АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2022, том 68, № 2, с. 139–151

НЕЛИНЕЙНАЯ АКУСТИКА

УДК 539.3

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ МИКРОПОЛЯРНЫХ УПРУГИХ ГИБКИХ ПЛАСТИН И ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК

А. А. Саркисян[a], *, **, С. О. Саркисян[b], ***

[a] *Ширакский государственный университет, квартал Ани, ул. 13, дом 11, кв. 15, г. Гюмри, 3125 Армения*

[b] *Национальная академия наук Армении, ул. Саят-Новы, дом 2, кв. 11, г. Гюмри, 3101 Армения*

**e-mail: armenuhis@mail.ru*

***e-mail: armenuhis@gmail.com*

****e-mail: s_sargsyan@yahoo.com*

Поступила в редакцию 16.11.2020 г.
После доработки 19.11.2021 г.
Принята к публикации 24.11.2021 г.

Построена математическая модель динамики геометрически нелинейных (гибких) микрополярных упругих тонких пластин в декартовых и криволинейных координатах (подход обобщается также для построения модели микрополярных гибких пологих оболочек). При построении модели считается, что упругие прогибы пластинки сравнимы с их толщиной и, вместе с тем, малы по отношению к характерным размерам в плане. На основе построенной модели микрополярных упругих гибких пластин решены задачи свободных колебаний для прямоугольных и круглых пластин, а также решена задача свободных колебаний пологих оболочек. Обсуждаются эффективные стороны проявления характерных черт микрополярного материала по сравнению с соответствующим классическим материалом.

Ключевые слова: микрополярная теория упругости, прикладная нелинейная динамическая модель, гибкие пластинки и пологие оболочки, нелинейные собственные колебания, характерные черты микрополярного материала

DOI: 10.31857/S0320791922020083

ВВЕДЕНИЕ

Проблема нелинейного динамического деформирования упругих тонкостенных конструкций является одной из фундаментальных в механике деформируемого твердого тела. В классической теории упругости широкую известность получили уравнения квадратичного варианта динамической нелинейной прикладной теории изгиба пластин Фепеля–Кармана [1] и теории изгиба пологих оболочек Маргерра [2]. В рамках этих теорий решены (см., например, [3, 4]) многочисленные задачи нелинейного динамического деформирования упругих тонких пластин и пологих оболочек различных очертаний, под действием различных динамических внешних воздействий и при различных граничных условиях.

В настоящее время актуальна проблема построения и изучения математических прикладных теорий нелинейного динамического деформирования микрополярных упругих тонких пластин и пологих оболочек. Обзор работ по теории микрополярных упругих тонких оболочек и пластин выполнен в работе [5]. Отметим, что теоретические основания динамической микрополярной теории упругости и ее приложения к различным задачам развивались в работах [6–10] и др. Построению общей нелинейной теории микрополярных тонких оболочек посвящена работа [11].

В работах [12–16] на основе метода гипотез, который обосновывается при анализе трехмерной теории с использованием асимптотического метода интегрирования соответствующей граничной задачи [17], построена линейная теория динамики микрополярных упругих оболочек и пластин, и в рамках этой теории изучены различные прикладные задачи на собственные и вынужденные колебания.

В данной работе построена прикладная нелинейная теория динамического изгиба тонких упругих микрополярных пластин и пологих оболочек, которая представляет собой развитие теории Фепеля–Кармана–Маргерра применительно к микрополярной теории упругости.

ТРЕХМЕРНАЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ МИКРОПОЛЯРНЫХ УПРУГИХ ПЛАСТИН С НЕЗАВИСИМЫМИ ПОЛЯМИ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ И ВРАЩЕНИЙ

Рассмотрим прямоугольную тонкую пластинку постоянной толщины $2h$, считая ее трехмерным упругим микрополярным изотропным телом. Отнесем пластинку к системе декартовых координат (x_1, x_2, z). Координатную плоскость x_1, x_2 будем совмещать со срединной плоскостью пластинки. Ось Oz направим вдоль нормали к срединной плоскости. Примем следующие обозначения: (V_1, V_2, V_3) — вектор перемещения; $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ — вектор свободного поворота.

Пусть $M(x_1, x_2, z)$ — произвольная точка пластинки, а $N(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, z + dz)$ — бесконечно близкая к ней соседняя точка пластинки. До деформации можно задать вектор $\mathbf{MN}$, проекции которого равны (dx_1, dx_2, dz). После деформации точка M перемещается в позицию $M^*(\xi, \eta, \zeta)$, а точка N перемещается в позицию $N^*(\xi + d\xi, \eta + d\eta, \zeta + d\zeta)$. Новый вектор $\mathbf{M^*N^*}$ имеет проекции $d\xi, d\eta, d\zeta$. В случае микрополярной теории упругости смещение элемента $d\mathbf{r} = (dx_1, dx_2, dz)$ обусловлено не только вектором перемещений [18]

$$d\xi = \left(1 + \frac{\partial V_1}{\partial x_1}\right)dx_1 + \frac{\partial V_1}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial V_1}{\partial z}dz,$$
$$d\eta = \frac{\partial V_2}{\partial x_1}dx_1 + \left(1 + \frac{\partial V_2}{\partial x_2}\right)dx_2 + \frac{\partial V_2}{\partial z}dz,$$
$$d\zeta = \frac{\partial V_3}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial V_3}{\partial x_2}dx_2 + \left(1 + \frac{\partial V_3}{\partial z}\right)dz,$$

но и вектором свободного поворота по формуле $d\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}$ (поскольку в микрополярной теории можно принять, что дифференциальный элемент $\mathbf{MN}$ при повороте является абсолютно твердым телом). В результате получим:

$$\begin{gathered} d\xi = \left(1 + \frac{\partial V_1}{\partial x_1}\right)dx_1 + \left(\frac{\partial V_1}{\partial x_2} + \omega_3\right)dx_2 + \left(\frac{\partial V_1}{\partial z} - \omega_2\right)dz, \\ d\eta = \left(\frac{\partial V_2}{\partial x_1} - \omega_3\right)dx_1 + \\ + \left(1 + \frac{\partial V_2}{\partial x_2}\right)dx_2 + \left(\frac{\partial V_2}{\partial z} + \omega_1\right)dz, \\ d\zeta = \left(\frac{\partial V_3}{\partial x_1} + \omega_2\right)dx_1 + \\ + \left(\frac{\partial V_3}{\partial x_2} - \omega_1\right)dx_2 + \left(1 + \frac{\partial V_3}{\partial z}\right)dz. \end{gathered} \tag{1}$$

Далее, расстояния между соседними точками до и после деформации равны соответственно:

$$(MN)^2 = ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dz^2, \tag{2}$$

$$(M^*N^*)^2 = ds^{*2} = d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2. \tag{3}$$

На основе соотношений (1)–(3) получим:

$$\begin{gathered} ds^{*2} - ds^2 = \left(1 + \frac{\partial V_1}{\partial x_1}\right)^2 dx_1^2 + \left(\frac{\partial V_1}{\partial x_2} + \omega_3\right)^2 dx_2^2 + \\ + \left(\frac{\partial V_1}{\partial z} - \omega_2\right)^2 dz^2 + 2\left(1 + \frac{\partial V_1}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial V_1}{\partial x_2} + \omega_3\right)dx_1dx_2 + \\ + 2\left(1 + \frac{\partial V_1}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial V_1}{\partial z} - \omega_2\right)dx_1dz + 2\left(\frac{\partial V_1}{\partial x_2} + \omega_3\right)\times \\ \times\left(\frac{\partial V_1}{\partial z} - \omega_2\right)dx_2dz + \left(\frac{\partial V_2}{\partial x_1} - \omega_3\right)^2 dx_1^2 + \\ + \left(1 + \frac{\partial V_2}{\partial x_2}\right)^2 dx_2^2 + \left(\frac{\partial V_2}{\partial z} + \omega_1\right)^2 dz^2 + \\ + 2\left(\frac{\partial V_2}{\partial x_1} - \omega_3\right)\left(1 + \frac{\partial V_2}{\partial x_2}\right)dx_1dx_2 + \\ + 2\left(\frac{\partial V_2}{\partial x_1} - \omega_3\right)\left(\frac{\partial V_2}{\partial z} + \omega_1\right)dx_1dz + \\ + 2\left(1 + \frac{\partial V_2}{\partial x_2}\right)\left(\frac{\partial V_2}{\partial z} + \omega_1\right)dx_2dz + \\ + \left(\frac{\partial V_3}{\partial x_1} + \omega_2\right)^2 dx_1^2 + \left(\frac{\partial V_3}{\partial x_2} - \omega_1\right)^2 dx_2^2 + \\ + \left(1 + \frac{\partial V_3}{\partial z}\right)^2 dz^2 + 2\left(\frac{\partial V_3}{\partial x_1} + \omega_2\right)\times \\ \times\left(\frac{\partial V_3}{\partial x_2} - \omega_1\right)dx_1dx_2 + 2\left(\frac{\partial V_3}{\partial x_1} + \omega_2\right)\times \\ \times\left(1 + \frac{\partial V_3}{\partial z}\right)dx_1dz + 2\left(\frac{\partial V_3}{\partial x_2} - \omega_1\right)\times \\ \times\left(1 + \frac{\partial V_3}{\partial z}\right)dx_2dz - \left(dx_1^2 + dx_2^2 + dz^2\right). \end{gathered} \tag{4}$$

