

УСТОЙЧИВЫЕ КОМПОНЕНТЫ ЗВУКОВОГО ПОЛЯ НА АПЕРТУРЕ АНТЕННЫ В УСЛОВИЯХ МНОГОЛУЧЕВОГО РАСПРОСТРАНЕНИЯ

© 2022 г. А. Л. Вировлянский^а, *, А. Ю. Казарова^а

^аИнститут прикладной физики Российской Академии наук,
ул. Ульянова 46, Нижний Новгород, 603950 Россия

*e-mail: viro@ipfran.ru

Поступила в редакцию 03.09.2021 г.

После доработки 03.09.2021 г.

Принята к публикации 30.11.2021 г.

Обсуждается представление волнового поля на вертикальной антенне в подводном звуковом канале в виде суперпозиции компонент, которые устойчивы по отношению к крупномасштабным возмущениям поля скорости звука. Каждая такая компонента формируется узким пучком лучей, попадающих на апертуру антенны. Использование данного представления позволяет модифицировать традиционный метод согласованной со средой обработки сигналов путем перехода от сравнения измеренного и рассчитанного полей на антенне к сравнению устойчивых компонент этих полей. Показано, что использование модифицированного подхода при решении задачи локализации источника позволяет ослабить требования к точности математической модели среды.

Ключевые слова: подводный звуковой канал, антенна, когерентные состояния, обработка сигналов

DOI: 10.31857/S0320791922020113

ВВЕДЕНИЕ

Классический метод согласованной со средой обработки сигналов, который в англоязычной литературе называется *matched field processing*, базируется на сопоставлении измеренных и рассчитанных полей на апертуре антенны [1–3]. Обычно он используется при решении задачи локализации источника и/или оценки неизвестных параметров среды. На практике эффективность этого подхода ограничена неизбежной неточностью модели среды, которая особенно сильно проявляется в условиях многолучевого распространения.

Для преодоления проблем, связанных с неточностью информации о среде распространения, предложен ряд робастных алгоритмов. В основе одного из них лежит метод пространственной обработки с многократными ограничениями [4]. В рамках этого метода измеренное поле сравнивается с полями, рассчитанными для координат источника и некоторых параметров среды внутри допустимых интервалов [1, 5, 6]. В рамках еще одного известного подхода наряду с искомыми параметрами, описывающими положение источника, в рассмотрение вводится совокупность параметров, характеризующих среду распространения. Задача при этом заключается в совместном определении всего набора неизвестных величин на основе байесовской теории оценивания [7, 8]. Описанию этих и других методов согласованной со

средой обработки сигналов посвящена обширная литература (см. монографии [2, 3, 9] и обзор [10]). Тем не менее, недостаток информации о среде остается серьезной проблемой [11], и исследования по данной тематике продолжают.

В недавней работе [12] предложен новый вариант согласованной со средой обработки, базирующийся на представлении поля на приемной антенне в подводном волноводе в виде суперпозиции введенных в [13] так называемых устойчивых компонент поля. Каждая компонента формируется узким пучком лучей. В условиях многолучевости на антенну с разных направлений приходят несколько пучков и поле, соответственно, представлено суперпозицией нескольких устойчивых компонент. В [12] показано, что такое представление поля позволяет ввести коэффициент похожести, количественно характеризующий близость измеренного и рассчитанного тональных полей на антенне, который менее чувствителен к неточностям модели среды, чем коэффициент, используемый для той же цели в рамках традиционного подхода [1, 2].

В данной статье продолжено изучение возможностей этого подхода и уточнение условий его применимости. Здесь проанализированы данные численных расчетов полей в той же модели глубоководного волновода, что и в [12], но рассогласование между реальным волноводом и его

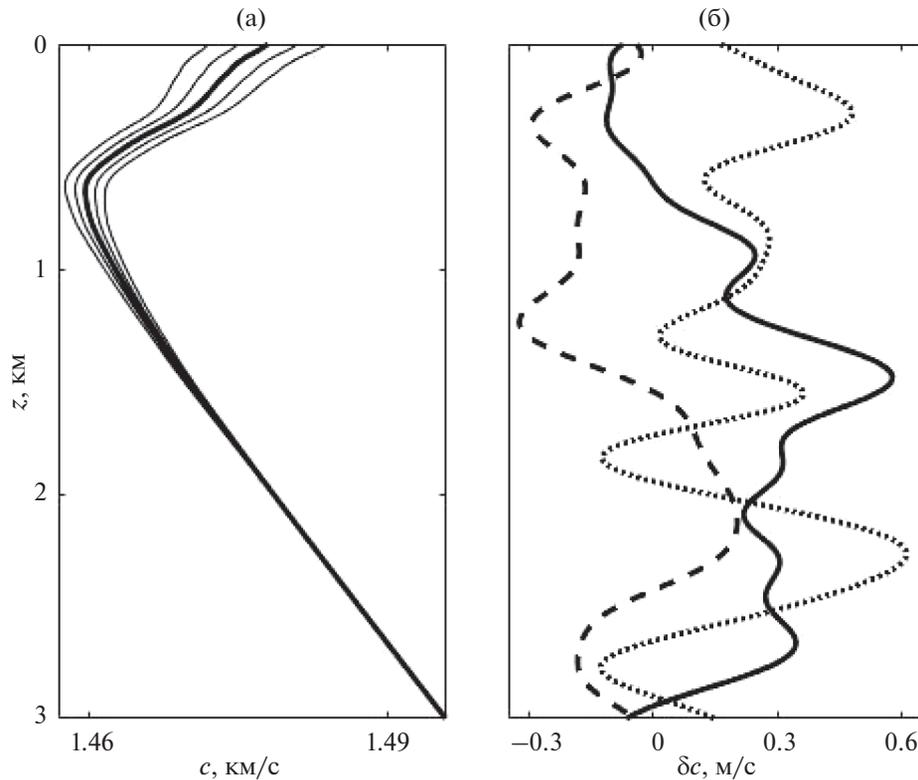


Рис. 1. (а) – Невозмущенный профиль скорости звука (жирная линия) и несколько профилей с возмущением (1) (тонкие линии). (б) – Зависимости случайного возмущения $\delta c(z)$ на трех разных дистанциях.

математической моделью имитируется введением не только слабого случайного, но и более сильного (не зависящего от дистанции) детерминированного возмущения скорости звука. Исследованы особенности обсуждаемого представления поля для разных частот и разных размеров антенны. Для импульсных полей предложен аналог введенного для тональных полей коэффициента похожести, который тоже может быть использован при решении обратных задач.

Материалы данной статьи расположены в следующем порядке. В разд. 1 описана математическая модель среды, используемая далее в численных расчетах. Основные идеи обсуждаемого подхода изложены в разд. 2. В разд. 3 описана процедура выделения устойчивых компонент из полного поля. Разделы 4 и 5 посвящены анализу данных численного моделирования тональных и импульсных звуковых полей. Итоги работы подведены в разд. 6.

1. МОДЕЛЬ СРЕДЫ

Для иллюстрации и анализа возможностей обсуждаемого подхода ниже рассматривается звуковое поле в двумерной модели глубоководного волновода. Зависимость скорости звука c от дистанции r и глубины z выражается функцией

$c(r, z) = c_b(z) + \delta c(r, z)$, где $c_b(z)$ – невозмущенный профиль скорости звука, а $\delta c(r, z)$ – слабое возмущение. Ось z направлена вертикально вниз и поверхность воды находится в плоскости $z = 0$.

Невозмущенный профиль $c_b(z)$ изображен жирной линией на рис. 1а. Далее рассматривается ситуация, когда поле возбуждается точечным источником, расположенным на глубине $z_s = 0.7$ км. Плоское дно, находящееся на глубине 3 км, предполагается сильно поглощающим. Поэтому звуковое поле формируется волнами, захваченными рефракционным волноводом и распространяющимися без отражений от дна. Эти волны формируются лучами с углами выхода из источника в интервале $\pm 12.5^\circ$.

