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} = \rho c_2^2;$$

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{2\nu}{1-2\nu} = \frac{c_1^2}{c_2^2} - 2 = \frac{K-1-2H}{H+1};$$

$$H = \frac{c^2(1+\nu)(1-2\nu)}{c_0^2(1-\nu)} - 1; K = 2\frac{c^2}{c_0^2}(1+\nu) - 1.$$

ВВЕДЕНИЕ

Гармонические волны, распространяющиеся в стержнях (сплошных и полых) круглого сечения описываются уравнениями Погхаммера–Кри, которые впервые были получены в работах [1–3]. Решения уравнений были получены в последующих работах [4–16] и др., где были рассмотрены продольные осесимметричные, изгибные и крутильные моды.

Дальнейшее развитие задачи имеет несколько направлений: изменение геометрии (замена цилиндра на цилиндрическую полость, трубу или другую осесимметричную конструкцию), изменение свойств материала (замена упругого материала на упруго-вязкий, термоупругий), изменение распределения свойств конструкции (замена однородности на неоднородность, изотропности на анизотропность). В качестве примеров можно представить следующие недавние работы [17–24].

В исследовании напряженно-деформированных состояний (НДС) мод осесимметричных волн Погхаммера–Кри (ПК-волн) в работах [25, 26] показано, что максимумы растягивающих и эквивалентных [27] напряжений могут локализоваться не только на поверхности стержня, но и на его оси. Таким образом, может оказаться, что на оси стержня НДС уже удовлетворяет критериям разрушения (текучести и др., в зависимости от материала), и в то же время напряжения, определяемые по деформациям на поверхности, будут далеки от критических.

В представленной работе рассматриваются отношения максимальных напряжений (растягивающих и эквивалентных) на оси сплошного стержня и на его поверхности для ряда положительных значений коэффициента Пуассона. Также определяется длина волны, при которой отношения максимумов имеют наибольшее значение.

НАПРЯЖЕНИЯ СТЕРЖНЯ
В ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ВОЛНАХ
ПОГХАММЕРА–КРИ

В предыдущих работах [25, 26] получены выражения для НДС в осесимметричных волнах Погхаммера–Кри в следующем виде.

Смещения:

$$u_r = 2U\gamma^2 r \left[(K-1) \frac{J_1(\kappa a)}{\kappa a} \frac{J_1(hr)}{hr} + 2 \frac{J_1(ha)}{ha} \frac{J_1(\kappa r)}{\kappa r} \right] \sin \Omega,$$

$$u_z = 2U\gamma \left[(1-K) \frac{J_1(\kappa a)}{\kappa a} J_0(hr) + 2H \frac{J_1(ha)}{ha} J_0(\kappa r) \right] \cos \Omega. \tag{1}$$

Деформации:

$$\varepsilon_{rr} = 2U\gamma^2 H \left[(K-1) \frac{J_1(\kappa a)}{\kappa a} \left(J_0(hr) - \frac{J_1(hr)}{hr} \right) + 2 \frac{J_1(ha)}{ha} \left(J_0(\kappa r) - \frac{J_1(\kappa r)}{\kappa r} \right) \right] \sin \Omega,$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = 2U\gamma^2 H \left[(K-1) \frac{J_1(\kappa a)}{\kappa a} \frac{J_1(hr)}{hr} + 2 \frac{J_1(ha)}{ha} \frac{J_1(\kappa r)}{\kappa r} \right] \sin \Omega,$$

$$\varepsilon_{zz} = 2U\gamma^2 \left[(K-1) \frac{J_1(\kappa a)}{\kappa a} J_0(hr) - 2H \frac{J_1(ha)}{ha} J_0(\kappa r) \right] \sin \Omega,$$

$$\varepsilon_{rz} = 2Ur\gamma^3 H (K-1) \times \left[\frac{J_1(\kappa a)}{\kappa a} \frac{J_1(hr)}{hr} - \frac{J_1(ha)}{ha} \frac{J_1(\kappa r)}{\kappa r} \right] \cos \Omega,$$

$$\Delta = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz} = 2U\gamma^2 (H+1) \times (K-1) \frac{J_1(\kappa a)}{\kappa a} J_0(hr) \sin \Omega.$$

Напряжения:

$$\sigma_{rr} = \lambda\Delta + 2\mu\varepsilon_{rr}; \quad \sigma_{\theta\theta} = \lambda\Delta + 2\mu\varepsilon_{\theta\theta};$$

$$\sigma_{zz} = \lambda\Delta + 2\mu\varepsilon_{zz}; \quad \sigma_{rz} = 2\mu\varepsilon_{rz},$$

$$\sigma_{rr} = 2\mu U\gamma^2 \left[(K-1)^2 \frac{J_1(\kappa a)}{\kappa a} J_0(hr) + 4H \frac{J_1(ha)}{ha} J_0(\kappa r) - 2H(K-1) \frac{J_1(\kappa a)}{\kappa a} \times \right. \tag{3}$$

$$\left. \times \frac{J_1(hr)}{hr} - 4H \frac{J_1(ha)}{ha} \frac{J_1(\kappa r)}{\kappa r} \right] \sin \Omega,$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta} &= 2\mu U\gamma^2 \left[(K-1-2H)(K-1) \frac{J_1(\kappa a)}{\kappa a} J_0(hr) + \right. \\ &\quad + 2H(K-1) \frac{J_1(\kappa a) J_1(hr)}{\kappa a hr} + \\ &\quad \left. + 4H \frac{J_1(ha) J_1(\kappa r)}{ha \kappa r} \right] \sin \Omega, \\ \sigma_{zz} &= 2\mu U\gamma^2 \left[(K-1)(K+1-2H) \frac{J_1(\kappa a)}{\kappa a} \times \right. \\ &\quad \times \left[J_0(hr) - 4H \frac{J_1(ha)}{ha} J_0(\kappa r) \right] \sin \Omega, \\ \sigma_{rz} &= 4U\mu r\gamma^3 H(K-1) \times \\ &\quad \times \left[\frac{J_1(\kappa a) J_1(hr)}{\kappa a hr} - \frac{J_1(ha) J_1(\kappa r)}{ha \kappa r} \right] \cos \Omega. \end{aligned} \quad (4)$$