Используя компоненты тензора деформаций $\gamma_{ii}, \gamma_{ij}, \gamma_{33}, \gamma_{i3}, \gamma_{3i}$, разность $ds^{*2} - ds^2$ представим в виде:

$$\begin{gathered} ds^{*2} - ds^2 = 2\gamma_{11}dx_1^2 + 2\gamma_{22}dx_2^2 + 2\gamma_{33}dz^2 + \\ + 2(\gamma_{12} + \gamma_{21})dx_1dx_2 + \\ + 2(\gamma_{13} + \gamma_{31})dx_1dz + 2(\gamma_{23} + \gamma_{32})dx_2dz, \end{gathered} \tag{5}$$

где

$$\gamma_{ii} = \frac{\partial V_i}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\Bigg[\left(\frac{\partial V_1}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial V_2}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial V_3}{\partial x_i}\right)^2 + {}$$
$$+ \omega_3^2 + \omega_j^2 - 2(-1)^j\left(\frac{\partial V_j}{\partial x_i}\omega_3 - \frac{\partial V_3}{\partial x_i}\omega_j\right)\Bigg],$$
$$\gamma_{33} = \frac{\partial V_3}{\partial z} + \frac{1}{2}\Bigg[\left(\frac{\partial V_1}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial V_2}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial V_3}{\partial z}\right)^2 + {}$$
$$+ \omega_1^2 + \omega_2^2 - 2\frac{\partial V_1}{\partial z}\omega_2 + 2\frac{\partial V_2}{\partial z}\omega_1\Bigg],$$
$$\gamma_{ij} = \frac{\partial V_j}{\partial x_i} - (-1)^j\omega_3 + \frac{\partial V_j}{\partial x_i}\frac{\partial V_j}{\partial x_j} - (-1)^j\frac{\partial V_j}{\partial x_j}\omega_3 + {}$$
$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_3}{\partial x_1}\frac{\partial V_3}{\partial x_2} - \frac{\partial V_3}{\partial x_1}\omega_1 + \frac{\partial V_3}{\partial x_2}\omega_2 - \omega_1\omega_2\right), \qquad (6)$$
$$\gamma_{i3} = \frac{\partial V_3}{\partial x_i} + (-1)^j\omega_j + \frac{\partial V_3}{\partial x_i}\frac{\partial V_3}{\partial z} + (-1)^j\frac{\partial V_3}{\partial z}\omega_j + {}$$
$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_j}{\partial x_i}\frac{\partial V_j}{\partial z} + (-1)^j\left(\frac{\partial V_j}{\partial x_i}\omega_i - \frac{\partial V_j}{\partial z}\omega_3\right) - \omega_i\omega_3\right),$$
$$\gamma_{3i} = \frac{\partial V_i}{\partial z} - (-1)^j\omega_j + \frac{\partial V_i}{\partial x_i}\frac{\partial V_i}{\partial z} - {}$$
$$- (-1)^j\frac{\partial V_i}{\partial x_i}\omega_j + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_j}{\partial x_i}\frac{\partial V_j}{\partial z} + {}\right.$$
$$\left. + (-1)^j\left(\frac{\partial V_j}{\partial x_i}\omega_i - \frac{\partial V_j}{\partial z}\omega_3\right) - \omega_i\omega_3\right).$$

Аналогично можно получить компоненты тензора изгиба-кручения: $\chi_{ii}, \chi_{ij}, \chi_{33}, \chi_{i3}, \chi_{3i}$:

$$\chi_{ii} = \frac{\partial\omega_i}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\omega_1}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega_2}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega_3}{\partial x_i}\right)^2\right],$$
$$\chi_{33} = \frac{\partial\omega_3}{\partial z} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\omega_1}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega_2}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega_3}{\partial z}\right)^2\right],$$
$$\chi_{ij} = \frac{\partial\omega_j}{\partial x_i} + \frac{\partial\omega_j}{\partial x_i}\frac{\partial\omega_j}{\partial x_j} + \frac{1}{2}\frac{\partial\omega_3}{\partial x_i}\frac{\partial\omega_3}{\partial x_j}, \qquad (7)$$
$$\chi_{i3} = \frac{\partial\omega_3}{\partial x_i} + \frac{\partial\omega_3}{\partial x_i}\frac{\partial\omega_3}{\partial z} + \frac{1}{2}\frac{\partial\omega_j}{\partial x_i}\frac{\partial\omega_j}{\partial z},$$
$$\chi_{3i} = \frac{\partial\omega_i}{\partial z} + \frac{\partial\omega_i}{\partial x_i}\frac{\partial\omega_i}{\partial z} + \frac{1}{2}\frac{\partial\omega_j}{\partial x_i}\frac{\partial\omega_j}{\partial z}.$$

Выражения (6) и (7) определяют трехмерную геометрическую модель микрополярной гибкой пластинки в декартовых координатах.

Теперь обобщим эту геометрическую модель в ортогональных криволинейных координатах α_1, α_2, z (где криволинейные оси α_1, α_2 расположены в срединной плоскости пластинки, а прямолинейная ось z перпендикулярна к этой плоскости), а также приведем уравнения движения и соотношения упругости микрополярного материала (с независимыми полями перемещений и вращений).

Уравнения движения имеют вид [6]:

$$\frac{1}{H_i}\frac{\partial\sigma_{ii}}{\partial\alpha_i} + \frac{1}{H_iH_j}\frac{\partial H_j}{\partial\alpha_i}(\sigma_{ii} - \sigma_{jj}) + \frac{1}{H_j}\frac{\partial\sigma_{ji}}{\partial\alpha_j} + {}$$
$$+ \frac{1}{H_iH_j}\frac{\partial H_i}{\partial\alpha_j}(\sigma_{ji} + \sigma_{ij}) + \frac{\partial\sigma_{3i}}{\partial z} = \rho\frac{\partial^2 V_1}{\partial t^2},$$
$$\frac{1}{H_1}\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial\alpha_1} + \frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_1}\sigma_{13} + \frac{1}{H_2}\frac{\partial\sigma_{23}}{\partial\alpha_2} + {}$$
$$+ \frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}\sigma_{23} + \frac{\partial\sigma_{33}}{\partial z} + \frac{H_2}{H_1}\frac{\partial^2 V_3}{\partial\alpha_1^2}\sigma_{11} + {}$$
$$+ \frac{H_1}{H_2}\frac{\partial^2 V_3}{\partial\alpha_2^2}\sigma_{22} + \frac{\partial^2 V_3}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2}(\sigma_{12} + \sigma_{21}) + {}$$
$$+ \frac{\partial V_3}{\partial\alpha_1}\Bigg[\frac{H_2}{H_1}\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial\alpha_1} - \frac{H_2}{H_1^2}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_1}\sigma_{11} + {}$$
$$+ \frac{1}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_1}\sigma_{11} + \frac{1}{2}\frac{\partial(\sigma_{12} + \sigma_{21})}{\partial\alpha_2}\Bigg] + {} \qquad (8)$$
$$+ \frac{\partial V_3}{\partial\alpha_2}\Bigg[\frac{H_1}{H_2}\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial\alpha_2} - \frac{H_1}{H_2^2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_2}\sigma_{22} + {}$$
$$+ \frac{1}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}\sigma_{22} + \frac{1}{2}\frac{\partial(\sigma_{12} + \sigma_{21})}{\partial\alpha_1}\Bigg] = \rho\frac{\partial^2 V_3}{\partial t^2},$$
$$\frac{1}{H_i}\frac{\partial\mu_{ii}}{\partial\alpha_i} + \frac{1}{H_iH_j}\frac{\partial H_j}{\partial\alpha_i}(\mu_{ii} - \mu_{jj}) + \frac{1}{H_j}\frac{\partial\mu_{ji}}{\partial\alpha_j} + {}$$
$$+ \frac{1}{H_iH_j}\frac{\partial H_i}{\partial\alpha_j}(\mu_{ji} + \mu_{ij}) + \frac{\partial\mu_{3i}}{\partial z} + {}$$
$$+ (-1)^j(\sigma_{j3} - \sigma_{3j}) = J\frac{\partial^2\omega_i}{\partial t^2}$$
$$\frac{1}{H_1}\frac{\partial\mu_{13}}{\partial\alpha_1} + \frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_1}\mu_{13} + \frac{1}{H_2}\frac{\partial\mu_{23}}{\partial\alpha_2} + {}$$
$$+ \frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}\mu_{23} + \sigma_{12} - \sigma_{21} = J\frac{\partial^2\omega_3}{\partial t^2}.$$

Аналогично теории Фепеля–Кармана здесь уравнения движения написаны для деформированного состояния пластин.