Рассматриваются два типа возмущения δc : детерминированное и случайное. Первое представляет собой не зависящее от дистанции возмущение профиля скорости звука

$$\delta c(z) = \Delta_c \left(1 - \frac{z}{a}\right)^2 e^{-z/b}, \quad (1)$$

где $a = 5$ км, $b = 0.8$ км, а Δ_c – амплитуда возмущения, принимающая значения в интервале

$$-6 \text{ м/с} < \Delta_c < 6 \text{ м/с}. \quad (2)$$

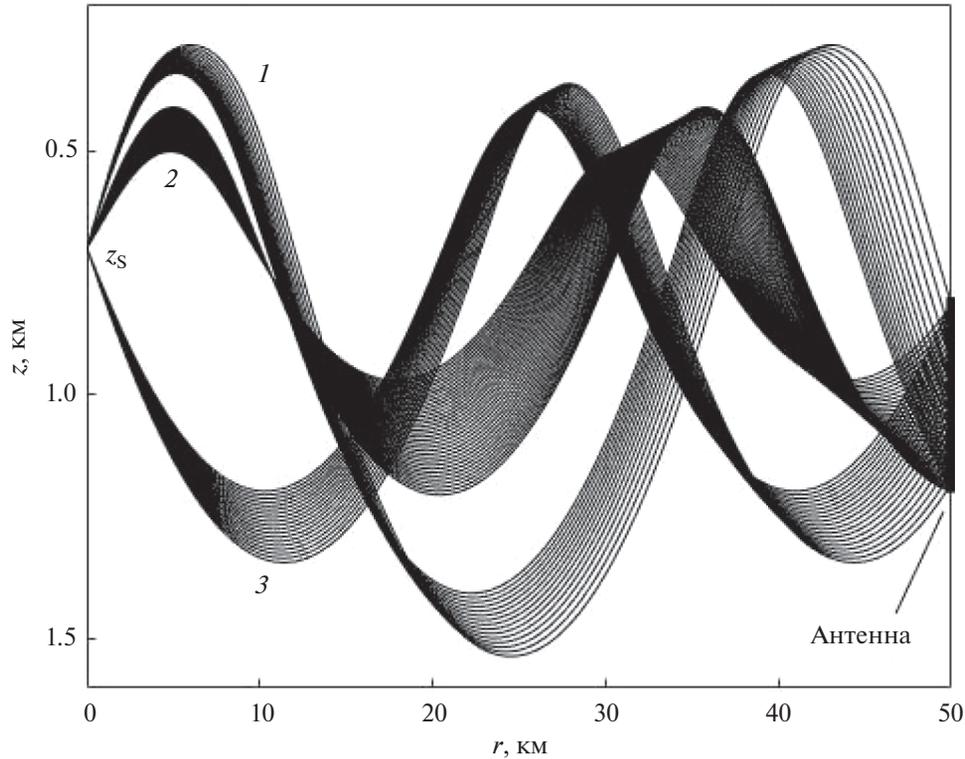


Рис 2. Три пучка лучей, попадающих на антенну длиной $L = 400$ м. Около каждого пучка указан его номер.

На рис. 1а тонкими линиями показаны несколько возмущенных профилей со значениями Δ_c из данного интервала.

Случайное возмущение $\delta c(r, z)$ имеет нулевое среднее $\langle \delta c \rangle = 0$ и функцию корреляции

$$\begin{aligned} \langle \delta c(r, z) \delta c(r', z') \rangle = \\ = (\delta c_{\text{rms}})^2 \exp \left(-\frac{\pi(r - r')^2}{l_r^2} - \frac{\pi(z - z')^2}{l_z^2} \right), \end{aligned}$$

где $\delta c_{\text{rms}} = 0.25$ м/с, $l_r = 5$ км, $l_z = 0.5$ км. Здесь и далее символ $\langle \dots \rangle$ обозначает усреднение по случайным реализациям. Эта простейшая модель отличается от более реалистичных моделей, используемых в акустике океана для описания флуктуаций скорости звука в глубоком море [14, 15]. Однако в работе [16] показано, что она пригодна для анализа устойчивых компонент звуковых полей и грубой оценки их параметров. На рис. 1б изображены несколько реализаций случайного возмущения в вертикальных сечениях волновода.

Приведенные ниже результаты расчетов полей в описанной модели среды выполнены методом широкоугольного параболического уравнения [2].

2. МОНОХРОМАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ НА АПЕРТУРЕ АНТЕННЫ КАК СУПЕРПОЗИЦИЯ УСТОЙЧИВЫХ КОМПОНЕНТ

Нашей целью является анализ звукового поля на апертуре вертикальной приемной антенны, расположенной на дистанции $r_a = 50$ км и перекрывающей интервал глубин $z_c - L/2 < z < z_c + L/2$, где $z_c = 1$ км – глубина центра антенны, а L – ее длина, принимающая значения 100, 200 и 400 м. На рис. 2 изображены траектории лучей в невозмущенном волноводе ($\delta c = 0$), попадающих на антенну длиной $L = 400$ м. Они образуют три пучка, каждому из которых присвоен номер n , указанный на рисунке. Поля на антеннах меньшей длины, очевидно, формируются лучами из этих пучков.

Такая картина типична для многолучевого распространения. Если на антенну попадают N пучков (в нашем примере $N = 3$), то в случае монохроматического источника комплексную амплитуду поля на апертуре антенны $u(z)$ можно представить в виде

$$u(z) = \sum_{n=1}^N u_n(z), \quad (3)$$

где $u_n(z)$ – вклад n -го пучка. Далее мы будем использовать матричные обозначения, в которых

функция $u_n(z)$ представлена вектором \mathbf{u}_n , элементами которого служат значения данной функции на элементах антенны. Численно моделируется ситуация, когда расстояния между соседними элементами малы по сравнению с длиной волны. В новых обозначениях (3) переходит в

$$\mathbf{u} = \sum_{n=1}^N \mathbf{u}_n. \quad (4)$$

Полагая, что длина волны мала по сравнению с характерными масштабами возмущения δc , для оценки влияния последнего на компоненты поля \mathbf{u}_n воспользуемся приближением геометрической оптики [14, 17]. Введем опорное волновое число $k = 2\pi f/c_0$, где f – несущая частота, c_0 – опорная скорость звука, удовлетворяющая условию $|c(r, z) - c_0| \ll c_0$. На коротких трассах слабое возмущение не приводит к заметным изменениям траектории луча и его амплитуды. Оно проявляется лишь в том, что время пробега звука вдоль луча приобретает не зависящее от частоты приращение

$$\tau = -\frac{1}{c_0^2} \int_{\Gamma} ds \delta c, \quad (5)$$

где Γ – невозмущенная траектория, а ds – элемент длины дуги [14, 17]. При этом фаза луча получает приращение $\phi = 2\pi f \tau$.

Компоненту \mathbf{u}_n мы называем устойчивой, если она формируется пучком, который столь узок, что его ширина меньше пространственных масштабов возмущения δc [13]. Все лучи такого пучка пересекают примерно одинаковые неоднородности, приобретают близкие задержки τ_n , а значит и близкие приращения фазы ϕ_n . Символом $\delta\phi_n$ обозначим разброс значений ϕ_n для лучей n -го пучка. При выполнении условия

$$\delta\phi_n \ll \pi \quad (6)$$

приращения ϕ_n для всех лучей почти одинаковы, и компонента поля на антенне, формируемая пучком, в присутствии возмущения приобретает дополнительный фазовый множитель

$$\gamma_n = e^{i\phi_n}. \quad (7)$$

При этом приращения ϕ_n могут превышать π . Если все N компонент устойчивы, то в возмущенном волноводе выражение для поля на антенне (4) переходит в

$$\tilde{\mathbf{u}} = \sum_{n=1}^N \gamma_n \mathbf{u}_n. \quad (8)$$

Как уже отмечалось во Введении, согласованная со средой обработка сигналов основана на сравнении вектора \mathbf{u} , рассчитанного в идеализи-

рованной (невозмущенной) модели среды, и вектора \mathbf{v} , измеренного в эксперименте. В рамках традиционного подхода [1, 2] предполагается, что рассчитанный вектор \mathbf{u} с точностью до некоторого амплитудного множителя γ примерно совпадает с измеренным вектором \mathbf{v} . Это значит, что $\mathbf{v} = \gamma \mathbf{u}$, где $\gamma = \mathbf{u}^+ \mathbf{v} / |\mathbf{u}|^2$ – множитель, минимизирующий невязку $|\mathbf{v} - \gamma \mathbf{u}|^2$. Верхний индекс + здесь и далее означает эрмитово сопряжение. Количественной оценкой близости \mathbf{v} и \mathbf{u} служит коэффициент похожести

$$K_0 = \frac{|\gamma \mathbf{u}|^2}{|\mathbf{v}|^2} = \frac{\mathbf{v}^+ \mathbf{P}_0 \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}, \quad (9)$$

где

$$\mathbf{P}_0 = \frac{\mathbf{u} \mathbf{u}^+}{|\mathbf{u}|^2}.$$

Такая аппроксимация измеренного вектора рассчитанным используется в классическом процессе Бартлета [2, 10].