Получено также дисперсионное соотношение для осесимметричных ПК-волн в следующем виде:

$$\begin{aligned} (K-1)^2 J_0(ha) \frac{J_1(\kappa a)}{\kappa a} + 4H \frac{J_1(ha)}{ha} J_0(\kappa a) - \\ - 2H(K+1) \frac{J_1(ha) J_1(\kappa a)}{ha \kappa a} = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СЛУЧАИ

Известны формы волн для длинноволнового ($l \gg a$) и коротковолнового ($l \ll a$) приближений.

В случае длинноволнового приближения ПК-волна стремится к плоской волне с фазовой скоростью $c_0 = \sqrt{E/\rho}$ [7]. Здесь напряжения однородны по поперечному сечению стержня. Действительно, если $l \rightarrow \infty$, то $\gamma \rightarrow 0$. Так как $\lim_{x \rightarrow 0} J_0(x) = 1$ и $\lim_{x \rightarrow 0} (J_1(x)/x) = 1/2$, то дисперсионное соотношение имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} (K-1)^2 + 4H - H(K+1) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow c^2 [c^2 c_1^2 - c^2 c_2^2 - 3c_1^2 c_2^2 + 4c_2^4] = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Решение $c = 0$ соответствует отсутствию волн. Второе решение ненулевое, и после замены c_1 и c_2 через c_0 и v , получаем:

$$c^2 = c_2^2 \frac{3c_1^2 - 4c_2^2}{c_1^2 - c_2^2} = \frac{c_0^2}{1+v} \frac{1+2v+v^2}{1+v} = c_0^2. \quad (7)$$

Итак, доказано, что в длинноволновом приближении фазовая скорость равна c_0 .

Смещения и напряжения находим аналогичным образом.

$$u_r = \frac{U\gamma^2 r c_0^2}{2 c_2^2} \sin \Omega = U\gamma^2 r(1+v) \sin \Omega, \quad (8)$$

$$u_z = U\gamma \left(2 \frac{c_0^2}{c_1^2} - \frac{c_0^2}{c_2^2} \right) \cos \Omega = -2U\gamma v \frac{1+v}{1-v} \cos \Omega,$$

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \mu U\gamma^2 [(K-1)^2 + 2H - H(K-1)] \sin \Omega = \\ &= 2\mu U\gamma^2 \frac{1+v}{1-v} [2 - 2v^2 - 3 + 3v + 2 - \\ &\quad - 4v - 1 + 2v - v + 2v^2] \sin \Omega = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta} &= \mu U\gamma^2 \times \\ &\times [(K-1)^2 - H(K-1) + 2H] \sin \Omega = \sigma_{rr} = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} &= \mu U\gamma^2 \frac{c_0^2}{c_2^2} \left[\frac{c_0^2}{c_2^2} - 2 \frac{c_0^2}{c_1^2} \right] \sin \Omega = \\ &= 4\mu U\gamma^2 v \frac{(1+v)^2}{1-v} \sin \Omega, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\sigma_{rz} = 0. \quad (12)$$

Как видно из полученных формул, в процессе распространения такой волны все поперечные сечения стержня остаются плоскими, однородно расширяясь и сжимаясь. Единственная ненулевая компонента напряжений – продольная (σ_{zz}), ее распределение по любому поперечному сечению однородно.

В случае коротковолнового приближения главная мода имеет характер волны Рэлея: наибольшие смещения и напряжения локализуются на поверхности стержня, экспоненциально затухая к оси. Действительно, рассмотрим дисперсионное соотношение для фазовой скорости $c < c_2 < c_1$ (фундаментальная мода). В этом случае h и κ становятся мнимыми, и бесселевы функции J заменяются функциями мнимого аргумента I :

$$J_0(ha) = I_0(|h|a); \quad \frac{J_1(ha)}{ha} = \frac{I_1(|h|a)}{|h|a} \quad (13)$$

(для κ аналогично).

Тогда дисперсионное соотношение имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \left(2 - \frac{c^2}{c_2^2} \right)^2 I_0(|h|a) \frac{I_1(|\kappa|a)}{|\kappa|a} - \\ - 4 \left(1 - \frac{c^2}{c_1^2} \right) \frac{I_1(|h|a)}{|h|a} I_0(|\kappa|a) + \\ + 2 \left(1 - \frac{c^2}{c_1^2} \right) \frac{c^2}{c_2^2} \frac{I_1(|h|a)}{|h|a} \frac{I_1(|\kappa|a)}{|\kappa|a} = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

При коротковолновом приближении $\gamma a \gg 1$. Как известно [27], для больших аргументов

$$I_n(x) \approx e^x / \sqrt{2\pi x}. \quad (15)$$

Тогда (14) преобразуется к виду

$$|h|a \left(2 - \frac{c^2}{c_2^2} \right)^2 - 4|k|a \left(1 - \frac{c^2}{c_1^2} \right) + 2 \left(1 - \frac{c^2}{c_1^2} \right) \frac{c^2}{c_2^2} = 0. \quad (16)$$

После раскрытия модулей и сокращения общих множителей, получаем

$$\left(2 - \frac{c^2}{c_2^2} \right)^2 - 4\sqrt{1 - \frac{c^2}{c_2^2}}\sqrt{1 - \frac{c^2}{c_1^2}} + \frac{2}{\gamma a c_2^2} \sqrt{1 - \frac{c^2}{c_1^2}} = 0. \quad (17)$$

Последнее слагаемое стремится к нулю при $\gamma \rightarrow \infty$. В итоге приходим к уравнению

$$\left(2 - \frac{c^2}{c_2^2} \right)^2 = 4\sqrt{1 - \frac{c^2}{c_2^2}}\sqrt{1 - \frac{c^2}{c_1^2}}. \quad (18)$$

Оно хорошо известно как дисперсионное соотношение для волны Рэлея. Его решение дает значение $c = c_R$ – фазовую скорость волны Рэлея.