Физические соотношения теории упругости

$$\gamma_{ii} = \frac{1}{E}[\sigma_{ii} - \nu(\sigma_{jj} + \sigma_{33})],$$
$$\gamma_{33} = \frac{1}{E}[\sigma_{33} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})],$$
$$\gamma_{ij} = \frac{\mu + \alpha}{4\mu\alpha}\sigma_{ij} - \frac{\mu - \alpha}{4\mu\alpha}\sigma_{ji},$$
$$\gamma_{i3} = \frac{\mu + \alpha}{4\mu\alpha}\sigma_{i3} - \frac{\mu - \alpha}{4\mu\alpha}\sigma_{3i},$$

$$\gamma_{3i} = \frac{\mu+\alpha}{4\mu\alpha}\sigma_{3i} - \frac{\mu-\alpha}{4\mu\alpha}\sigma_{i3}, \qquad (9)$$

$$\chi_{ii} = \frac{\beta+\gamma}{\gamma(3\beta+2\gamma)}\left[\mu_{ii} - \frac{\beta}{2(\beta+\gamma)}(\mu_{jj}+\mu_{33})\right],$$
$$\chi_{33} = \frac{\beta+\gamma}{\gamma(3\beta+2\gamma)}\left[\mu_{33} - \frac{\beta}{2(\beta+\gamma)}(\mu_{11}+\mu_{22})\right],$$
$$\chi_{ij} = \frac{\gamma+\varepsilon}{4\gamma\varepsilon}\mu_{ij} - \frac{\gamma-\varepsilon}{4\gamma\varepsilon}\mu_{ji},$$
$$\chi_{i3} = \frac{\gamma+\varepsilon}{4\gamma\varepsilon}\mu_{i3} - \frac{\gamma-\varepsilon}{4\gamma\varepsilon}\mu_{3i},$$
$$\chi_{3i} = \frac{\gamma+\varepsilon}{4\gamma\varepsilon}\mu_{3i} - \frac{\gamma-\varepsilon}{4\gamma\varepsilon}\mu_{i3}.$$

Отметим, что физические соотношения (9) представлены в виде линейных зависимостей.

Геометрические соотношения имеют следующий вид:

$$\gamma_{ii} = \frac{1}{H_i}\frac{\partial V_i}{\partial\alpha_i} + \frac{1}{H_iH_j}\frac{\partial H_i}{\partial\alpha_j}V_j + \frac{1}{2H_i^2}\left[\left(\frac{\partial V_1}{\partial\alpha_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial V_2}{\partial\alpha_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial V_3}{\partial\alpha_i}\right)^2\right] + \frac{1}{2}\left[\omega_3^2 + \omega_j^2 - 2(-1)^j\frac{1}{H_i}\left(\frac{\partial V_j}{\partial\alpha_i}\omega_3 - \frac{\partial V_3}{\partial\alpha_i}\omega_j\right)\right],$$

$$\gamma_{33} = \frac{\partial V_3}{\partial z} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial V_1}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial V_2}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial V_3}{\partial z}\right)^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2 - 2\frac{\partial V_1}{\partial z}\omega_2 + 2\frac{\partial V_2}{\partial z}\omega_1\right],$$

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{H_i}\frac{\partial V_j}{\partial\alpha_i} - \frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_i}{\partial\alpha_j}V_i - (-1)^j\omega_3 + \frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial V_j}{\partial\alpha_1}\frac{\partial V_j}{\partial\alpha_2} - (-1)^j\frac{1}{H_j}\frac{\partial V_j}{\partial\alpha_j}\omega_3 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial V_3}{\partial\alpha_1}\frac{\partial V_3}{\partial\alpha_2} - \frac{1}{H_1}\frac{\partial V_3}{\partial\alpha_1}\omega_1 + \frac{1}{H_2}\frac{\partial V_3}{\partial\alpha_2}\omega_2 - \omega_1\omega_2\right),$$

$$\gamma_{i3} = \frac{1}{H_i}\frac{\partial V_3}{\partial\alpha_i} + (-1)^j\omega_j + \frac{\partial V_3}{\partial x_i}\frac{\partial V_3}{\partial z} + (-1)^j\frac{\partial V_3}{\partial z}\omega_j + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_j}{\partial x_i}\frac{\partial V_j}{\partial z} + (-1)^j\frac{\partial V_2}{\partial\alpha_i}\omega_i - (-1)^j\frac{\partial V_j}{\partial z}\omega_3 - \omega_i\omega_3\right), \qquad (10)$$

$$\gamma_{3i} = \frac{\partial V_i}{\partial z} - (-1)^j\omega_j + \frac{1}{H_i}\frac{\partial V_i}{\partial\alpha_i}\frac{\partial V_i}{\partial z} - (-1)^j\frac{1}{H_i}\frac{\partial V_i}{\partial\alpha_i}\omega_j + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_j}{\partial x_i}\frac{\partial V_j}{\partial z} + (-1)^j\frac{\partial V_2}{\partial\alpha_i}\omega_i - (-1)^j\frac{\partial V_j}{\partial z}\omega_3 - \omega_i\omega_3\right),$$

$$\chi_{ii} = \frac{1}{H_i}\frac{\partial\omega_i}{\partial\alpha_i} + \frac{1}{H_iH_j}\frac{\partial H_i}{\partial\alpha_j}\omega_j + \frac{1}{2H_i^2}\times\left[\left(\frac{\partial\omega_1}{\partial\alpha_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega_2}{\partial\alpha_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega_3}{\partial\alpha_i}\right)^2\right],$$

$$\chi_{33} = \frac{\partial\omega_3}{\partial z} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\omega_1}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega_2}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega_3}{\partial z}\right)^2\right],$$

$$\chi_{ij} = \frac{1}{H_i}\frac{\partial\omega_2}{\partial\alpha_i} - \frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_i}{\partial\alpha_j}\omega_i + \frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial\omega_j}{\partial\alpha_1}\frac{\partial\omega_j}{\partial\alpha_2} + \frac{1}{2}\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial\omega_3}{\partial\alpha_1}\frac{\partial\omega_3}{\partial\alpha_2},$$

$$\chi_{i3} = \frac{1}{H_i}\frac{\partial\omega_3}{\partial\alpha_i} + \frac{1}{H_i}\frac{\partial\omega_3}{\partial\alpha_i}\frac{\partial\omega_3}{\partial z} + \frac{1}{2H_i}\frac{\partial\omega_j}{\partial x_i}\frac{\partial\omega_j}{\partial z},$$

$$\chi_{3i} = \frac{\partial\omega_i}{\partial z} + \frac{1}{H_i}\frac{\partial\omega_i}{\partial\alpha_i}\frac{\partial\omega_i}{\partial z} + \frac{1}{2H_i}\frac{\partial\omega_j}{\partial x_i}\frac{\partial\omega_j}{\partial z}.$$

Здесь $\sigma_{ii},\sigma_{ij},\sigma_{33},\sigma_{i3},\sigma_{3i},\mu_{ii},\mu_{ij},\mu_{33},\mu_{i3},\mu_{3i}$ – компоненты силового и моментного тензоров напряжений; $E,\nu,\ \mu = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$, $\alpha,\beta,\gamma,\varepsilon$ – физические константы микрополярного материала пластинки, ρ – плотность материала, J – момент инерции при повороте, $i,j=1,2;\ i\neq j$.

Из геометрических соотношений (10) можно, в частности, получить приведенные выше соотношения (6) и (7) в декартовых координатах, если принять $H_1 = H_2 = 1$.

Для граничных условий на лицевых поверхностях пластинки примем граничные условия первой граничной задачи микрополярной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений:

$$\sigma_{3n} = p_n^{\pm},\ \ \mu_{3n} = m_n^{\pm} \quad \text{при} \quad z = \pm h\,,\ \ n = 1,2,3, \qquad (11)$$

где $p_n^{\pm}$, $m_n^{\pm}$ – компоненты заданных внешних усилий и моментов на лицевых поверхностях пластинки.

Граничные условия на боковой поверхности пластинки $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$, в зависимости от способа приложения внешней нагрузки или закрепления, запишутся либо в силовых и моментных напряжениях, либо в перемещениях и поворотах, либо в смешанном виде:

$$\begin{gathered}\sigma_{mn}n_m = p_n^*, \;\; \mu_{mn}n_m = m_n^* \;\; \text{на} \;\; \Sigma_1; \\ V_n = V_n^{\bullet}, \;\; \omega_n = \omega_n^{\bullet} \;\; \text{на} \;\; \Sigma_2, \;\; m,n = 1,2,3,\end{gathered} \tag{12}$$

где p_n^*, m_n^* – компоненты заданных внешних усилий и моментов на Σ_1; $V_n^{\bullet}$, $\omega_n^{\bullet}$ – заданные компоненты векторов перемещений и независимого поворота на Σ_2.

При помощи начальных условий при $t = 0$ задаются значения компонентов векторов перемещения, независимого поворота, линейной и вращательной скоростей точек тела, т.е. V_n, ω_n, $\dfrac{\partial V_n}{\partial t}$, $\dfrac{\partial \omega_n}{\partial t}$.

Отметим, что, обобщая вышеприведенный подход, аналогично могут быть получены основные уравнения геометрически нелинейной трехмерной теории микрополярных упругих пологих оболочек с независимыми полями перемещений и вращений.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНАЯ ПРИКЛАДНАЯ МОДЕЛЬ МИКРОПОЛЯРНЫХ УПРУГИХ ПЛАСТИН ПРИ БОЛЬШИХ ПРОГИБАХ

Для приведения геометрически нелинейной трехмерной задачи микрополярной теории упругости к двумерной, будем основывать предлагаемую теорию микрополярных упругих тонких гибких пластин на следующих положениях: 1) основные гипотезы прикладной линейной теории тонких пластин (работы [12–17]); 2) предположения нелинейной классической теории гибких пластин Кармана [1]). Далее эти положения расписаны более подробно.

1. Нормальный элемент, первоначально перпендикулярный к срединной плоскости пластинки, остается после деформации прямолинейным, свободно поворачивается на некоторый угол, не изменяя при этом своей длины. При этом, тангенциальные компоненты вектора свободного поворота – постоянные функции по толщине пластинки, а нормальная компонента – линейная функция.