В работе [12] сформулирован обобщенный метод согласованной с полем обработки сигналов, в котором измеренный вектор \mathbf{v} аппроксимируется линейной комбинацией устойчивых компонент:

$$\mathbf{v} \approx \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{U} \boldsymbol{\gamma}, \quad (10)$$

где $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_N)^T$, символ T означает операцию транспонирования, а $\mathbf{U} = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_N)$ – матрица, столбцами которой служат устойчивые компоненты. При заданных \mathbf{v} и \mathbf{U} вектор $\boldsymbol{\gamma}$ находится путем минимизации невязки $|\mathbf{v} - \mathbf{U} \boldsymbol{\gamma}|^2$. Это дает

$$\boldsymbol{\gamma} = (\mathbf{U}^+ \mathbf{U})^{-1} \mathbf{U}^+ \mathbf{v}. \quad (11)$$

Новый коэффициент похожести \mathbf{v} и \mathbf{u} равен

$$K = \frac{|\mathbf{U} \boldsymbol{\gamma}|^2}{|\mathbf{v}|^2} = \frac{\mathbf{v}^+ \mathbf{P} \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}, \quad (12)$$

где

$$\mathbf{P} = \mathbf{U} (\mathbf{U}^+ \mathbf{U})^{-1} \mathbf{U}^+$$

– проекционная матрица.

Интуитивно ясно, что аппроксимация измеренного вектора \mathbf{v} суперпозицией устойчивых компонент (10), как правило, должна быть более точной, чем аппроксимация невозмущенным полем. Поэтому коэффициент K обычно должен быть больше K_0 . Связь между K и K_0 проще всего проследить в ситуации, когда векторы \mathbf{u}_n с разными n почти ортогональны друг другу, то есть

$$|\mathbf{u}_m^* \mathbf{u}_n| \ll |\mathbf{u}_m| |\mathbf{u}_n|. \quad (13)$$

Это условие обычно выполняется, если размер антенны велик по сравнению с длиной волны, а

количество пучков N невелико. Тогда проекционную матрицу \mathbf{P} можно приближенно представить в виде

$$\mathbf{P} = \sum_{n=1}^N \mathbf{w}_n \mathbf{w}_n^+,$$

где $\mathbf{w}_n = \mathbf{u}/|\mathbf{u}_n|$, и

$$K = \sum_{n=1}^N \frac{|\mathbf{w}_n^+ \mathbf{v}|^2}{|\mathbf{v}|^2}. \quad (14)$$

Это выражение позволяет интерпретировать переход от K_0 к K как переход от сравнения измеренного и рассчитанного полей на антенне к сравнению устойчивых компонент этих полей.

Если \mathbf{v} можно представить вектором $\tilde{\mathbf{u}}$, заданным суммой (8) со случайными амплитудами γ_n вида (7) с независимыми фазами, равномерно распределенными в интервале $(0, 2\pi)$, так что

$$\langle \gamma_n \gamma_m^* \rangle = \delta_{mn}, \quad (15)$$

то $K = 1$, $\langle K_0 \rangle$ лежит в интервале $1/N \leq \langle K_0 \rangle \leq 1$ [12]. При этом $K_0 = 1$, если одна из устойчивых компонент доминирует и распространение имеет практически однолучевой характер. Другой предельный случай, $\langle K_0 \rangle = 1/N$, достигается, если интенсивности всех устойчивых компонент $|\mathbf{u}_n|^2$ одинаковы.

3. ВЫДЕЛЕНИЕ УСТОЙЧИВЫХ КОМПОНЕНТ ИЗ ПОЛНОГО ПОЛЯ

При использовании обсуждаемого в данной работе представления поля на апертуре антенны в виде (8) ключевым моментом является вычисление функций $u_n(z)$, представляющих устойчивые компоненты. В этом разделе мы кратко опишем соответствующую процедуру [13, 20].

Для описания лучевых траекторий воспользуемся гамильтоновым формализмом, в котором траектория в каждой точке дистанции r задается вертикальной координатой z и импульсом $p = c_0 \sin \chi/c(r, z)$, где χ – угол скольжения луча [21, 22]. Если поле возбуждается источником в точке $(0, z_s)$, все лучи выходят с одной и той же глубины z_s с разными начальными импульсами p_0 . На дистанции наблюдения приход каждого луча изображается точкой в фазовой плоскости (импульс P , координата Z). Совокупность таких точек образует кривую, которую мы называем лучевой линией (в механике она называется лагранжевым многообразием [23]). Пример лучевой линии показан на рис. 3. Тонкая сплошная линия изображает здесь приходы лучей на дистанцию

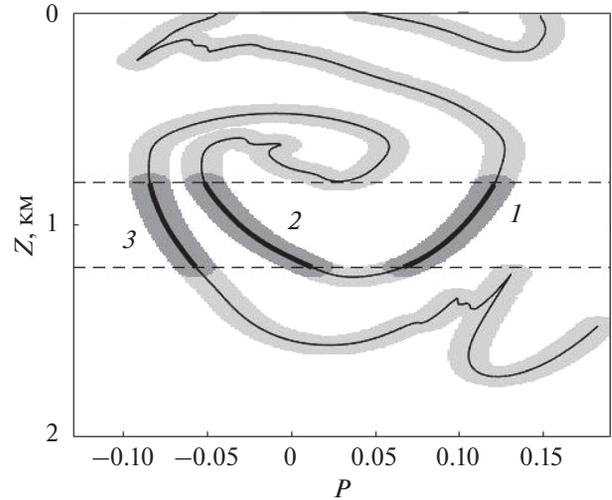


Рис. 3. Лучевая линия (тонкая кривая) и размытая лучевая линия (область, выделенная серым цветом) на дистанции 50 км. Пунктирные линии обозначают глубины краев антенны. Жирные отрезки лучевой линии изображают приходы лучей, формирующих три пучка, показанных на рис. 1. Темно-серым цветом выделены соответствующие размытые сегменты. Масштаб когерентного состояния $\Delta_z = 80$ м, несущая частота $f = 400$ Гц.

наблюдения $r_a = 50$ км в невозмущенном волноводе, описанном в предыдущем разделе. Лучи выходят из точки $(0, z_s)$ (рис. 2). Жирные сегменты лучевой линии изображают приходы трех показанных на рис. 2 пучков лучей, попадающих на апертуру антенны. Около каждого сегмента указан номер соответствующего пучка. Пунктирные прямые обозначают горизонты, отвечающие краям антенны.

Для количественного описания компоненты поля, формируемой пучком лучей, используется заимствованный из квантовой механики формализм разложения волновой функции по когерентным состояниям [24, 25]. В рамках этого формализма, устанавливающего связь между лучевым и волновым представлениями поля, каждая точка фазовой плоскости $\mu = (P, Z)$ ассоциирована с так называемым когерентным состоянием

$$Y_\mu(z) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_z}} \exp \left[ikP(z - Z) - \frac{\pi(z - Z)^2}{2\Delta_z^2} \right], \quad (16)$$

где Δ_z – вертикальный масштаб состояния. В квантовой механике (16) описывает состояние с минимальной неопределенностью [26], а в акустике ее можно интерпретировать как вертикальное сечение звукового пучка шириной Δ_z , распространяющегося под углом скольжения $\chi = \arctan P$. Хотя когерентные состояния не ортогональны, они образуют полную систему функ-

ций. Любая функция $u(z)$ может быть представлена в виде разложения [25]

$$u(z) = \lambda^{-1} \int d\mu a_\mu Y_\mu(z),$$

где $\lambda = 2\pi/k$ – длина волны, $d\mu = dPdZ$ и

$$a_\mu = \int dz u(z) Y_\mu^*(z). \quad (17)$$

Скалярное произведение когерентных состояний, ассоциированных с точками $\mu_1 = (P_1, Z_1)$ и $\mu_2 = (P_2, Z_2)$, равно

$$\left| \int dz Y_{\mu_1}(z) Y_{\mu_2}^*(z) \right| = \frac{1}{\sqrt{2\Delta_z}} \exp\left(-\frac{\pi}{2} d(\mu_1, \mu_2)\right),$$

где $\Delta_p = \lambda/(2\Delta_z)$ и

$$d(\mu_1, \mu_2) = \frac{(P_1 - P_2)^2}{\Delta_p^2} + \frac{(Z_1 - Z_2)^2}{\Delta_z^2}.$$

Функцию $d(\mu_1, \mu_2)$ можно трактовать как безразмерное расстояние между точками фазовой плоскости μ_1 и μ_2 . Когерентные состояния, ассоциированные с этими точками, будем считать близкими при $d < 1$ и различающимися при $d > 1$. Расстоянием от произвольной точки плоскости до лучевой линии (или ее сегмента) назовем расстояние до ближайшей точки линии (сегмента). Основной вклад в звуковое поле дают когерентные состояния, ассоциированные с точками μ , которые удалены от лучевой линии на расстояния $d < 1$. Эта область называется размытой лучевой линией. На рис. 3 она выделена серым цветом.

Вклад пучка в полное волновое поле формируется когерентными состояниями, ассоциированными с точками μ , которые находятся на расстояниях $d < 1$ от сегмента лучевой линии, представляющего пучок. Эти точки образуют размытый сегмент σ . На рис. 3 размытые сегменты, которые отвечают попадающим на антенну пучкам, выделены темно-серым цветом. Компонента поля, формируемая n -м пучком, выражается суперпозицией когерентных состояний

$$u_n(z) = \lambda^{-1} \int_{\sigma_n} d\mu a_\mu Y_\mu(z), \quad (18)$$

где интегрирование идет по соответствующему размытому сегменту σ_n .