Аналогичным образом получим смещения (предполагается, что $\gamma r \gg 1$):

$$u_r = \frac{U\gamma^2}{\pi(|hk|a)^{3/2}\sqrt{r}} \left[\left(\frac{c_R^2}{c_2^2} - 2 \right) e^{k|a+|h|r} + 2e^{h|a+|k|r} \right] \sin \Omega, \\ u_z = \frac{-U\gamma}{\pi(|hk|a)^{3/2}\sqrt{r}} \times \\ \times \left[\left(\frac{c_R^2}{c_2^2} - 2 \right) |h| e^{k|a+|h|r} + 2|k| \left(1 - \frac{c_R^2}{c_1^2} \right) e^{h|a+|k|r} \right] \cos \Omega. \quad (19)$$

Введем замену, означающую относительное расстояние до поверхности:

$$\delta = (r - a)/a, \quad r = a(1 + \delta). \quad (20)$$

Соответственно,

$$u_r = \frac{U\gamma^2 e^{(|k|+|h|)a}}{\pi(|hk|)^{3/2} a^2 \sqrt{1 + \delta}} \times \\ \times \left[\left(\frac{c_R^2}{c_2^2} - 2 \right) e^{h|a\delta} + 2e^{k|a\delta} \right] \sin \Omega, \\ u_z = \frac{-U\gamma|h| e^{(|k|+|h|)a}}{\pi(|hk|)^{3/2} a^2 \sqrt{1 + \delta}} \times \\ \times \left[\left(\frac{c_R^2}{c_2^2} - 2 \right) e^{h|a\delta} + 2\sqrt{1 - \frac{c_R^2}{c_1^2}} \sqrt{1 - \frac{c_R^2}{c_2^2}} e^{k|a\delta} \right] \cos \Omega. \quad (21)$$

Таким образом, при коротковолновом приближении в окрестности поверхности стержня структура ПК-волны аналогична структуре волны Рэлея, отличаясь общим коэффициентом.

ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В СРЕДНЕВОЛНОВОМ ДИАПАЗОНЕ

Для контроля напряженно-деформированного состояния конструкции используются тензо-

датчики, закрепленные на поверхности конструкции. Как показано выше, в случае длинноволнового приближения внутренние напряжения в стержне равны поверхностным, в случае коротковолнового – внутренние напряжения ниже поверхностных, как и при волне Рэлея. Иначе говоря, в описанных случаях внутренние напряжения не превышают поверхностные, и применение поверхностных тензодатчиков достаточно, чтобы контролировать НДС стержневой структуры.

Можно было бы предположить, что последнее утверждение также справедливо и для средних волн. Однако в работе [26] продемонстрировано, что при распространении волны Погхаммера–Кри (фундаментальная мода) максимум напряжений (растягивающих или эквивалентных) может возникать и на оси стержня (отметим, что при расчетах распределения НДС в сечении стержня в рассмотренных случаях максимумы локализовались только на поверхности или оси, но это не означает, что в других случаях не могут быть обнаружены другие области локализации). В [26] для стального стержня было продемонстрировано, что на низких частотах максимальное растягивающее напряжение ($\lesssim 1.3$ МГц) и максимальное эквивалентное напряжение ($\lesssim 1.7$ МГц) локализуется на оси стержня. Было показано, что максимальное растягивающее напряжение на оси может быть в 3.164 раза больше, чем на поверхности, а максимальное эквивалентное напряжение – в 4.056 раза.

В данной работе рассмотрены отношения максимальных значений на оси и на поверхности стержня для растягивающих напряжений (R_T) и для эквивалентных напряжений (R_{eq}) при ряде значений коэффициента Пуассона $\nu = 0.001, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.499$ (особые значения 0 и 0.5 исключены из диапазона и будут рассматриваться отдельно в следующем исследовании). Расчеты показали, что для каждого рассмотренного ν существует длина волны (отдельно для растягивающего напряжения (рис. 1) и эквивалентного напряжения (рис. 2)), при которой максимумы на оси и на поверхности равны. Для более коротких волн максимум напряжений локализуется на поверхности стержня, для более длинных – на оси. Вычисленные распределения на краях диапазона соответствуют вышеописанному коротковолновому и длинноволновому приближениям.