Вследствие этого имеем следующий закон изменения перемещений и свободных поворотов по толщине пластинки:

$$\begin{gathered}V_i = u_i(\alpha_1,\alpha_2,t) + z\psi_i(\alpha_1,\alpha_2,t), \\ \omega_i = \Omega_i(\alpha_1,\alpha_2,t), \;\; (i = 1,2),\end{gathered} \tag{13}$$

$$V_3 = w(\alpha_1,\alpha_2,t), \;\; \omega_3 = \Omega_3(\alpha_1,\alpha_2,t) + z\iota(\alpha_1,\alpha_2,t), \tag{14}$$

где u_1, u_2 – перемещения точек срединной плоскости пластинки вдоль координатных осей α_1, α_2; w – перемещение точек срединной плоскости в направлении оси z (т.е. прогиб пластинки); ψ_1, ψ_2 – полные углы поворота, а $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ – свободные повороты первоначально нормального элемента вокруг линий α_1, α_2, z; ι – интенсивность свободного поворота вдоль оси z.

2. Будем считать, что пластинка получает большие прогибы w, и в то же время будем считать перемещения u_1, u_2 в срединной плоскости пластинки величинами малыми. Такое же допущение сделаем по отношению к производным $\dfrac{\partial u_1}{\partial \alpha_1}$, $\dfrac{\partial u_2}{\partial \alpha_1}$, $\dfrac{\partial u_1}{\partial \alpha_2}$, $\dfrac{\partial u_2}{\partial \alpha_2}$, считая их малыми по сравнению с величинами $\dfrac{\partial w}{\partial \alpha_1}$, $\dfrac{\partial w}{\partial \alpha_2}$. Будем также считать, что квадраты производных $\dfrac{\partial w}{\partial \alpha_1}$, $\dfrac{\partial w}{\partial \alpha_2}$ имеют тот же порядок малости, что и первая степень производных от перемещений u_1, u_2 по α_1 и α_2.

Предположим также, что малы как углы поворота нормалей к срединной плоскости до деформации, так и их свободные повороты, а также в тензоре деформации учитываются нелинейные слагаемые в градиентах перемещения.

3. В физических соотношениях для γ_{11} и γ_{22} можно пренебрегать силовым напряжением σ_{33} по сравнению с силовыми напряжениями σ_{ii}.

4. При определении деформаций, изгибов-кручений, силовых и моментных напряжений, для силовых напряжений σ_{3i} и моментного напряжения μ_{33} сначала примем:

$$\sigma_{3i} = \overset{0}{\sigma}_{3i}(\alpha_1,\alpha_2,t), \;\; \mu_{33} = \overset{0}{\mu}_{33}(\alpha_1,\alpha_2,t). \tag{15}$$

После определения указанных выше величин, значения (15) для σ_{3i} и μ_{33} уточняем, прибавляя к (15) результаты интегрирования по z уравнений движения для σ_{3i} и μ_{33}, с условием, чтобы их усредненные по толщине пластинки величины были равны нулю.

Легко показать, что компоненты тензоров деформации и изгиба-кручения будут выражаться формулами:

$$\begin{gathered}\gamma_{ii} = \Gamma_{ii} + zK_{ii}, \;\; \gamma_{ij} = \Gamma_{ij} + zK_{ij}, \\ \gamma_{i3} = \Gamma_{i3}, \;\; \gamma_{3i} = \Gamma_{3i}, \;\; \chi_{ii} = \kappa_{ii}, \\ \chi_{33} = \iota, \;\; \chi_{ij} = \kappa_{ij}, \;\; \chi_{i3} = \kappa_{i3} + zl_{i3}.\end{gathered} \tag{16}$$

Здесь Γ_{ii} — деформации удлинений в направлениях x_1, x_2; $\Gamma_{ij}, \Gamma_{i3}, \Gamma_{3i}$ — деформации сдвигов в соответствующих плоскостях; K_{ii} — изгибы срединной плоскости, обусловленные силовыми напряжениями; K_{ij} — кручения срединной плоскости, обусловленные силовыми напряжениями; κ_{ii}, κ_{33} — изгибы срединной плоскости, обусловленные моментными напряжениями; κ_{ij} — кручения срединной плоскости, обусловленные моментными напряжениями; l_{i3} — гиперсдвиги срединной плоскости, обусловленные моментными напряжениями.

Как обычно принято в прикладных теориях тонких пластин, вместо компонент тензоров силовых и моментных напряжений вводим статически эквивалентные им интегральные характеристики: усилия $(T_{ii}, S_{ij}, N_{i3}, N_{3i})$, моменты $(M_{ii}, H_{ij}, L_{ii}, L_{ij}, L_{i3}, L_{33})$ и гипермоменты (Λ_{i3}) [12–17]:

$$\begin{gathered}
T_{ii} = \int_{-h}^{h} \sigma_{ii} dz, \quad S_{ij} = \int_{-h}^{h} \sigma_{ij} dz, \\
N_{i3} = \int_{-h}^{h} \sigma_{i3} dz \ \ (i \leftrightarrow 3), \quad M_{ii} = \int_{-h}^{h} \sigma_{ii} z dz, \\
M_{ij} = \int_{-h}^{h} \sigma_{ij} z dz, \ \ L_{mn} = \int_{-h}^{h} \mu_{mn} dz, \\
(m,n = 1,2,3), \quad \Lambda_{i3} = \int_{-h}^{h} z \mu_{i3} dz.
\end{gathered} \tag{17}$$

Основные уравнения динамики геометрически нелинейных микрополярных упругих тонких пластин со свободным вращением в криволинейных координатах срединной плоскости ($H_i = A_i$ для тонких пластин) с учетом всех перечисленных выше предположений о вращательно-сдвиговых деформациях, составляют приведенную ниже систему.

Уравнения движения:

$$\begin{gathered}
\frac{1}{A_i}\frac{\partial T_{ii}}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j}\frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i}(T_{ii} - T_{jj}) + \frac{1}{A_j}\frac{\partial S_{ji}}{\partial \alpha_j} + \\
+ \frac{1}{A_i A_j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}(S_{ji} + S_{ij}) = 2\rho h \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - (p_i^+ - p_i^-), \\
\frac{1}{A_i}\frac{\partial M_{ii}}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j}\frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i}(M_{ii} - M_{jj}) + \frac{1}{A_j}\frac{\partial M_{ji}}{\partial \alpha_j} + \\
+ \frac{1}{A_i A_j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}(M_{ji} + M_{ij}) - N_{3i} = \\
= \frac{2\rho h^3}{3}\frac{\partial^2 \psi_i}{\partial t^2} - h(p_i^+ + p_i^-), \\
\frac{1}{A_1 A_2}\left\{\left[\frac{\partial (A_2 N_{13})}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial (A_1 N_{23})}{\partial \alpha_2}\right] + \frac{A_2}{A_1}\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1^2} T_{11} + \right. \\
+ \frac{A_1}{A_2}\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_2^2} T_{22} + \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2}(S_{12} + S_{21}) + \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} \times \\
\times \left[\frac{A_2}{A_1}\frac{\partial T_{11}}{\partial \alpha_1} - \frac{A_2}{A_1^2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_1} T_{11} + \frac{1}{A_1}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} T_{11} + \frac{1}{2}\frac{\partial (S_{12} + S_{21})}{\partial \alpha_2}\right] + \\
+ \frac{\partial w}{\partial \alpha_2}\left[\frac{A_1}{A_2}\frac{\partial T_{22}}{\partial \alpha_2} - \frac{A_1}{A_2^2}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_2} T_{22} + \right. \\
\left.\left. + \frac{1}{A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} T_{22} + \frac{1}{2}\frac{\partial (S_{12} + S_{21})}{\partial \alpha_1}\right]\right\} = \\
= 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - (p_3^+ - p_3^-), \\
\frac{1}{A_i}\frac{\partial L_{ii}}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j}\frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i}(L_{ii} - L_{jj}) + \frac{1}{A_j}\frac{\partial L_{ji}}{\partial \alpha_j} + \\
+ \frac{1}{A_i A_j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}(L_{ji} + L_{ij}) + (-1)^j (N_{j3} - N_{3j}) = \\
= 2Jh \frac{\partial^2 \Omega_i}{\partial t^2} - (m_i^+ - m_i^-), \\
\frac{1}{A_1 A_2}\left[\frac{\partial (A_2 L_{13})}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial (A_1 L_{23})}{\partial \alpha_2}\right] + (S_{12} - S_{21}) = \\
= 2Jh \frac{\partial^2 \Omega_3}{\partial t^2} - (m_3^+ - m_3^-), \\
\frac{1}{A_1 A_2}\left[\frac{\partial (A_2 \Lambda_{13})}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial (A_1 \Lambda_{23})}{\partial \alpha_2}\right] + (M_{12} - M_{21}) - L_{33} = \\
= \frac{2Jh^3}{3}\frac{\partial^2 \iota}{\partial t^2} - h(m_3^+ + m_3^-).
\end{gathered} \tag{18}$$