На основании сказанного вычисление функций $u_n(z)$ включает следующие шаги.

1) Вычисление полного поля $u(z)$ на дистанции наблюдения с использованием одного из методов решения уравнения Гельмгольца [2, 17].

2) Расчет плотного веера лучевых траекторий (вышедших из источника) до дистанции наблюдения и построение лучевой линии. Выделение

пучков траекторий, попадающих на апертуру антенны. Тем самым будут найдены отвечающие пучкам сегменты лучевой линии.

3) Введение плотной сетки координат и импульсов в фазовой плоскости и определение областей, представляющих размытые сегменты σ_n .

4) Расчет амплитуд когерентных состояний a_μ по формуле (17) для точек μ , входящих в σ_n .

5) Вычисление интеграла (18).

Обратим внимание на следующие моменты.

Описанная процедура применима лишь в ситуации, когда размытые сегменты σ_n не перекрываются друг с другом и другими участками размытой лучевой линии. При вычислениях мы пользуемся сформулированным в [20] методом выбора Δ_z , минимизирующего среднюю (безразмерную) ширину лучевой линии. Если размытый сегмент ни при каком выборе Δ_z не разрешается, устойчивые компоненты выделить нельзя и представление поля в виде суперпозиции таких компонент теряет смысл.

Следует также отметить, что, хотя выделение устойчивых компонент базируется на расчетах лучевых траекторий, здесь нет особенностей, связанных с каустиками (каустикам отвечают точки лучевой линии, касательные к которым параллельны оси P). Обсуждаемый подход применим даже в случае, когда антенна пересекает каустику [12].

4. УСТОЙЧИВЫЕ КОМПОНЕНТЫ МОНОХРОМАТИЧЕСКИХ ЗВУКОВЫХ ПОЛЕЙ

При введении понятия устойчивой компоненты поля мы исходили из выраженного условием (6) предположения о близости приращений фаз лучей, формирующих такую компоненту. В данном разделе приведены результаты численного моделирования, свидетельствующие о том, что это требование можно существенно ослабить.

4.1. Случайные и детерминированные приращения фаз лучей

Количественные оценки максимального разброса приращений фаз лучей $\delta\phi_n$ получены для трех пучков, описанных в разд. 3 (рис. 2). Задержки τ_n рассчитывались по формуле (5) для 100 реализаций случайного возмущения и для 50 детерминированных возмущений (1) с амплитудами Δ_c , равномерно заполняющими интервал (2). Рассматривались пучки, которые на дистанции наблюдения r_a попадают на антенну длиной $L = 100, 200$ и 400 м. Для каждой реализации δc вычислялся максимальный разброс фаз $\delta\phi_n$, $n = 1, 2, 3$ для каждого пучка и каждой длины антенны L на

частоте 200 Гц. Поскольку величина $\delta\phi_n$ пропорциональна частоте, полученные оценки очевидным образом экстраполируются на другие частоты.

В табл. 1 и 2 приведены среднеквадратичные значения $\delta\phi_n$ для случайного и детерминированного возмущений соответственно. Эти данные показывают, что в рассматриваемой ситуации условие (6) на дистанции наблюдения не выполняется. Однако далее мы увидим, что даже при таких $\delta\phi_n$ разложение (8) приближенно описывает поле на антенне и полученный на основе этого представления коэффициент похожести (12) может быть использован при решении задачи локализации.

4.2. Флуктуации амплитуд устойчивых компонент в присутствии случайного возмущения

Амплитуды устойчивых компонент γ_n на дистанции 50 км были рассчитаны по формуле (11) для векторов \mathbf{v} , представляющих поля на антенне длиной $L = 100, 200$ и 400 м на частотах $f = 200, 400$ и 800 Гц в 300 реализациях случайного возмущения $\delta\mathbf{c}$. Как и следовало ожидать, нарушение условия (6) приводит к тому, что амплитуды устойчивых компонент γ_n не выражаются фазовыми множителями (7) и поэтому их амплитуды $|\gamma_n|$ отличаются от единицы. С помощью усреднения по случайным реализациям были вычислены две количественные характеристики распределения γ_n : статистические моменты $\alpha_{nm} = \langle \gamma_n \gamma_m^* \rangle$ и индексы мерцания [27]

$$\beta_n = \frac{\left[\langle |\gamma_n|^4 \rangle - \langle |\gamma_n|^2 \rangle^2 \right]^{1/2}}{\langle |\gamma_n|^2 \rangle}.$$

Поскольку разные пучки пересекают разные неоднородности среды, естественно ожидать, что флуктуации γ_n , отвечающих разным n , будут слабо коррелированы. Это предположение подтверждается результатами моделирования. Коэффициент корреляции $\alpha_{nm} / (\alpha_{mm} \alpha_{nn})^{1/2}$ при $m \neq n$ для всех трех значений L на частотах 400 и 800 Гц не превышает 0.1, а на частоте 200 Гц не превышает 0.25.

В табл. 3 для каждой пары (L, f) указаны индекс мерцаний β_n и (в скобках) интенсивность n -й компоненты $\alpha_{nn} = \langle |\gamma_n|^2 \rangle$. Значения β_n и α_{nn} усреднены по n . Согласно полученным значениям индекса мерцаний, вариации амплитуд $|\gamma_n|$ увеличиваются с ростом частоты и размера антенны и могут быть значительными. Однако средние интенсивности $\langle |\gamma_n|^2 \rangle$ мало отличаются от едини-

Таблица 1. Среднеквадратичный разброс приращений фаз лучей n -го пучка ($\delta\phi_n$), падающего на антенну длиной L в среде со случайным возмущением $\delta\mathbf{c}(r, z)$. Несущая частота 200 Гц

$L, \text{ м}$	n		
	1	2	3
100	0.29	0.48	0.31
200	0.7	1.2	0.8
400	1.8	2.0	1.5

Таблица 2. То же самое, что в табл. 1, но для детерминированного возмущения профиля скорости звука (1)

$L, \text{ м}$	n		
	1	2	3
100	0.4	0.12	0.25
200	0.9	0.3	0.8
400	2.5	0.7	1.5

Таблица 3. Индексы мерцания и интенсивности устойчивых компонент в зависимости от длины антенны L и частоты f . Для каждой пары (L, f) указано значение β_n , усредненное по n , и (в скобках) значение $\langle |\gamma_n|^2 \rangle$, также усредненное по n

$L, \text{ м}$	$f, \text{ Гц}$		
	200	400	800
100	0.37 (1.37)	0.33 (1.27)	0.42 (1.16)
200	0.32 (1.23)	0.39 (1.13)	0.73 (0.94)
400	0.42 (1.09)	0.71 (0.9)	0.99 (0.68)

цы, и даже при нарушении условия (6) соотношение (15) приближенно выполняется.

4.3. Коэффициенты похожести возмущенных и невозмущенных полей

В этом разделе представлены результаты расчета коэффициентов похожести K_0 и K , заданных соотношениями (9) и (12). Нашей целью является сопоставление эффективности их использования при решении задачи локализации источника звука в волноводе. Оценка точки расположения источника \mathbf{x}_s , возбуждившего зарегистрированное антенной поле \mathbf{v} , выполняется следующим образом [2]. Вводится множество пробных точек \mathbf{x} , покрывающих область предполагаемого расположения источника. Для каждого \mathbf{x} теоретически вычисляется поле $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, которое создал бы на антенне источник, находящийся в этой точке. В качестве искомой оценки принимается вектор \mathbf{x}_s , от-

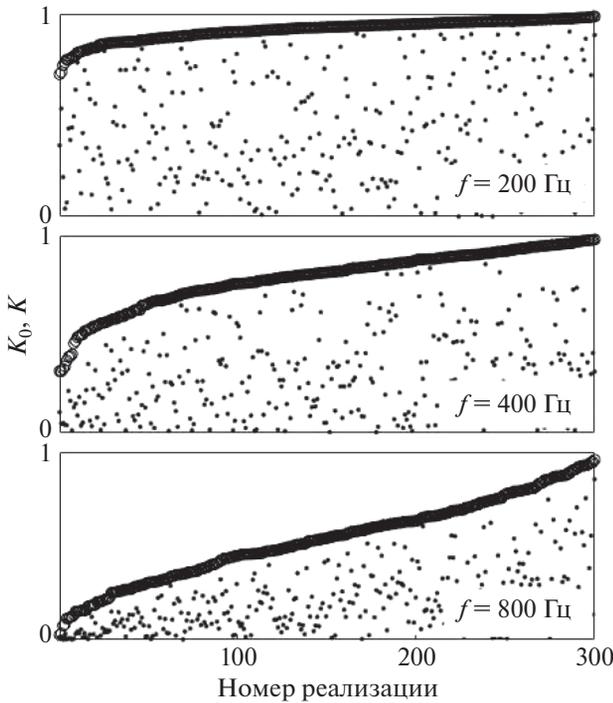


Рис. 4. Коэффициенты схожести K_0 (точки) и K (кружки) на антенне длиной $L = 200$ м на частотах 200 Гц (вверху), 400 Гц (в середине) и 800 Гц (внизу), рассчитанные для 300 реализаций случайного возмущения $\delta\epsilon$. Для наглядности на каждом из графиков реализации пронумерованы в порядке возрастания коэффициента K .