Полученные распределения показывают, что существует особая волна с длиной волны $l^* \approx 3.41a$, для которой $R_T \approx 3.16$ и $R_{eq} \approx 2.74$ имеют постоянные значения независимо от значения ν (при этом для R_T это наибольшее значение). Распределения максимальных значений растягивающего напряжения σ_l и эквивалентного напряжения σ_{eq} для $l = l^*$ представлены на рис. 3 и 4. Штриховка

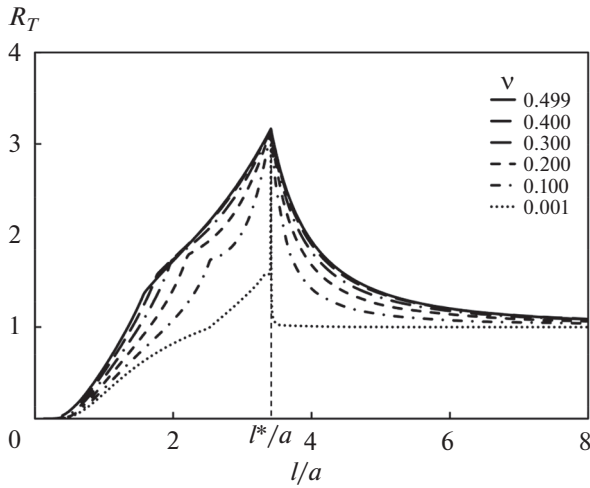


Рис. 1. Отношение максимальных растягивающих напряжений (фундаментальная мода).

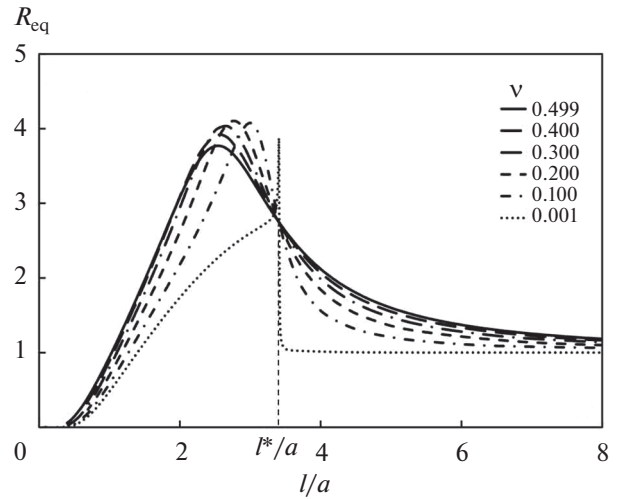


Рис. 2. Отношение максимальных эквивалентных напряжений (фундаментальная мода).

показывает область, где главным напряжением является σ_θ .

Рассмотрим это явление подробнее. Сначала найдем напряжения на поверхности стержня ($r = a$):

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}|_a = 2\mu U \gamma^2 & \left[(K-1)^2 \frac{J_1(\kappa a)}{\kappa a} J_0(ha) + \right. \\ & + 4H \frac{J_1(ha)}{ha} J_0(\kappa a) - \\ & \left. - 2H(K+1) \frac{J_1(\kappa a) J_1(ha)}{\kappa a ha} \right] \sin \Omega, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta}|_a = 2\mu U \gamma^2 \frac{J_1(\kappa a)}{\kappa a} & \left[(K-1)(K-1-2H) \times \right. \\ & \left. \times J_0(ha) + 2H(K+1) \frac{J_1(ha)}{ha} \right] \sin \Omega, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}|_a = 2\mu U \gamma^2 & \left[(K-1)(K+1-2H) \frac{J_1(\kappa a)}{\kappa a} \times \right. \\ & \left. \times J_0(ha) - 4H \frac{J_1(ha)}{ha} J_0(\kappa a) \right] \sin \Omega, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\sigma_{rz} = 0. \quad (25)$$

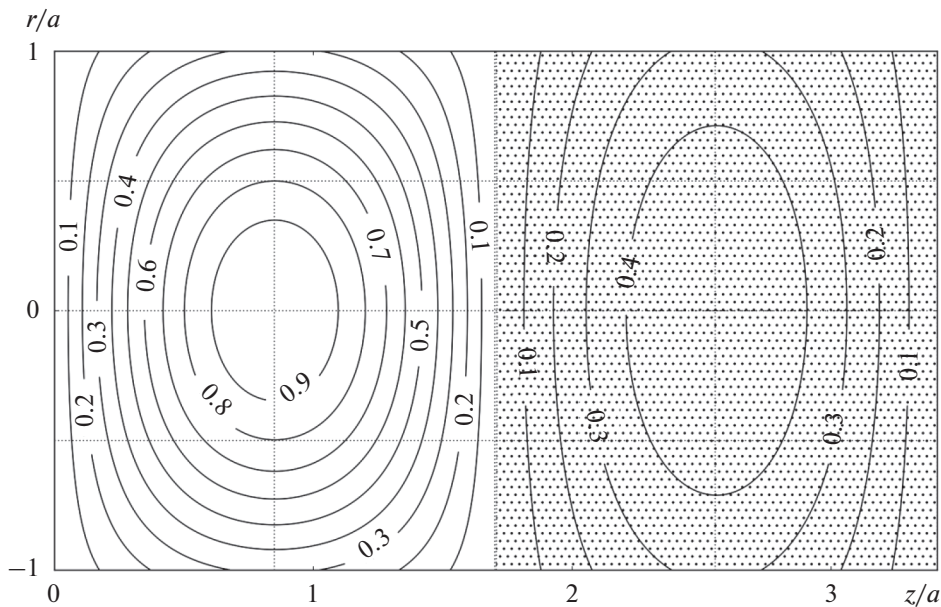


Рис. 3. Нормализованное первое главное напряжение σ_1 для $l = l^*$ (фундаментальная мода).