Физические соотношения теории упругости:

$$\begin{gathered}
T_{ii} = \frac{2Eh}{1 - v^2}[\Gamma_{ii} + v\Gamma_{jj}], \quad M_{ii} = \frac{2Eh^3}{3(1 - v^2)}[K_{ii} + vK_{jj}], \\
M_{ij} = \frac{2h^3}{3}[(\mu + \alpha)K_{ij} + (\mu - \alpha)K_{ji}], \\
S_{ij} = 2h[(\mu + \alpha)\Gamma_{ij} + (\mu - \alpha)\Gamma_{ji}], \\
N_{i3} = 2h[(\mu + \alpha)\Gamma_{i3} + (\mu - \alpha)\Gamma_{3i}], \\
N_{3i} = 2h[(\mu + \alpha)\Gamma_{3i} + (\mu - \alpha)\Gamma_{i3}], \\
L_{ii} = 2h[(\beta + 2\gamma)\kappa_{ii} + \beta(\kappa_{jj} + \iota)], \\
L_{33} = 2h[(\beta + 2\gamma)\iota + \beta(\kappa_{11} + \kappa_{22})], \\
L_{ij} = 2h[(\gamma + \varepsilon)\kappa_{ij} + (\gamma - \varepsilon)\kappa_{ji}], \\
L_{i3} = 2h\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon}\kappa_{i3}, \quad \Lambda_{i3} = \frac{2h^3}{3}\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon} l_{i3}.
\end{gathered} \tag{19}$$

Геометрические соотношения:

$$\Gamma_{ii}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial u_i}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}u_j+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{A_i}\frac{\partial w}{\partial\alpha_i}\right)^2,$$
$$\Gamma_{ij}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial u_j}{\partial\alpha_i}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}u_i-(-1)^j\Omega_3+$$
$$+\frac{1}{2}\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial w}{\partial\alpha_1}\frac{\partial w}{\partial\alpha_2},$$

$$\Gamma_{i3}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial w}{\partial\alpha_i}+(-1)^j\Omega_j,\quad \Gamma_{3i}=\psi_i-(-1)^j\Omega_j,$$
$$K_{ii}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\psi_i}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\psi_j, \tag{20}$$

$$K_{ij}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\psi_j}{\partial\alpha_i}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\psi_i-(-1)^j\iota,$$
$$\kappa_{ii}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\Omega_i}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\Omega_j,\quad \kappa_{33}=\iota.$$
$$\kappa_{ij}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\Omega_j}{\partial\alpha_i}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\Omega_i.$$

Граничные условия, например, шарнирного опирания выражаются так:

$$T_{ii}=0,\quad u_j=0,\quad M_{ii}=0,\quad \psi_j=0,$$
$$w=0,\quad L_{ij}=0,\quad \Omega_i=0, \tag{21}$$
$$\Lambda_{i3}=0,\quad \text{при}\quad x_i=0;a.$$

К системе основных уравнений динамики микрополярных пластин со свободным вращением (18)–(20) и граничным условиям (21) необходимо присоединить также соответствующие начальные условия для $w,\partial w/\partial t$, $\psi_i,\partial\psi_i/\partial t$, $\Omega_i,\partial\Omega_i/\partial t$, $\iota,\partial\iota/\partial t$.

Отметим, что аналогичный подход применен также для построения геометрически нелинейной прикладной модели микрополярных упругих тонких пологих оболочек.

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ МИКРОПОЛЯРНЫХ УПРУГИХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН ПРИ БОЛЬШИХ ПРОГИБАХ

В случае прямоугольной пластинки в основных уравнениях примем $A_1=A_2=1$. Далее будем пренебрегать всеми инерционными членами в уравнениях движения, кроме $2\rho h\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}$.

Решение граничной задачи (18)–(21) при изучении собственных колебаний представим в виде:

$$w(x_1,x_2,t)=w(t)\sin\frac{\pi x_1}{a}\cos\frac{\pi x_2}{b},$$
$$u_1(x_1,x_2,t)=u_1(t)\cos\frac{\pi x_1}{a}\sin\frac{\pi x_2}{b},$$
$$u_2(x_1,x_2,t)=u_2(t)\sin\frac{\pi x_1}{a}\cos\frac{\pi x_2}{b},$$

$$\psi_1(x_1,x_2,t)=\psi_1(t)\cos\frac{\pi x_1}{a}\sin\frac{\pi x_2}{b},$$
$$\psi_2(x_1,x_2,t)=\psi_2(t)\sin\frac{\pi x_1}{a}\cos\frac{\pi x_2}{b}, \tag{22}$$
$$\Omega_1(x_1,x_2,t)=\Omega_1(t)\sin\frac{\pi x_1}{a}\cos\frac{\pi x_2}{b},$$

$$\Omega_2(x_1,x_2,t)=\Omega_2(t)\cos\frac{\pi x_1}{a}\sin\frac{\pi x_2}{b},$$
$$\Omega_3(x_1,x_2,t)=\Omega_3(t)\cos\frac{\pi x_1}{a}\cos\frac{\pi x_2}{b},$$
$$\iota(x_1,x_2,t)=\iota(t)\cos\frac{\pi x_1}{a}\cos\frac{\pi x_2}{b}.$$

Решение (22) удовлетворяет граничным условиям (21). Подставим эти представления в геометрические соотношения (20). Подставляя далее получившиеся выражения для деформаций и изгибов-кручений в физические соотношения (19), найдем выражения для усилий, моментов и гипермоментов. Применяя метод Галеркина для систем уравнений движения (18), получим:

$$\int_0^a\int_0^b\left(\frac{\partial T_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial S_{21}}{\partial x_2}\right)\cos\frac{\pi x_1}{a}\sin\frac{\pi x_2}{b}dx_1dx_2=0,$$
$$\int_0^a\int_0^b\left(\frac{\partial T_{22}}{\partial x_2}+\frac{\partial S_{12}}{\partial x_1}\right)\sin\frac{\pi x_1}{a}\cos\frac{\pi x_2}{b}dx_1dx_2=0,$$
$$\int_0^a\int_0^b\left(\frac{\partial N_{13}}{\partial x_1}+\frac{\partial N_{23}}{\partial x_2}+\frac{\partial}{\partial x_1}\left[T_{11}\frac{\partial w}{\partial x_1}+\frac{S_{12}+S_{21}}{2}\frac{\partial w}{\partial x_2}\right]+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial x_2}\left[\frac{S_{12}+S_{21}}{2}\frac{\partial w}{\partial x_1}+T_{22}\frac{\partial w}{\partial x_2}\right]-2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right)\times$$
$$\times\sin\frac{\pi x_1}{a}\sin\frac{\pi x_2}{b}dx_1dx_2=0,$$

$$\begin{gathered}
\int_0^a\int_0^b\left(N_{31}-\left(\frac{\partial M_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial M_{21}}{\partial x_2}\right)\right)\times\\
\times\cos\frac{\pi x_1}{a}\sin\frac{\pi x_2}{b}dx_1dx_2=0,\\
\int_0^a\int_0^b\left(N_{32}-\left(\frac{\partial M_{22}}{\partial x_2}+\frac{\partial M_{12}}{\partial x_1}\right)\right)\times\\
\times\sin\frac{\pi x_1}{a}\cos\frac{\pi x_2}{b}dx_1dx_2=0,\\
\int_0^a\int_0^b\left(\frac{\partial L_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial L_{21}}{\partial x_2}+(N_{23}-N_{32})\right)\times\\
\times\sin\frac{\pi x_1}{a}\cos\frac{\pi x_2}{b}dx_1dx_2=0,\\
\int_0^a\int_0^b\left(\frac{\partial L_{22}}{\partial x_2}+\frac{\partial L_{12}}{\partial x_1}-(N_{13}-N_{31})\right)\times\\
\times\cos\frac{\pi x_1}{a}\sin\frac{\pi x_2}{b}dx_1dx_2=0,\\
\int_0^a\int_0^b\left(\frac{\partial L_{13}}{\partial x_1}+\frac{\partial L_{23}}{\partial x_2}+(S_{12}-S_{21})\right)\times\\
\times\cos\frac{\pi x_1}{a}\cos\frac{\pi x_2}{b}dx_1dx_2=0,\\
\int_0^a\int_0^b\left(L_{33}-\left(\frac{\partial \Lambda_{13}}{\partial x_1}+\frac{\partial \Lambda_{23}}{\partial x_2}\right)-(M_{12}-M_{21})\right)\times\\
\times\cos\frac{\pi x_1}{a}\cos\frac{\pi x_2}{b}dx_1dx_2=0.
\end{gathered}\tag{23}$$

Выполним интегрирование и представим функции $w(t), u_1(t), u_2(t), \psi_1(t), \psi_2(t), \Omega_1(t), \Omega_2(t), \Omega_3(t), \iota(t)$ в виде:

$$\begin{gathered}
w(t)=W\cos(pt),\quad u_i(t)=U_i\cos(pt),\\
\psi_i(t)=\Psi_i\cos(pt),\quad \Omega_i(t)=O_i\cos(pt),\\
\Omega_3(t)=O_3\cos(pt),\quad \iota(t)=I\cos(pt).
\end{gathered}\tag{24}$$

Подставим эти функции в полученные уравнения, умножим их на $\cos(pt)$ и проинтегрируем по t от 0 до $\frac{\pi}{2p}$. В результате получим систему алгебраических уравнений относительно коэффициентов $W, U_1, U_2, \Psi_1, \Psi_2, O_1, O_2, O_3, I$. Из этой системы можно получить зависимость $W-p$.

Эта задача решена также в рамках соответствующей линейной модели микрополярных упругих тонких пластин. Введем безразмерный прогиб $A=W/h$, а также величину $\eta=p/p_0$ — отношение величины p к соответствующей частоте линейных колебаний p_0.