вещающий полю $\mathbf{u}(\mathbf{x}_s)$, максимально “похожему” на \mathbf{v} . Применение коэффициента K_0 для количественной оценки схожести \mathbf{u} и \mathbf{v} требует высокой точности модели среды. Из определения K_0 понятно, что этот коэффициент “чувствует” малые различия сравниваемых векторов. Однако в условиях многолучевости даже слабое возмущение $\delta\epsilon$ может приводить к сильному отклонению $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, отвечающего истинному положению источника, от \mathbf{v} и, следовательно, к появлению ложных максимумов в зависимости K_0 от \mathbf{x} . На основании соображений, приведенных в разд. 3, можно ожидать, что новый коэффициент K менее чувствителен к влиянию возмущения и поэтому его использование вместо K_0 позволит снизить требова-

ния к точности модели среды. Это подтверждается результатами численного моделирования.

На рис. 4 приведены значения коэффициентов схожести K_0 и K для поля \mathbf{u} на антенне длиной $L = 200$ м в невозмущенном волноводе и полей \mathbf{v} на той же антенне в возмущенном волноводе, рассчитанных для 300 реализаций случайного возмущения $\delta\epsilon(r, z)$. Расчеты выполнены на частотах 200, 400 и 800 Гц. Точками и кружками показаны значения K_0 и K соответственно. Как видим, значения K превышают K_0 . Похожая ситуация наблюдается и для антенн длиной 100 и 400 м. В табл. 4 приведены значения $\langle K_0 \rangle$ и $\langle K \rangle$, усредненные по 300 реализациям возмущения. Они обозначены $\langle K_0 \rangle$ и $\langle K \rangle$ соответственно. Как видим, для всех рассмотренных частот и размеров антенны значение $\langle K \rangle$ как минимум вдвое превышает $\langle K_0 \rangle$. Оба коэффициента, как и должно быть, уменьшаются с ростом частоты f и длины антенны L . Ведь увеличение как f , так и L увеличивает разброс случайных приращений фаз лучей, формирующих пучок.

Для успешного использования при решении задачи локализации коэффициент схожести должен (i) принимать большие значения, если сравниваемые поля излучены из одной точки, и (ii) малые значения, если поля излучены из разных точек. На рис. 5 представлены результаты численного моделирования, позволяющие судить о том, насколько этим требованиям удовлетворяют коэффициенты K_0 и K . Здесь показаны графики функций $K_0(r)$ и $K(r)$, которые мы называем функциями неопределенности. Каждая из них представляет соответствующий коэффициент схожести поля на антенне, расположенной на дистанции r_a в невозмущенном волноводе, и поля на антенне, перекрывающей тот же интервал глубин на дистанции r в волноводе со случайным возмущением $\delta\epsilon$. Моделирование проведено на частотах 200 Гц (верхний ряд графиков), 400 Гц (средний ряд) и 800 Гц (нижний ряд). Левый и средний столбцы графиков представляют результаты расчета $K_0(r)$ и $K(r)$ для 10 реализаций возмущения, а в правом графике показан результата усреднения функций $K_0(r)$ (тонкая линия) и

Таблица 4. Коэффициенты схожести K_0 (9) и K (12), усредненные по 300 реализациям случайного возмущения $\delta\epsilon$

$L, \text{ м}$	200 Гц $\langle K_0 \rangle$	200 Гц $\langle K \rangle$	400 Гц $\langle K_0 \rangle$	400 Гц $\langle K \rangle$	800 Гц $\langle K_0 \rangle$	800 Гц $\langle K \rangle$
100	0.43	0.98	0.38	0.93	0.3	0.79
200	0.41	0.92	0.29	0.79	0.2	0.54
400	0.32	0.7	0.17	0.46	0.09	0.26

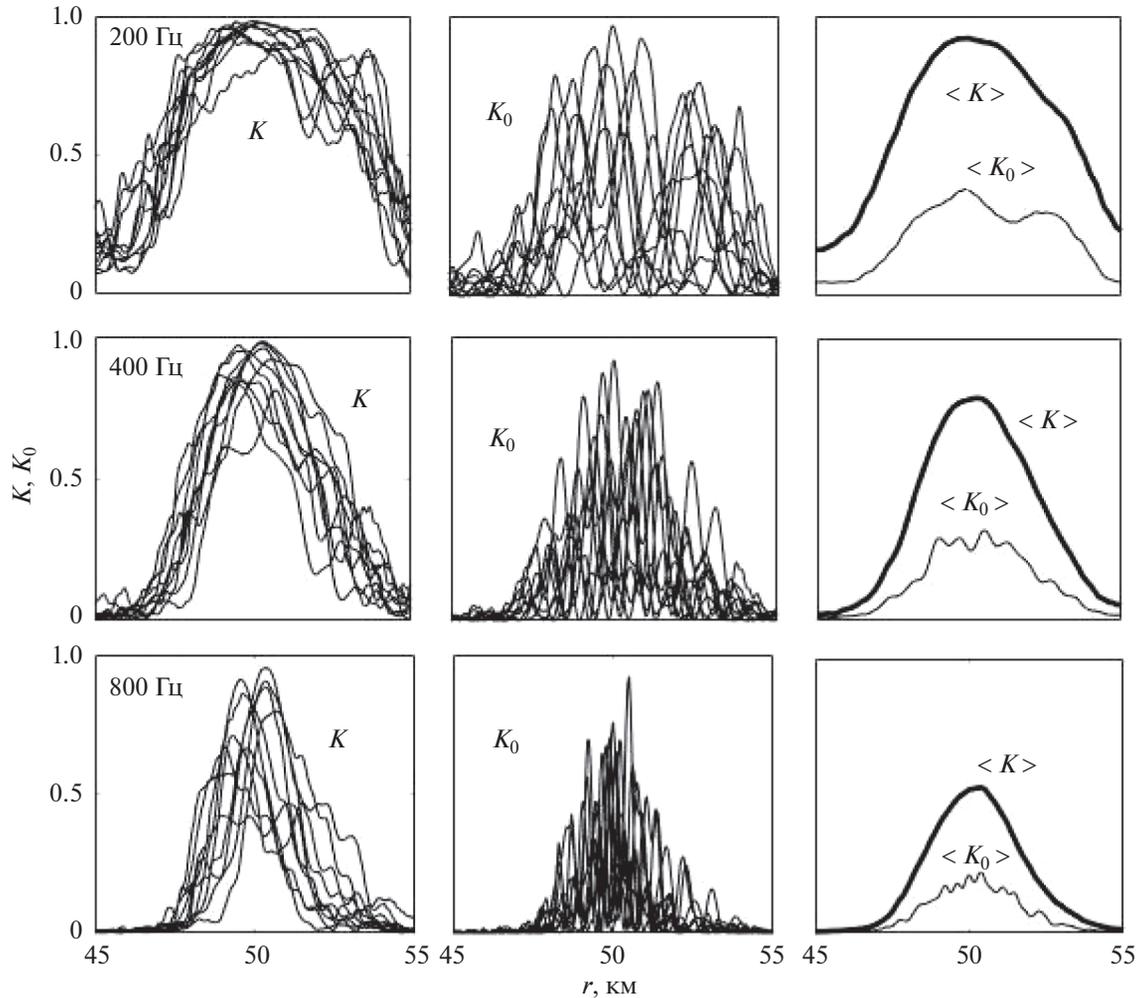


Рис. 5. Функции неопределенности $K(r)$ и $K_0(r)$ на антенне длиной $L = 200$ м для частот 200 Гц (верхний ряд графиков), 400 Гц (средний ряд) и 800 Гц (нижний ряд). В левом и среднем столбцах приведены графики функций $K(r)$ и $K_0(r)$ соответственно для 10 реализаций случайного возмущения δc . В правом столбце представлены результаты усреднения функций неопределенности $K(r)$ (жирные линии) и $K_0(r)$ (тонкие линии) по 50 реализациям δc .

$K(r)$ (жирная линия) по 300 реализациям возмущения.