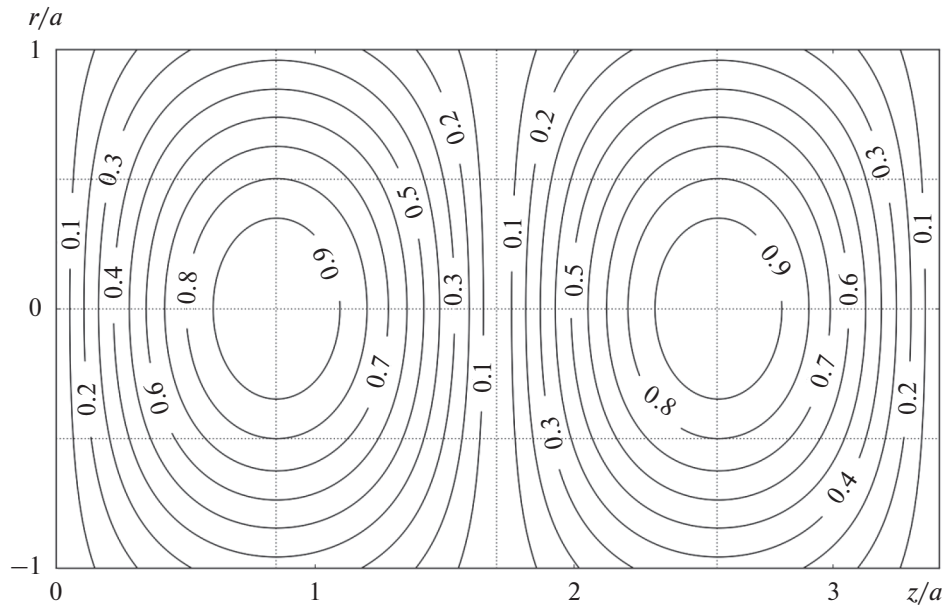


Рис. 4. Нормализованное эквивалентное напряжение σ_{eq} для $l = l^*$ (фундаментальная мода).

Согласно граничным условиям (поверхность свободна от нагрузок), σ_{rr} и σ_{rz} равны нулю (выражение в квадратных скобках в формуле σ_{rr} представляет собой левую часть дисперсионного соотношения, т.е. равно нулю).

Перепишем σ_{zz} и $\sigma_{\theta\theta}$ с учетом дисперсионного соотношения:

$$\sigma_{\theta\theta}|_a = 2\mu U\gamma^2 \frac{J_1(\kappa a)}{\kappa a} \left[(\kappa - 1)(\kappa - 1 - 2H) \times \right. \\ \left. \times J_0(ha) + 2H(\kappa + 1) \frac{J_1(ha)}{ha} \right] \sin \Omega, \quad (26)$$

$$\sigma_{zz}|_a = 2\mu U\gamma^2 \frac{J_1(\kappa a)}{\kappa a} \left[2(\kappa - 1)(\kappa - H)J_0(ha) - \right. \\ \left. - 2H(\kappa + 1) \frac{J_1(ha)}{ha} \right] \sin \Omega. \quad (27)$$

Поскольку задача осесимметрична, то на поверхности σ_r равно либо σ_{zz} , либо $\sigma_{\theta\theta}$. Выпишем формулы для максимумов соответствующих компонент:

$$\max_{r=a} \sigma_{\theta\theta} = 2\mu U\gamma^2 \left| \frac{J_1(\kappa a)}{\kappa a} \right| \times \\ \times \left| (\kappa - 1)(\kappa - 1 - 2H)J_0(ha) + \right. \\ \left. + 2H(\kappa + 1) \frac{J_1(ha)}{ha} \right|, \quad (28)$$

$$\max_{r=a} \sigma_{zz} = 2\mu U\gamma^2 \left| \frac{J_1(\kappa a)}{\kappa a} \right| \times \\ \times \left| 2(\kappa - 1)(\kappa - H)J_0(ha) - 2H(\kappa + 1) \frac{J_1(ha)}{ha} \right|. \quad (29)$$

Расчеты показывают, что фазовая скорость c^* особой волны находится в интервале $c_2 < c^* < c_0$ для всех рассматриваемых ν . При $\nu > 0$ справедливо выражение $c_1 > c_0$, следовательно, $c^* < c_1$ и $H = c^{*2}/c_1^2 - 1 < 0$. Отсюда $h = \gamma\sqrt{H} = i\gamma\sqrt{|H|}$. Таким образом, как и в формуле (13), получаем, что $J_0(ha) = I_0(|h|a)$ и $J_1(ha)/ha = I_1(|h|a)/|h|a$.

С другой стороны,

$$c_2 < c^* < c_0 \Rightarrow c_2^2 < c^{*2} < 2(1 + \nu)c_2^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow 0 < c^{*2}/c_2^2 - 1 < 1 + 2\nu \Rightarrow 0 < \kappa < 2. \quad (30)$$

Следовательно, на интересующем интервале $\kappa a \in \mathbb{R}$.

Таким образом, $\max \sigma_{zz}$ имеет следующий вид (все члены действительные):

$$\max_{r=a} \sigma_{\theta\theta} = 2\mu U\gamma^2 \left| \frac{J_1(\kappa a)}{\kappa a} \right| \times \\ \times \left| (\kappa - 1)(\kappa - 1 + 2|H|)I_0(|h|a) - \right. \\ \left. - 2|H|(\kappa + 1) \frac{I_1(|h|a)}{|h|a} \right|, \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \max_{r=a} \sigma_{zz} &= 2\mu U \gamma^2 \left| \frac{J_1(\kappa a)}{\kappa a} \right| \times \\ &\times \left| 2(K-1)(K+|H|) I_0(|h|a) + \right. \\ &\quad \left. + 2|H|(K+1) \frac{I_1(|h|a)}{|h|a} \right|. \end{aligned} \quad (32)$$

Перелом графиков на рис. 1 в точке наибольшего значения R_T означает, что здесь $\max_{r=a} \sigma_{\theta\theta}$ и $\max_{r=a} \sigma_{zz}$ равны.