Численные расчеты выполнены для квадратной пластинки с размерами $b=a=0.005$ м; относительная толщина принята равной $\delta=\frac{h}{a}=\frac{1}{100}$. Для физических постоянных приняты значения [19] $\alpha=0.115\times10^9$ Па, $\mu=1.033\times10^9$ Па, $\lambda=2.1951\times10^9$ Па, $\gamma=4.1$ Н, $\varepsilon=0.13$ Н, $\beta=-2.34$ Н, $\rho=590$ кг/м^3, $J=5.31\times10^{-6}$ кг/м. На рис. 1 приведена зависимость (η, A), эта линия называется скелетной кривой, которая отражает основные свойства деформируемой системы [3]. Кривая (η, A) представляет линию жесткого типа, т.е. с увеличением амплитуды частота возрастает. При весьма малых амплитудах имеем $\eta\to1$. С увеличением амплитуды частота колебаний возрастает, и притом все более и более резко.

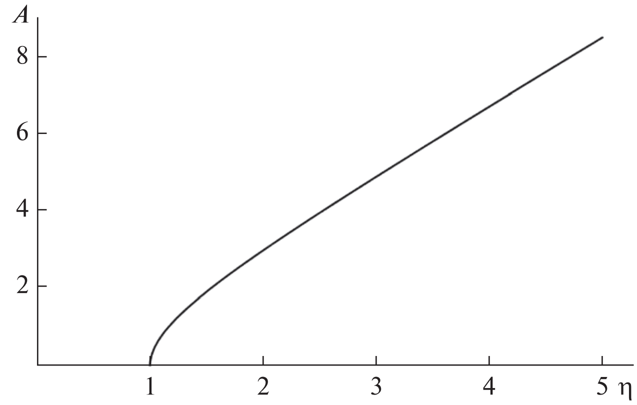

Рис. 1. Зависимость безразмерного прогиба прямоугольной пластинки A от величины η.

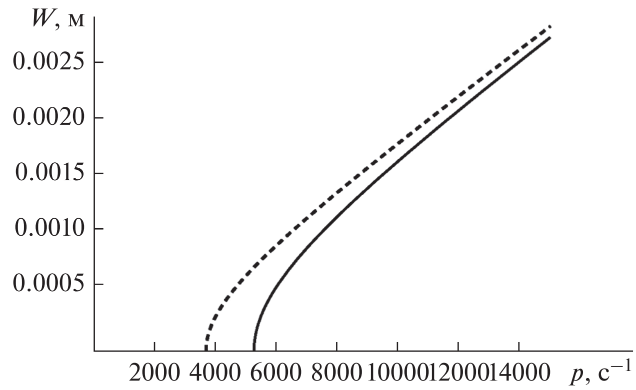

Рис. 2. Сравнение микрополярной и классической моделей.

На рис. 2 приведена зависимость прогиба прямоугольной пластинки W от частоты p. Пунктирная линия соответствует классической модели, а непрерывная линия — микрополярной модели. При наличии зависимости $W-p$ (в размерных величинах), рис. 2 можно использовать для сравнения микрополярного и классического случаев. Видно, что при значениях частот от 3709 до 5287 с$^{-1}$ в классическом случае имеются колебания, а в микрополярном – нет. Когда колебания имеют место в обоих случаях (при 5500 с$^{-1}$), перемещение в микрополярном случае в ≈ 2.7 раз меньше, чем в классическом случае. Это означает, что при прочих равных условиях в микрополярном случае пластинка более жесткая, чем в классическом.

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ МИКРОПОЛЯРНЫХ УПРУГИХ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН ПРИ БОЛЬШИХ ПРОГИБАХ

В случае круглой пластинки в основных уравнениях (18)–(20) примем $A_1 = 1$, $A_2 = r$. Тогда получим следующую, приведенную ниже систему уравнений.

Уравнения движения:

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial r} + \frac{1}{r}(T_{11} - T_{22}) + \frac{1}{r}\frac{\partial S_{21}}{\partial \theta} = 2\rho h \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2},$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial T_{22}}{\partial \theta} + \frac{\partial S_{12}}{\partial r} + \frac{1}{r}(S_{12} + S_{21}) = 2\rho h \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial N_{13}}{\partial r} + \frac{1}{r}N_{13} + \frac{1}{r}\frac{\partial N_{23}}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 w}{\partial r^2}T_{11} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}T_{22} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta}(S_{12} + S_{21}) + \frac{\partial w}{\partial r}\left[\frac{\partial T_{11}}{\partial r} + \frac{1}{r}T_{11} + \frac{1}{2r}\frac{\partial (S_{12} + S_{21})}{\partial \theta}\right] + \frac{\partial w}{\partial \theta}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial T_{22}}{\partial \theta} + \frac{1}{r}T_{11} + \frac{1}{2r}\frac{\partial (S_{12} + S_{21})}{\partial r}\right] = 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial L_{11}}{\partial r} + \frac{1}{r}(L_{11} - L_{22}) + \frac{1}{r}\frac{\partial L_{21}}{\partial \theta} + N_{23} - N_{32} = 2Jh\frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial t^2}, \tag{25}$$

$$\frac{\partial L_{12}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial L_{22}}{\partial \theta} + \frac{1}{r}(L_{12} + L_{21}) + N_{31} - N_{13} = 2Jh\frac{\partial^2 \Omega_2}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial L_{13}}{\partial r} + \frac{1}{r}L_{13} + \frac{1}{r}\frac{\partial L_{23}}{\partial \theta} + (S_{12} - S_{21}) = 2Jh\frac{\partial^2 \Omega_3}{\partial t^2},$$

$$N_{31} - \left(\frac{\partial M_{11}}{\partial r} + \frac{1}{r}(M_{11} - M_{22}) + \frac{1}{r}\frac{\partial M_{21}}{\partial \theta}\right) + \frac{2\rho h^3}{3}\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} = 0,$$

$$N_{32} - \left(\frac{1}{r}\frac{\partial M_{22}}{\partial \theta} + \frac{\partial M_{12}}{\partial r} + \frac{1}{r}(M_{12} + M_{21})\right) + \frac{2\rho h^3}{3}\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} = 0,$$

$$L_{33} - \frac{\partial \Lambda_{13}}{\partial r} - \frac{1}{r}\Lambda_{13} - \frac{1}{r}\frac{\partial \Lambda_{23}}{\partial \theta} - (M_{12} - M_{21}) + \frac{2\rho h^3}{3}\frac{\partial^2 \iota}{\partial t^2} = 0.$$

Физико-геометрические соотношения:

$$T_{11} = \frac{2Eh}{1 - \nu^2}\left[\frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 + \nu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_2}{\partial \theta} + \frac{1}{r}u_1 + \frac{1}{2}\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2\right)\right],$$

$$T_{22} = \frac{2Eh}{1 - \nu^2}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial u_2}{\partial \theta} + \frac{1}{r}u_1 + \frac{1}{2}\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2 + \nu\left(\frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2\right)\right],$$

$$S_{12} = 2h\left[(\mu + \alpha)\frac{\partial u_2}{\partial r} + (\mu - \alpha)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_1}{\partial \theta} - \frac{1}{r}u_2\right) - 2\alpha\Omega_3 + \mu\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\frac{\partial w}{\partial \theta}\right],$$

$$S_{21} = 2h\left[(\mu + \alpha)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_1}{\partial \theta} - \frac{1}{r}u_2\right) + (\mu - \alpha)\frac{\partial u_2}{\partial r} + 2\alpha\Omega_3 + \mu\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\frac{\partial w}{\partial \theta}\right],$$

$$N_{13} = 2h\left[(\mu + \alpha)\frac{\partial w}{\partial r} + (\mu - \alpha)\psi_1 + 2\alpha\Omega_2\right],$$

$$N_{23} = 2h\left[(\mu + \alpha)\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta} + (\mu - \alpha)\psi_2 - 2\alpha\Omega_1\right],$$

$$N_{31} = 2h\left[(\mu + \alpha)\psi_1 + (\mu - \alpha)\frac{\partial w}{\partial r} - 2\alpha\Omega_2\right],$$

$$N_{32} = 2h\left[(\mu + \alpha)\psi_2 + (\mu - \alpha)\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta} + 2\alpha\Omega_1\right],$$

$$M_{11} = \frac{2Eh^3}{3(1 - \nu^2)}\left[\frac{\partial \psi_1}{\partial r} + \nu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \psi_2}{\partial \theta} + \frac{1}{r}\psi_1\right)\right], \tag{26}$$

$$M_{22} = \frac{2Eh^3}{3(1 - \nu^2)}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial \psi_2}{\partial \theta} + \frac{1}{r}\psi_1 + \nu\frac{\partial \psi_1}{\partial r}\right],$$

$$M_{12} = \frac{2h^3}{3}\left[(\mu + \alpha)\frac{\partial \psi_2}{\partial r} + (\mu - \alpha)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} - \frac{1}{r}\psi_2\right) - 2\alpha\iota\right],$$

$$M_{21} = \frac{2h^3}{3}\left[(\mu + \alpha)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} - \frac{1}{r}\psi_2\right) + (\mu - \alpha)\frac{\partial \psi_2}{\partial r} + 2\alpha\iota\right],$$

$$L_{11} = 2h\left[(\beta + 2\gamma)\frac{\partial \Omega_1}{\partial r} + \beta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \Omega_2}{\partial \theta} + \frac{1}{r}\Omega_1\right) + \beta\iota\right],$$

$$L_{22} = 2h\left[(\beta + 2\gamma)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \Omega_2}{\partial \theta} + \frac{1}{r}\Omega_1\right) + \beta\frac{\partial \Omega_1}{\partial r} - \beta\iota\right],$$

$$L_{13}=\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\frac{\partial\Omega_3}{\partial r},\quad L_{23}=\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\frac{1}{r}\frac{\partial\Omega_3}{\partial\theta},$$

$$L_{12}=2h\left[(\gamma+\varepsilon)\frac{\partial\Omega_2}{\partial r}+(\gamma-\varepsilon)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Omega_1}{\partial\theta}-\frac{1}{r}\Omega_2\right)\right],$$

$$L_{21}=2h\left[(\gamma+\varepsilon)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Omega_1}{\partial\theta}-\frac{1}{r}\Omega_2\right)+(\gamma-\varepsilon)\frac{\partial\Omega_2}{\partial r}\right],$$

$$L_{33}=2h\left[(\beta+2\gamma)\iota+\beta\left(\frac{\partial\Omega_1}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\Omega_2}{\partial\theta}+\frac{1}{r}\Omega_1\right)\right],$$

$$\Lambda_{13}=\frac{2h^3}{3}\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\frac{\partial\iota}{\partial r},\quad \Lambda_{23}=\frac{2h^3}{3}\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\frac{1}{r}\frac{\partial\iota}{\partial\theta}.$$