С точки зрения решения задачи локализации оптимальной формой функции неопределенности была бы плавная кривая с единственным максимумом при $r = 50$ км. На рис. 5 мы видим, что функция $K(r)$ больше соответствует этому требованию, чем $K_0(r)$.

Аналогична ситуация имеет место для детерминированного возмущения профиля скорости звука (1). На рис. 6 показаны коэффициенты похожести K_0 (кружки) и K (звездочки), рассчитанные для детерминированного возмущения скорости звука (1) с разными амплитудами Δc , на антенне длиной $L = 200$ м на частотах 200 Гц (вверху), 400 Гц (в середине) и 800 Гц (внизу).

Здесь, как и на рис. 5, коэффициент K превышает K_0 .

На рис. 7 тонкими и жирными кривыми показаны функции неопределенности $K_0(r)$ и $K(r)$ соответственно в невозмущенном волноводе (вверху) и волноводе с детерминированным возмущением профиля скорости звука (1) с амплитудой $\Delta c = -5$ м/с (внизу). Расчет выполнен на частоте $f = 400$ Гц для антенны длиной $L = 200$ м. Эти функции имеют те же характерные особенности, которые мы видели на рис. 5 для аналогичных функций, рассчитанных в присутствии случайного возмущения δc . В то время как $K(r)$ имеет один широкий пик при $r = r_a$, функция $K_0(r)$ имеет несколько более узких локальных пиков,

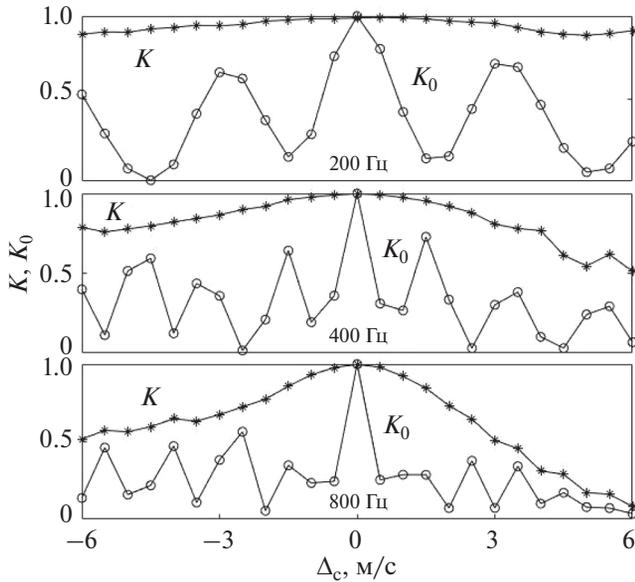


Рис. 6. Коэффициенты схожести K_0 (кружки) и K (звездочки) в случае детерминированного возмущения профиля скорости звука (1) с амплитудами Δ_z из интервала $[-6 \text{ м/с}, 6 \text{ м/с}]$. Длина антенны $L = 200 \text{ м}$, несущие частоты 200 Гц (вверху), 400 Гц (в середине) и 800 Гц (внизу).

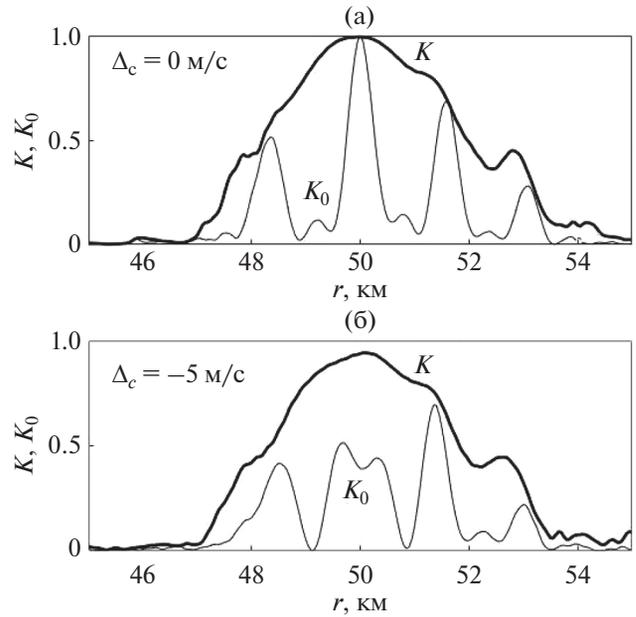


Рис. 7. Функции неопределенности $K(r)$ (жирные линии) и $K_0(r)$ (тонкие линии) на антенне длиной $L = 200 \text{ м}$ на частоте 400 Гц. (а) – Невозмущенный волновод, (б) – в присутствии возмущения профиля скорости звука (1) с амплитудой $\Delta_c = -5 \text{ м/с}$.

максимальные значения которых в возмущенном волноводе меньше, чем у $K(r)$.

5. УСТОЙЧИВЫЕ КОМПОНЕНТЫ ИМПУЛЬСНЫХ ЗВУКОВЫХ ПОЛЕЙ

Обратимся к рассмотрению поля, возбужденного импульсным источником. В вертикальном сечении волновода на дистанции наблюдения его можно представить в виде

$$U(z, t) = \int df u(z, f) e^{-2\pi ift},$$

где t – время, а $u(z, f)$ – Фурье-гармоника поля на частоте f . Устойчивые компоненты поля $U(z, t)$ на антенне, как и в случае монохроматического источника, формируются узкими пучками лучей. Каждая Фурье-гармоника полного поля $u(z, f)$ представляется в виде суперпозиции устойчивых компонент $u_n(z, f)$, выделяемых из $u(z, f)$ с помощью процедуры, описанной в разд. 4. Индекс n указывает номер соответствующего пучка лучей. Поскольку лучевые траектории не зависят от частоты, компоненты $u_n(z, f)$ с фиксированным n на всех частотах формируются одним и тем же пучком.

Обобщением (3) на случай импульсного источника является выражение

$$U(z, t) = \sum_{n=1}^N U_n(z, t),$$

где

$$U_n(z, t) = \int df u_n(z, f) e^{-2\pi ift}$$

– устойчивая компонента импульсного поля, формируемая n -м пучком.

Как и в разд. 3, мы полагаем, что в простейшем приближении слабое крупномасштабное возмущение δc превращает компоненту поля $u_n(z, f)$ в

$$v_n(z, f) = u_n(z, f) \exp(2\pi if\tau_n)$$

с τ_n , заданным (5). При этом суммарное поле на антенне $U(z, t)$ переходит в

$$V(z, t) = \sum_{n=1}^N V_n(z, t),$$

где

$$V_n(z, t) = \int df v_n(z, f) e^{2\pi if(t+\tau_n)} = U_n(z, t + \tau_n).$$

Таким образом, в случае импульсного источника возмущение δc вызывает дополнительную задержку n -й компоненты как целого.

На рис. 8 приведен результат расчета устойчивых компонент поля импульсного источника, формируемых на антенне длиной 400 м тремя пучками лу-

чей, показанными на рис. 2. Расчет выполнен для ситуации, когда точечный источник излучает звуковой импульс $s(t) = \exp(-\pi t^2/\Delta_t^2 - 2\pi i f_0 t)$ с эффективной длительностью $\Delta_t = 0.025$ с на центральной частоте $f_0 = 400$ Гц. На рисунке показаны амплитуды полного поля $|U(z,t)|$ (рис. 8а) и амплитуды устойчивых компонент $|U_n(z,t)|$ (рис. 8б–8г), выделенных из $U(z,t)$ с помощью разложения по когерентным состояниям. Белым цветом выделены сегменты так называемого временного фронта. Каждый сегмент изображает приходы лучей одного из пучков на дистанцию 50 км в плоскости (время t , глубина z). Номер пучка указан рядом с сегментом.

Как видим, амплитуда полного поля на антенне $|U(z,t)|$ имеет сложную структуру, которая является результатом интерференции устойчивых компонент $U_n(z,t)$. Амплитуды последних $|U_n(z,t)|$ представлены плавными функциями z и t . В присутствии возмущения функции $|U_n(z,t)|$ остаются плавными и локализованными в окрестностях соответствующих сегментов временного фронта.

Отметим, что при стремлении размера антенны L к нулю пучки превращаются в так называемые собственные лучи (по-английски *eigenrays*), соединяющие центр антенны с источником. При этом компоненты $U_n(z,t)$ представляют собой звуковые импульсы, приходящие в центр антенны по собственным лучам. В классической схеме акустической томографии океана времена прихода этих импульсов используются в качестве входных параметров при решении обратной задачи [17, 28].

Обсудим вопрос о введении количественной характеристики близости импульсных полей в невозмущенном и возмущенном волноводах. Очевидно, что при сравнении Фурье-гармоник полей на отдельных частотах f можно использовать рассмотренные выше коэффициенты похожести K_0 и K ((9) и (12)). Однако если поле возбуждается когерентным источником, такое сравнение не учитывает детерминированной связи между фазами гармоник излучаемого сигнала. Рассмотрим вариант коэффициента похожести, позволяющий учесть эту связь.