Сделаем предположение, что $J_1(\kappa a)/\kappa a = 0$. Но тогда из дисперсионного соотношения получаем, что $J_0(\kappa a)$ также должно быть равно нулю. Однако доказано (см., напр., [29]), что функции J_0 и J_1 общих корней не имеют. Следовательно, $|J_1(\kappa a)/\kappa a| > 0$. Тогда достаточно сравнить последние множители:

$$\begin{aligned} &\left| (K-1)(K-1+2|H|) I_0(|h|a) - \right. \\ &\left. - 2|H|(K+1) \frac{I_1(|h|a)}{|h|a} \right| = \left| 2(K-1)(K+|H|) \times \right. \\ &\quad \left. \times I_0(|h|a) + 2|H|(K+1) \frac{I_1(|h|a)}{|h|a} \right|. \end{aligned} \quad (33)$$

Если $|x| = |y|$, то либо $x = y$, либо $x = -y$. Рассмотрим оба варианта.

Вариант I:

$$\begin{aligned} &(K-1)(K-1+2|H|) I_0(|h|a) - 2|H|(K+1) \times \\ &\quad \times \frac{I_1(|h|a)}{|h|a} - 2(K-1)(K+|H|) I_0(|h|a) - \\ &\quad - 2|H|(K+1) \frac{I_1(|h|a)}{|h|a} = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (K+1) \left[(K-1) I_0(|h|a) + 4|H| \frac{I_1(|h|a)}{|h|a} \right] = 0. \end{aligned} \quad (34)$$

Если предположить, что $K+1 = 0$, то получаем:

$$K+1 = c^2/c_2^2 = 0 \Rightarrow c = 0, \quad (35)$$

т.е. в данном случае волны просто нет.

Если же приравнять другой множитель нулю, то получим уравнение относительно фазовой скорости. Его решение можно получить численно, и оно не соответствует особой волне.

Вариант II:

$$\begin{aligned} &(K-1)(K-1+2|H|) I_0(|h|a) - \\ &\quad - 2|H|(K+1) \frac{I_1(|h|a)}{|h|a} + 2(K-1)(K+|H|) \times \\ &\quad \times I_0(|h|a) + 2|H|(K+1) \frac{I_1(|h|a)}{|h|a} = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (K-1)(3K-1+4|H|) I_0(|h|a) = 0. \end{aligned} \quad (36)$$

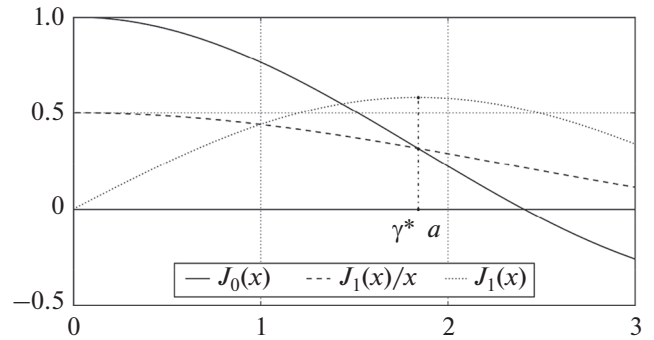


Рис. 5. Расчет значения $\gamma^* a$ для фундаментальной моды.

Множитель $I_0(|h|a)$ положителен и не может быть корнем. Рассмотрим второй множитель:

$$3K-1+4|H| = 3\frac{c^2}{c_2^2} - 4\frac{c^2}{c_1^2} = 2\frac{(1+\nu)^2 c^2}{1-\nu c_0^2}. \quad (37)$$

Как видим, при $\nu > 0$ есть только один корень $c = 0$, т.е. волны также нет.

Наконец, рассмотрим первый множитель:

$$K-1 = 0 \Rightarrow c = c_2\sqrt{2}. \quad (38)$$

В данном случае

$$\kappa = \gamma\sqrt{c^2/c_2^2 - 1} = \gamma. \quad (39)$$

Дисперсионное соотношение приобретает следующий вид:

$$\begin{aligned} &4H \frac{J_1(ha)}{ha} J_0(\gamma a) - 4H \frac{J_1(ha) J_1(\gamma a)}{ha \gamma a} = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 4H \frac{I_1(|h|a)}{|h|a} \left(J_0(\gamma a) - \frac{J_1(\gamma a)}{\gamma a} \right) = 0 \end{aligned} \quad (40)$$

и имеет единственный ненулевой множитель

$$J_0(\gamma a) - J_1(\gamma a)/\gamma a = 0. \quad (41)$$

Отметим, что в полученном выражении отсутствуют модуль Юнга и коэффициент Пуассона. Преобразуем это выражение:

$$\begin{aligned} &J_0(\gamma a) - J_1(\gamma a)/\gamma a = \\ &= (J_0(\gamma a) - J_2(\gamma a))/2 = J_1'(\gamma a) = 0. \end{aligned} \quad (42)$$

Таким образом, корни этого уравнения соответствуют экстремумам $J_1(\gamma a)$. Первый экстремум $\gamma^* a \approx 1.841184$ (см. рис. 5) соответствует вышеуказанной особой волне с длиной $l^*/a = 2\pi/\gamma^* a \approx 3.413$.

Выражения для фазовой скорости и частоты имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} c^* &= c_2\sqrt{2} = c_0/\sqrt{1+\nu}, \\ \omega^* &= c^*\gamma^* = c_0\gamma^*/\sqrt{1+\nu}. \end{aligned} \quad (43)$$

Отметим, что фазовая скорость, равная $c_2\sqrt{2}$, имеет название скорости Ламе, и волны Похгаммера–Кри и Лэмба, имеющие такую фазовую скорость, называют волнами Ламе (см. напр. [30]).

В отличие от длины волны, фазовая скорость и частота зависят от упругих модулей. Например, для стального стержня ($a = 1$ см, $\rho = 7800$ кг/м³, $E = 200$ ГПа, $\nu = 0.3$) получим $c_0 = \sqrt{E/\rho} = 5.064$ км/с; $c^* = 4.44$ км/с; $\omega = 0.818$ МГц.