Задаются граничные условия следующего вида:

$$T_{11}=T_{11}^0,\quad S_{12}=S_{12}^0,\quad M_{11}=M_{11}^0,\quad M_{12}=M_{12}^0,$$
$$T_{11}\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{S_{12}+S_{21}}{2}\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\theta}+N_{13}=N_{13}^0, \tag{27}$$
$$L_{11}=L_{11}^0,\quad L_{12}=L_{12}^0,\quad \Lambda_{13}=\Lambda_{13}^0.$$

Рассмотрим осесимметричную задачу. В этом случае уравнения расщепляются на две отдельные системы уравнений: задачу изгиба и задачу кручения круглой пластинки.

В случае задачи изгиба получаем следующую систему уравнений.

Уравнения движения:

$$\begin{gathered}\frac{\partial N_{13}}{\partial r}+\frac{1}{r}N_{13}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rT_{11}\frac{\partial w}{\partial r}\right)=2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2},\\
N_{31}-\left(\frac{\partial M_{11}}{\partial r}+\frac{1}{r}\left(M_{11}-M_{22}\right)\right)+\frac{2\rho h^3}{3}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial t^2}=0,\\
\frac{\partial L_{12}}{\partial r}+\frac{1}{r}\left(L_{12}+L_{21}\right)+N_{31}-N_{13}=2Jh\frac{\partial^2\Omega_2}{\partial t^2},\\
\frac{\partial T_{11}}{\partial r}+\frac{1}{r}\left(T_{11}-T_{22}\right)=2\rho h\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}.\end{gathered}\tag{28}$$

Физико-геометрические соотношения:

$$\begin{gathered}T_{11}=\frac{2Eh}{1-\nu^2}\left[\frac{\partial u_1}{\partial r}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2+\nu\frac{1}{r}u_1\right],\\
T_{22}=\frac{2Eh}{1-\nu^2}\left[\frac{1}{r}u_1+\nu\left(\frac{\partial u_1}{\partial r}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2\right)\right],\\
M_{11}=\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}\left[\frac{\partial\psi_1}{\partial r}+\nu\frac{1}{r}\psi_1\right],\\
M_{22}=\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}\left[\frac{1}{r}\psi_1+\nu\frac{\partial\psi_1}{\partial r}\right],\\
L_{12}=2h\left[(\gamma+\varepsilon)\frac{\partial\Omega_2}{\partial r}-(\gamma-\varepsilon)\frac{1}{r}\Omega_2\right],\\
L_{21}=2h\left[-(\gamma+\varepsilon)\frac{1}{r}\Omega_2+(\gamma-\varepsilon)\frac{\partial\Omega_2}{\partial r}\right],\\
N_{13}=2h\left[(\mu+\alpha)\frac{\partial w}{\partial r}+(\mu-\alpha)\psi_1+2\alpha\Omega_2\right],\\
N_{31}=2h\left[(\mu+\alpha)\psi_1+(\mu-\alpha)\frac{\partial w}{\partial r}-2\alpha\Omega_2\right].\end{gathered}\tag{29}$$

Задаются граничные условия шарнирного опирания:

$$w=0,\quad M_{11}=0,\quad L_{12}=0,\quad \text{когда}\quad r=R. \tag{30}$$

В случае задачи кручения получаем следующую систему уравнений.

Уравнения движения:

$$\begin{gathered}\frac{\partial S_{12}}{\partial r}+\frac{1}{r}\left(S_{12}+S_{21}\right)=2\rho h\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2},\\
\frac{\partial L_{13}}{\partial r}+\frac{1}{r}L_{13}+\left(S_{12}-S_{21}\right)=2Jh\frac{\partial^2\Omega_3}{\partial t^2},\\
N_{32}-\left(\frac{\partial M_{12}}{\partial r}+\frac{1}{r}\left(M_{12}+M_{21}\right)\right)+\frac{2\rho h^3}{3}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial t^2}=0,\\
\frac{\partial L_{11}}{\partial r}+\frac{1}{r}\left(L_{11}-L_{22}\right)+N_{23}-N_{32}=2Jh\frac{\partial^2\Omega_1}{\partial t^2},\\
L_{33}-\frac{\partial\Lambda_{13}}{\partial r}-\left(M_{12}-M_{21}\right)+\frac{2\rho h^3}{3}\frac{\partial^2\iota}{\partial t^2}=0.\end{gathered}\tag{31}$$

Физико-геометрические соотношения:

$$\begin{gathered}M_{12}=\frac{2h^3}{3}\left[(\mu+\alpha)\frac{\partial\psi_2}{\partial r}-(\mu-\alpha)\frac{1}{r}\psi_2-2\alpha\iota\right],\\
N_{23}=2h\left[(\mu-\alpha)\psi_2-2\alpha\Omega_1\right],\\
M_{21}=\frac{2h^3}{3}\left[-(\mu+\alpha)\frac{1}{r}\psi_2+(\mu-\alpha)\frac{\partial\psi_2}{\partial r}+2\alpha\iota\right],\\
N_{32}=2h\left[(\mu+\alpha)\psi_2+2\alpha\Omega_1\right],\\
L_{11}=2h\left[(\beta+2\gamma)\frac{\partial\Omega_1}{\partial r}+\beta\frac{1}{r}\Omega_1+\beta\iota\right],\\
L_{22}=2h\left[(\beta+2\gamma)\frac{1}{r}\Omega_1+\beta\frac{\partial\Omega_1}{\partial r}-\beta\iota\right],\\
L_{13}=\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\frac{\partial\Omega_3}{\partial r},\quad \Lambda_{13}=\frac{2h^3}{3}\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\frac{\partial\iota}{\partial r},\\
S_{12}=2h\left[(\mu+\alpha)\frac{\partial u_2}{\partial r}-(\mu-\alpha)\frac{1}{r}u_2-2\alpha\Omega_3\right],\\
S_{21}=2h\left[-(\mu+\alpha)\frac{1}{r}u_2+(\mu-\alpha)\frac{\partial u_2}{\partial r}+2\alpha\Omega_3\right],\\
L_{33}=2h\left[(\beta+2\gamma)\iota+\beta\left(\frac{\partial\Omega_1}{\partial r}+\frac{1}{r}\Omega_1\right)\right].\end{gathered}\tag{32}$$

Граничные условия шарнирного опирания:

$$\Omega_1=0,\quad \psi_2=0,\quad \Lambda_{13}=0,\quad \text{когда}\quad r=R. \tag{33}$$

Далее рассмотрим задачу изгиба (28)–(30). Будем также пренебрегать всеми инерционными членами в уравнениях движения, кроме $2\rho h\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}$.

Решение граничной задачи (28)–(30) при изучении собственных колебаний представим в виде:

$$
\begin{aligned}
u_1(r,t) &= u_1(t)\left(1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right)\frac{r}{R},\\
w(r,t) &= w(t)\left(1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right),\\
\psi_1(r,t) &= \psi_1(t)\left(1-\frac{1+\nu}{3+\nu}\left(\frac{r}{R}\right)^2\right)\frac{r}{R},\\
\Omega_2(r,t) &= \Omega_2(t)\left(1-\frac{\varepsilon}{\gamma+2\varepsilon}\left(\frac{r}{R}\right)^2\right)\frac{r}{R}.
\end{aligned}
\tag{34}
$$

Решение (34) уже удовлетворяет граничным условиям (30). Подставим эти представления в геометрические соотношения (29). Получившиеся выражения для деформаций и изгибов-кручений подставим в физические соотношения и найдем выражения для усилий, моментов и гипермоментов. Применяя метод Галеркина для системы уравнений движения (28), получим:

$$
\begin{aligned}
&\int_0^R\left(\frac{\partial T_{11}}{\partial r}+\frac{1}{r}(T_{11}-T_{22})\right)\left(1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right)\frac{r}{R}rdr = 0,\\
&\int_0^R\left(\frac{\partial N_{13}}{\partial r}+\frac{1}{r}N_{13}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rT_{11}\frac{\partial w}{\partial r}\right)-2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right)\times\\
&\qquad\times\left(1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right)rdr = 0,\\
&\int_0^R\left(\frac{\partial L_{12}}{\partial r}+\frac{1}{r}(L_{12}+L_{21})+N_{31}-N_{13}\right)\times\\
&\qquad\times\left(1-\frac{\varepsilon}{\gamma+2\varepsilon}\left(\frac{r}{R}\right)^2\right)\frac{r}{R}rdr = 0,\\
&\int_0^R\left(N_{31}-\left(\frac{\partial M_{11}}{\partial r}+\frac{1}{r}(M_{11}-M_{22})\right)\right)\times\\
&\qquad\times\left(1-\frac{1+\nu}{3+\nu}\left(\frac{r}{R}\right)^2\right)\frac{r}{R}rdr = 0.
\end{aligned}
\tag{35}
$$

Выполним интегрирование и затем функции $w(t)$, $u_1(t)$, $\psi_1(t)$, $\Omega_2(t)$ представим в виде:

$$
\begin{aligned}
w(t) = W\cos(pt),\quad u_1(t) = U_1\cos(pt),\\
\psi_1(t) = \Psi_1\cos(pt),\quad \Omega_2(t) = O_2\cos(pt).
\end{aligned}
\tag{36}
$$

Подставим эти функции в полученные уравнения, умножим их на $\cos(pt)$ и проинтегрируем по t от 0 до $\dfrac{\pi}{2p}$. В результате получим систему алгебраических уравнений относительно коэффициентов W, U_1, Ψ_1, O_2, из которой можно получить зависимость $W-p$. Введем далее такие же обозначения, как и в случае прямоугольной пластинки.