В предположении, что размер антенны L достаточно велик для выполнения условия (13) на всех частотах f в полосе излучаемого сигнала, введем в рассмотрение функцию

$$W_n(t) = \left| \int_{z_c-L/2}^{z_c+L/2} dz \int_{-\infty}^{\infty} dt V(z,t') U_n^*(z,t'+t) \right|, \quad (19)$$

которую можно интерпретировать как “проекцию” $V(z,t)$ – поля импульсного источника на

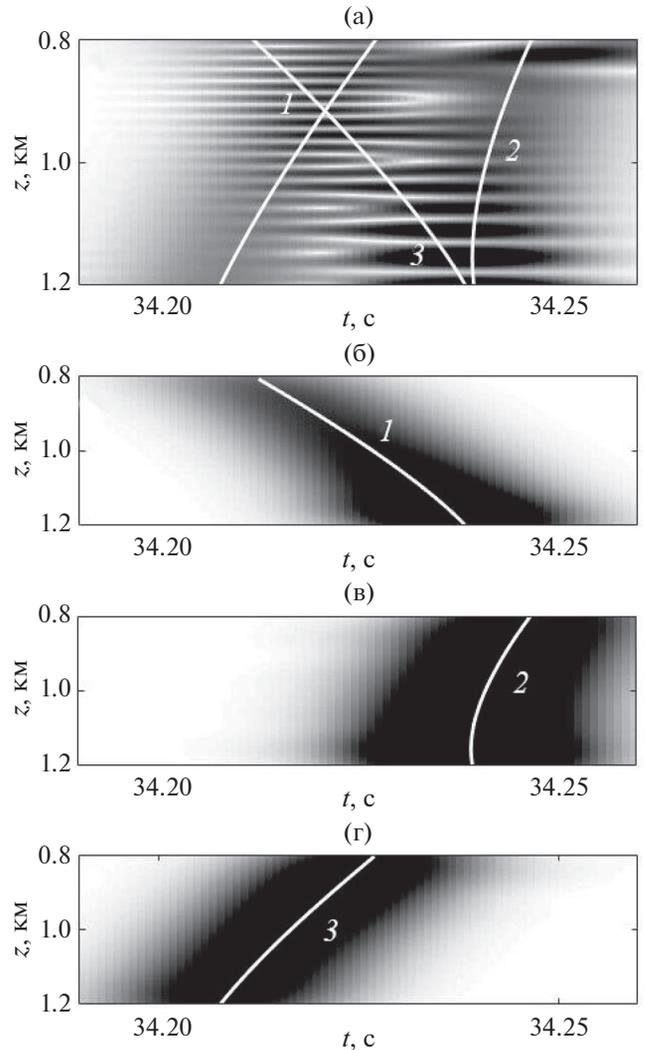


Рис. 8. (а) – Распределение амплитуды $|v|$ регистрируемого антенной звукового поля от импульсного источника в координатах (время t , глубина z). Аналогичные распределения для компонент поля, формируемых (б) – 1-м, (в) – 2-м и (г) – 3-м пучками.

антенне в возмущенном волноводе на $U_n(z,t)$ – устойчивую компоненту поля того же источника в невозмущенном волноводе. В невозмущенном волноводе, то есть при $V(z,t) = U(z,t)$, функции $W_n(t)$ для всех n достигают максимума при $t = 0$. Ширина основного пика каждой из этих функций примерно совпадает с длительностью излученного сигнала Δ_t . В присутствии возмущения δc максимум $W_n(t)$ достигается при $t = \tau_n$. Если разброс значений τ_n мал по сравнению с Δ_t (в нашем примере это условие выполняется), сумма всех “проекций”

$$W(t) = \sum_{n=1}^N W_n(t) \quad (20)$$

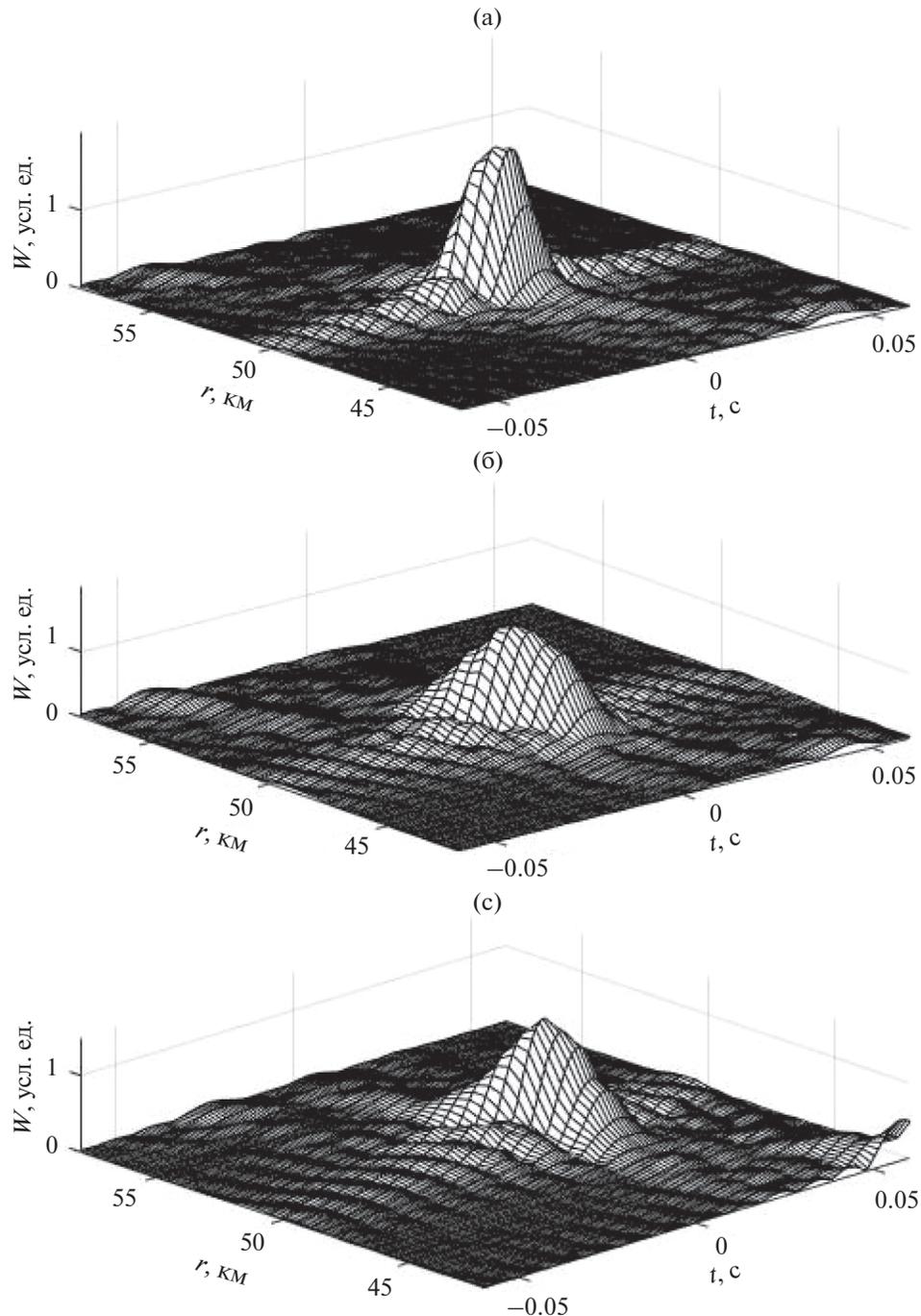


Рис. 9. «Функция неопределенности» W поля импульсного источника на центральной частоте 400 Гц, регистрируемого антенной длиной $L = 400$ м (а) – в невозмущенном волноводе, (б) – в присутствии реализации случайного возмущения δc и (в) – в присутствии возмущения детерминированного профиля скорости звука (1) с амплитудой $\Delta c = 2$ м/с.

представляет собой импульс длительности Δ_t , максимум которого может быть несколько смещен относительно $t = 0$. В случае детерминированного возмущения типа (1), знак которого не изменяется вдоль лучевой траектории, смещение может превышать Δ_t , но эти смещения для разных n мало отличаются друг от друга и основной пик $W(r, t)$ остается относительно узким.

Обобщим определение $W_n(t)$ и $W(t)$, полагая, что фигурирующая в (19) функция $V(z, t)$ представляет поле, регистрируемое антенной на произвольной дистанции r в возмущенном волноводе. При этом функция W , заданная соотношениями (19) и (20), приобретает дополнительный аргумент r . При $r \neq r_a$ функция $U_n(z, t)$ уже не

описывает устойчивую компоненту поля $V(z, t)$. Поэтому естественно ожидать, что функция $W(r, t)$ должна иметь пик, локализованный в окрестностях точки $r = r_a, t = 0$. Такие пики ясно видны на рис. 9, где представлены результаты расчета функции $W(r, t)$ для той же модели излученного сигнала и той же антенны, что и на рис. 8, в невозмущенном волноводе (вверху), а также в волноводах со случайным (в середине) и детерминированным (внизу) возмущением скорости звука δc .