Вычислим отношения R_T и R_{eq} для найденного γ^*a для фундаментальной моды. Напряжения на оси стержня ($r = 0$):

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}|_0 = \sigma_{\theta\theta}|_0 &= 2\mu U \gamma^2 \times \\ &\times \left[(K-1)(K-1-H) \frac{J_1(\kappa a)}{\kappa a} + 2H \frac{J_1(ha)}{ha} \right] \sin \Omega, \\ \sigma_{zz}|_0 &= 2\mu U \gamma^2 \times \\ &\times \left[(K-1)(K+1-2H) \frac{J_1(\kappa a)}{\kappa a} - 4H \frac{J_1(ha)}{ha} \right] \sin \Omega, \\ \sigma_{rz}|_0 &= 0. \end{aligned} \quad (44)$$

При $K = 1$ получаем

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}|_0 = \sigma_{\theta\theta}|_0 &= 4\mu U \gamma^{*2} H \frac{J_1(ha)}{ha} \sin \Omega^*; \\ \sigma_{zz}|_0 &= -8\mu U \gamma^{*2} H \frac{J_1(ha)}{ha} \sin \Omega^*; \\ \Omega^* &= \gamma^* z - \omega t. \end{aligned} \quad (45)$$

Максимум растягивающих напряжений равен:

$$\max \sigma|_0 = \max \sigma_{zz}|_0 = 8\mu U \gamma^{*2} |H| \frac{I_1(|h|a)}{|h|a}. \quad (46)$$

Используя (31), (32), получаем R_T :

$$R_T = \frac{\max_{r=0} \sigma_1}{\max_{r=a} \sigma_1} = \frac{\gamma^* a}{J_1(\gamma^* a)} = \frac{1}{J_0(\gamma^* a)} \approx 3.164. \quad (47)$$

Как мы видим, R_T для найденного γ^*a не зависит от упругих модулей.

Рассмотрим R_{eq} . Эквивалентное напряжение имеет вид [27]:

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})^2 + (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{rr})^2]} + 3\sigma_{rz}. \quad (48)$$

На поверхности стержня ($r = a$):

$$\sigma_{eq}|_a = \sqrt{(\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz})^2 + \sigma_{\theta\theta}\sigma_{zz}}. \quad (49)$$

Для найденного γ^*a напряжения имеют следующие выражения:

$$\sigma_{\theta\theta}|_a = 8\mu U \gamma^{*2} H \frac{J_1(ha)}{ha} \frac{J_1(\gamma^*a)}{\gamma^*a} \sin \Omega^*, \quad (50)$$

$$\sigma_{zz}|_a = -8\mu U \gamma^{*2} H \frac{J_1(ha)}{ha} \frac{J_1(\gamma^*a)}{\gamma^*a} \sin \Omega^*. \quad (51)$$

Отсюда получаем

$$\max_{r=a} \sigma_{eq} = 8\sqrt{3}\mu U \gamma^{*2} |H| \frac{I_1(|h|a)}{|h|a} \frac{J_1(\gamma^*a)}{\gamma^*a}. \quad (52)$$

На оси стержня ($r = 0$):

$$\sigma_{eq} = |\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz}|. \quad (53)$$

Для найденного γ^*a для напряжений получаем:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}|_0 = \sigma_{\theta\theta}|_0 &= 4\mu U \gamma^{*2} H \frac{J_1(ha)}{ha} \sin \Omega^*; \\ \sigma_{zz}|_0 &= -8\mu U \gamma^{*2} H \frac{J_1(ha)}{ha} \sin \Omega^*. \end{aligned} \quad (54)$$

Тогда

$$\max_{r=0} \sigma_{eq} = 12\mu U \gamma^{*2} |H| \frac{I_1(|h|a)}{|h|a}. \quad (55)$$

В итоге R_{eq} :

$$R_{eq} = \frac{\max_{r=0} \sigma_{eq}}{\max_{r=a} \sigma_{eq}} = \frac{\gamma^* a \sqrt{3}}{2J_1(\gamma^* a)} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{J_0(\gamma^* a)} \approx 2.74. \quad (56)$$

Как и R_T , R_{eq} для найденного γ^*a не зависит от ν .

В дополнение к вышесказанному, отметим, что для $\gamma = \gamma^*$:

$$\begin{aligned} \Delta &= 2U \gamma^{*2} (H+1)(K-1) \times \\ &\times \frac{J_1(\kappa a)}{\kappa a} J_0(hr) \sin \Omega^* = 0. \end{aligned} \quad (57)$$

Это означает, что в условиях особой волны материал стержня во всех точках находится в состоянии чистого сдвига (что также является характерным свойством волн Ламе).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Расчеты отношений R_T и R_{eq} для осесимметричных волн Похгаммера–Кри при положительном коэффициенте Пуассона показывают, что в средневолновом диапазоне ($0.1 < l^*/a < 10$) осевые напряжения могут превышать поверхностные в несколько раз. Необходимо учитывать этот эффект при контроле напряжений стержневых конструкций посредством поверхностных тензодатчиков.