Сравнение (19) и (20) с (14) показывает, что введенная характеристика похожести импульсных полей W по сути дела является аналогом коэффициента похожести K . Отличие заключается лишь в том, что в (20) суммируются амплитуды проекций, а не их квадраты, и сами проекции не нормированы. Выбор оптимального правила суммирования и нормировок проекций представляет отдельную задачу, которая выходит за рамки данной работы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Вслед за [12], мы рассмотрели представление поля на вертикальной приемной антенне в подводном звуковом канале в виде суперпозиции устойчивых компонент. Это описание применено для введения коэффициента похожести (12), количественно характеризующего близость реального звукового поля, измеренного антенной, и поля на антенне, рассчитанного с помощью имеющейся модели среды. В традиционном варианте метода согласованной со средой обработки сигналов для этой цели применяется коэффициент (9). Представленные выше результаты численного моделирования подтверждают вывод работы [12] о том, что переход от (9) к (12) позволяет ослабить требования к точности модели среды. В отличие от [12], в качестве фактора, определяющего расхождение между средой распространения и ее математической моделью, здесь рассмотрено влияние не только слабых флуктуаций δc , но и сильных детерминированных вариаций профиля скорости звука. Кроме того, сопоставление коэффициентов похожести (9) и (12) здесь проведено для трех частот f и трех размеров антенны L . В приведенных результатах численного моделирования влияния случайного и детерминированного возмущений исследованы по отдельности. Общие выводы, сделанные на основе анализа этих данных, подтверждаются данными, полученными для суперпозиции таких возмущений (в работе они не представлены).

Важный вывод, следующий из результатов моделирования, заключается в том, что условие (6), использованное при введении обсуждаемого представления поля, в действительности не явля-

ется необходимым и может быть ослаблено. Допустимый разброс вызванных возмущением приращений фаз лучей $\delta\phi$, формирующих устойчивую компоненту, может достигать значений порядка π .

Новым результатом работы является введение аналогичного (12) коэффициента похожести (20) для импульсных полей в возмущенном и невозмущенном волноводе. Представленные на рис. 9 результаты расчета функций неопределенности подтверждают возможность использования этого коэффициента при решении задачи локализации.

Использование устойчивых компонент поля для решения задачи локализации ранее уже рассматривалось в работах [20, 29]. Однако алгоритм обработки там основан на выделении устойчивых компонент регистрируемого поля, для чего приемная антенна должна быть достаточно длинной и плотно заполненной приемными элементами. В обсуждаемом здесь подходе эти ограничения сняты. Функции $u_n(z)$, представляющие устойчивые компоненты поля, вычисляются на основе теоретического расчета, в котором поле известно во всем поперечном сечении. Даже если размер антенны не превышает масштаба когерентного состояния Δ_z , функции $u_n(z)$ могут быть вычислены путем разложения полного поля $u(z)$ внутри достаточно большого интервала поперечного сечения волновода. Вектор \mathbf{u}_n затем определяется фрагментом функции $u_n(z)$ на апертуре антенны. Более того, данный вектор определен для любых расстояний между элементами. Вопрос о выборе допустимых межэлементных расстояний требует специального исследования. Однако в рамках обсуждаемого подхода он не связан с возможностью выделения устойчивых компонент поля на антенне.

Суммируя сказанное, отметим, что основным итогом работы является подтверждение адекватности обсуждаемой модели поля на приемной вертикальной антенне. Она может стать основой для создания новых алгоритмов, в том числе адаптивных, для антенной обработки гидроакустических сигналов.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИПФ РАН (проекты 0030-2021-0018 и 0030-2021-0006).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Baggeroer A.B., Kuperman W.A., Mikhalevsky P.N.* An overview of matched field methods in ocean acoustics // *J. Ocean. Eng.* 1993. V. 18. № 4. P. 401–424.
2. *Jensen F.B., Kuperman W.A., Porter M.B., Schmidt H.* *Computational Ocean Acoustics.* New York: Springer, 2011.
3. *Etter P.C.* *Underwater acoustic modality and simulation.* Boca Raton: CRC Press, 2018. 638 p.

4. Schmidt H., Baggeroer A.B., Kuperman W.A., Scheer E.K. Environmentally tolerant beamforming for high-resolution matched field processing: Deterministic mismatch // J. Acoust. Soc. Am. 1990. V. 88. № 4. P. 1851–1862.
5. Krolík J.L. Matched-field minimum variance beamforming in a random ocean channel // J. Acoust. Soc. Am. 1992. V. 92. № 3. P. 1408–1419.
6. Byun G., Akins F.H., Gemba K.L., Song H.C., Kuperman W.A. Multiple constraint matched field processing tolerant to array tilt mismatch // J. Acoust. Soc. Am. 2020. V. 147. № 2. P. 1231–1238.
7. Richardson A.M., Nolte L.W. A posteriori probability source localization in an uncertain sound speed, deep ocean environment // J. Acoust. Soc. Am. 1991. V. 89. № 5. P. 2280–2284.
8. Le Gall Y., Dosso S.E., Socheleau F.-X., Bonnel J. Bayesian source localization with uncertain Green's function in an uncertain shallow water ocean // J. Acoust. Soc. Am. 2016. V. 139. № 3. P. 993–1004.
9. Li J., Stoica P. (Editors). Robust adaptive beamforming. Hoboken: John Wiley & Sons, 2006. 422 p.
10. Сазонтов А.Г., Малеханов А.И. Согласованная пространственная обработка сигналов в подводных звуковых каналах (Обзор) // Акуст. журн. 2015. Т. 61. № 2. С. 233–253.
11. Baggeroer A.B. Why did applications of mfp fail, or did we not understand how to apply mfp? // Proceedings of 1st International Conference and Exhibition on Underwater Acoustics. 2013. Corfu Island, Greece: Heraklion. P. 41–49.
12. Virovlyansky A.L. Beamforming and matched field processing in multipath environments using stable components of wave fields // J. Acoust. Soc. Am. 2020. V. 148. № 4. P. 2351–2360.
13. Virovlyansky A.L. Stable components of sound fields in the ocean // J. Acoust. Soc. Am. 2017. V. 141. № 2. P. 1180–1189.
14. Flatte S.M., Dashen R., Munk W.M., Watson K.M., Zakhariassen F. Sound transmission through a fluctuating ocean. London: Cambridge University Press, 1979.
15. Colosi J.A. Sound propagation through the stochastic ocean. New York: Cambridge University Press, 2016. 420 p.
16. Virovlyansky A.L., Makarova Yu.M. On spatial structure of the wave field in a vertical section of a deep water acoustic waveguide // EPL. 2018. V. 123:54004. 54404-p1-54404-p6.
17. Бреховских Л.М., Лысанов Ю.П. Теоретические основы акустики океана. М.: Наука, 2007. 370 с.
18. Virovlyansky A.L., Kazarova A.Yu., Lyubavin L.Ya. Matched field processing in phase space // J. Ocean Eng. 2020. V. 45. № 4. P. 1583–1593.
19. Вировлянский А.Л. Лучевая теория дальнего распространения звука в океане. Нижний Новгород: ИПФ РАН, 2006. 164 с.
20. Makarov D., Prants S., Virovlyansky A., Zaslavsky G. Ray and wave chaos in ocean acoustics. New Jersey: World Scientific, 2010. 389 p.
21. Alonso M.A. Rays and waves // Phase-space optics. Testorf M., Hennely B., Ojeda-Castaneda J. (Editors). New York: McGraw-Hill, 2010. Ch. 8. P. 237–277.
22. Шляйх В.П. Квантовая оптика в фазовом пространстве. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. 760 с.
23. Сударшан Э., Клаудер Дж. Основы квантовой оптики. М.: Мир, 1970. 430 с.
24. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. М.; Наука, 752 с.
25. Рытов С.М., Кравцов Ю.А., Татарский В.И. Введение в статистическую радиофизику. Часть II. Случайные поля. М.: Наука, 1978. 464 с.
26. Munk W., Wunsch C. Ocean acoustic tomography: A scheme for large scale monitoring // Deep-Sea Res., 1979. V. 26. P. 123–161.
27. Артельный П.В., Вировлянский А.Л., Казарова А.Ю., Коротин П.И., Любавин Л.Я., Стуленков А.В. Наблюдение устойчивых компонент звуковых полей в Ладожском озере // Акуст. журн. 2018. Т. 64. № 2. С. 174–185.