Аналитически доказано, что волны, фазовые скорости которых соответствуют скорости Ламе ($c^* = c_2\sqrt{2}$), имеют ряд особенностей:

1. Длина волны относительно радиуса стержня не зависит от упругих модулей (для фундаментальной моды $l^*/a \approx 3.413$);

2. Отношение максимального осевого растяжения к максимальному поверхностному растяжению здесь достигает наибольшего значения, независимого от упругих модулей; для фундаментальной моды $R_T \approx 3.164$;

3. Отношение максимального осевого эквивалентного напряжения к максимальному поверхностному эквивалентному напряжению также не зависит от упругих модулей (хотя его значение не наибольшее); для фундаментальной моды $R_{eq} \approx 2.74$;

4. Материал в данном случае находится в состоянии чистого сдвига.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-01-00100.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Pochhammer L.* Ueber die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten kleiner Schwingungen in einem unbegrenzten isotropen Kreiscylinder // *J. Reine Angew. Math.* 1876. V. 81. S. 324–336.
2. *Chree C.* Longitudinal vibrations of a circular bar // *Quart. J. Pure Appl. Math.* 1886. V. 21. P. 287–298.
3. *Chree C.* The equations of an isotropic elastic solid in polar and cylindrical coordinates, their solutions and applications // *Trans. Cambridge Philos. Soc.* 1889. V. 14. P. 250–309.
4. *Field G.S.* Velocity of sound in cylindrical rods // *Canadian J. Research.* 1931. V. 5. P. 619–624.
5. *Shear S.K., Focke A.B.* The dispersion of supersonic waves in cylindrical rods of polycrystalline silver, nickel, and magnesium // *Phys. Rev.* 1940. V. 57. P. 532–537.
6. *Hudson G.E.* Dispersion of elastic waves in solid circular cylinders // *Phys. Rev.* 1943. V. 63. P. 46–51.
7. *Кольский Г.* Волны напряжения в твердых телах. М.: Изд-во иностранной литературы, 1955. 194 с.
8. *Redwood M., Lamb J.* On propagation of high frequency compressional waves in isotropic cylinders // *Proc. Phys. Soc. Section B. London.* 1957. V. 70. № 1. P. 136–143.
9. *Onoe M., McNiven H.D., Mindlin R.D.* Dispersion of axially symmetric waves in elastic rods // *Trans. ASME J. Appl. Mech.* 1962. V. 29. P. 729–734.
10. *Hutchinson J.R., Percival C.M.* Higher modes of longitudinal wave propagation in thin rod // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1968. V. 44. P. 1204–1210.
11. *Zemanek J.* An experimental and theoretical investigation of elastic wave propagation in a cylinder // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1972. V. 51. P. 265–283.
12. *Nowinski J.L.* On a nonlocal theory of longitudinal waves in an elastic circular bar // *Acta Mech.* 1984. V. 52. P. 189–200.
13. *Graff K.F.* Wave motion in elastic solids. New York: Dover, 1991. 692 p.
14. *Abramson H.N.* Flexural waves in elastic beams of circular cross section // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1957. V. 29. P. 1284–1286.
15. *Pao Y.-H., Mindlin R.D.* Dispersion of flexural waves in an elastic, circular cylinders // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* 1960. V. 27. P. 513–520.
16. *Ковалев В.А., Радаев Ю.Н.* Волновые задачи теории поля и термомеханика. Саратов: Изд-во Саратовского Университета, 2010. 340 с.
17. *Ватульян А.О., Юров В.О.* Численное и асимптотическое решение задачи о колебаниях неоднородного волновода с кольцевой трещиной конечной ширины // *Акуст. журн.* 2020. Т. 66. С. 467–474.
18. *Cerv J., Adamek V., Vales F., Gabriel D., Plesek J.* Wave motion in a thick cylindrical rod undergoing longitudinal impact // *Wave Motion.* 2016. V. 66. P. 88–105.
19. *Муравьева О.В., Ленков С.В., Мурашов С.А.* Крутильные волны, возбуждаемые электромагнитно-акустическими преобразователями, при акустическом волноводном контроле трубопроводов // *Акуст. журн.* 2016. Т. 62. № 1. С. 117–124.
20. *Garcia-Sanchez D., Déleglise S., Thomas J.-L., Atkinson P., Lagoin C., Perrin B.* Acoustic confinement in superlattice cavities // *Phys. Rev. A.* 2016. V. 94. P. 033813-1–033813-6.
21. *Othman R.* A fractional equation to approximate wave dispersion relation in elastic rods // *Strain.* 2017. V. 53. № 4. e12228. P. 1–10.
22. *Li Zh., Jing L., Murch R.* Propagation of monopole source excited acoustic waves in a cylindrical high-density polyethylene pipeline // *J. Acoust. Soc. Amer.* 2017. V. 142. P. 3564–3579.
23. *Zima B., Rucka M.* Guided ultrasonic waves for detection of debonding in bars partially embedded in grout // *Constr. Build. Mat.* 2018. V. 168. P. 124–142.
24. *Кузнецов С.В., Ильяшенко А.В.* Поляризация волн Похгаммера–Кри: аксиально симметричные продольные моды // *Акуст. журн.* 2018. Т. 64. № 6. С. 657–663.
25. *Мокряков В.В.* Maxima of the stresses in the longitudinal Pochhammer – Chree waves // *Mech. Solids.* 2019. V. 54. № 7. P. 1063–1075.
26. *Мокряков В.В.* Maximal stresses of the longitudinal Pochhammer – Chree waves // *Proc. Struct. Integrity.* 2019. V. 23. P. 143–148.
27. *Мейз Дж.* Теория и задачи механики сплошных сред. М.: Мир, 1974. 318 с.
28. *Грэй Э., Мэтьюз Г.Б.* Функции Бесселя и их приложения к физике и механике. М.: Изд. иностранной литературы, 1949. 388 с.
29. *Ватсон Г.Н.* Теория бесселевых функций. Ч. 1. М.: Изд. иностранной литературы, 1949. 798 с.
30. *Микер Т., Мейтцлер А.* Волноводное распространение в протяженных цилиндрах и пластинках. Физическая акустика / под ред. Мэзона У. М.: Мир, 1966. С. 140–203.