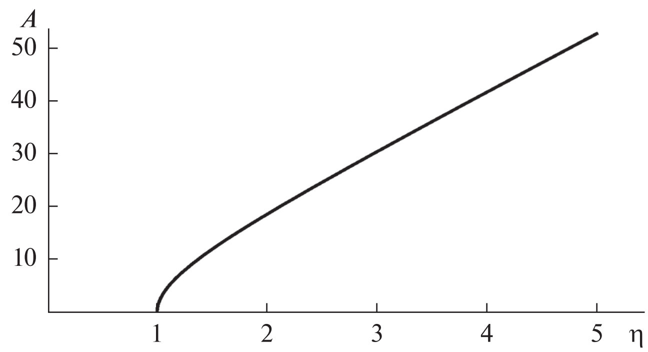

Рис. 3. Зависимость безразмерного прогиба круглой пластинки A от величины η.

Проведем численный анализ для вышеприведенного материала, а для геометрических размеров примем: радиус пластинки $R = 0.005$ м, относительная толщина $\delta = \dfrac{h}{R} = \dfrac{1}{100}$. На рис. 3 приведена зависимость (η, A). Кривая (η, A), как и в предыдущем случае, также представляет линию жесткого типа, т.е. с увеличением амплитуды частота возрастает. При весьма малых амплитудах имеем $\eta \to 1$. С увеличением амплитуды частота колебаний возрастает, и притом все более и более резко. При сравнении микрополярного и классического случаев зависимости $W-p$, можно сделать те же выводы, что имели место в случае прямоугольной пластинки.

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ МИКРОПОЛЯРНЫХ УПРУГИХ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ БОЛЬШИХ ПРОГИБАХ

Теперь решим также задачу свободных колебаний для микрополярных упругих тонких пологих оболочек прямоугольных в плане с шарнирно опертыми краями. Будем исходить из основных уравнений модели пологих оболочек. Здесь также будем пренебрегать всеми инерционными членами в уравнениях движения, кроме $2\rho h\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}$. Решение граничной задачи при изучении собственных колебаний также представим в виде (22).

Решение (22) уже удовлетворяет граничным условиям шарнирного опирания. Применяя метод Галеркина для систем уравнений движения, получим:

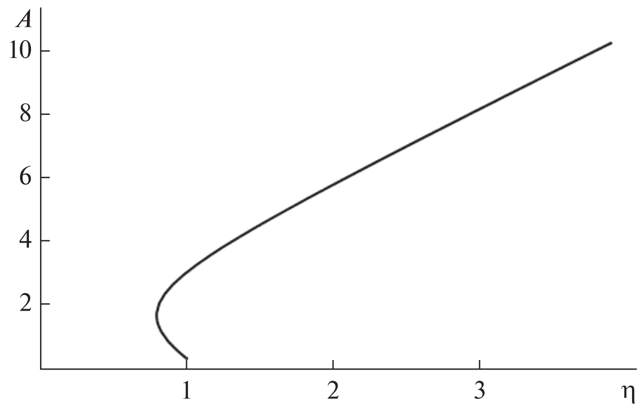

Рис. 4. Зависимость безразмерного прогиба пологой оболочки A от величины η.

$$\int_0^a\int_0^b\left(\frac{\partial T_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial S_{21}}{\partial x_2}\right)\cos\frac{\pi x_1}{a}\sin\frac{\pi x_2}{b}dx_1dx_2=0,$$

$$\int_0^a\int_0^b\left(\frac{\partial T_{22}}{\partial x_2}+\frac{\partial S_{12}}{\partial x_1}\right)\sin\frac{\pi x_1}{a}\cos\frac{\pi x_2}{b}dx_1dx_2=0,$$

$$\int_0^a\int_0^b\left(\frac{\partial N_{13}}{\partial x_1}+\frac{\partial N_{23}}{\partial x_2}+\frac{\partial}{\partial x_1}\left[T_{11}\frac{\partial w}{\partial x_1}+\frac{S_{12}+S_{21}}{2}\frac{\partial w}{\partial x_2}\right]+\right.$$
$$+\frac{\partial}{\partial x_2}\left[\frac{S_{12}+S_{21}}{2}\frac{\partial w}{\partial x_1}+T_{22}\frac{\partial w}{\partial x_2}\right]+$$
$$\left.+\frac{T_{11}}{R_1}-2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right)\sin\frac{\pi x_1}{a}\sin\frac{\pi x_2}{b}dx_1dx_2=0,$$

$$\int_0^a\int_0^b\left(N_{31}-\left(\frac{\partial M_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial M_{21}}{\partial x_2}\right)\right)\times$$
$$\times\cos\frac{\pi x_1}{a}\sin\frac{\pi x_2}{b}dx_1dx_2=0,$$

$$\int_0^a\int_0^b\left(N_{32}-\left(\frac{\partial M_{22}}{\partial x_2}+\frac{\partial M_{12}}{\partial x_1}\right)\right)\times$$
$$\times\sin\frac{\pi x_1}{a}\cos\frac{\pi x_2}{b}dx_1dx_2=0, \qquad (37)$$

$$\int_0^a\int_0^b\left(\frac{\partial L_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial L_{21}}{\partial x_2}+(N_{23}-N_{32})\right)\times$$
$$\times\sin\frac{\pi x_1}{a}\cos\frac{\pi x_2}{b}dx_1dx_2=0,$$

$$\int_0^a\int_0^b\left(\frac{\partial L_{22}}{\partial x_2}+\frac{\partial L_{12}}{\partial x_1}-(N_{13}-N_{31})\right)\times$$
$$\times\cos\frac{\pi x_1}{a}\sin\frac{\pi x_2}{b}dx_1dx_2=0,$$

$$\int_0^a\int_0^b\left(\frac{\partial L_{13}}{\partial x_1}+\frac{\partial L_{23}}{\partial x_2}+(S_{12}-S_{21})\right)\times$$
$$\times\cos\frac{\pi x_1}{a}\cos\frac{\pi x_2}{b}dx_1dx_2=0,$$

$$\int_0^a\int_0^b\left(L_{33}-\left(\frac{\partial\Lambda_{13}}{\partial x_1}+\frac{\partial\Lambda_{23}}{\partial x_2}\right)-(M_{12}-M_{21})\right)\times$$
$$\times\cos\frac{\pi x_1}{a}\cos\frac{\pi x_2}{b}dx_1dx_2=0.$$

Здесь нужно подставить выражения для физических и геометрических соотношений, а также решение вида (22).

Выполним интегрирование и представим функции $w(t)$, $u_1(t)$, $u_2(t)$, $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$, $\Omega_1(t)$, $\Omega_2(t)$, $\Omega_3(t)$, $\iota(t)$ в виде (24). Затем подставим их в полученные в результате интегрирования уравнения, умножим на $\cos(pt)$ и проинтегрируем по t от 0 до $\frac{\pi}{2p}$. В результате получим систему алгебраических уравнений относительно коэффициентов W, U_1, U_2, Ψ_1, Ψ_2, O_1, O_2, O_3, I, из которого можно получить зависимость $W-p$. Численный анализ проведен для того же материала и геометрических размеров, что и в случае пластинки, кроме того $R=0.005$ м, относительная толщина $\delta=\frac{h}{R}=\frac{1}{100}$. Отметим, что $k_2=\frac{1}{R_2}=0$, $k_1=\frac{1}{R}$ (т.е. рассмотрена цилиндрическая пологая оболочка, где R_1, R_2 – радиусы кривизны по направлениям α_1,α_2), а также введена безразмерная кривизна $k^*=\frac{a^2}{R_1h}$ пологой оболочки и принято $k^*=20$.

На рис. 4 приведена скелетная кривая (η, A) для пологой оболочки. Кривая (η, A) представляет линию мягкого типа, т.е. начальный участок здесь отклоняется к оси ординат, после этого при увеличении A амплитуда возрастает все более и более резко. Такие же качественные результаты получаются для случая круглой в плане пологой оболочки.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе построены математические модели микрополярных гибких пластин и пологих оболочек, представляющие собой обобщение известных моделей Фепеля–Кармана–Маргерра классического случая. В рамках этих моделей численно решены задачи о свободных колебаниях прямоугольных и круглых пластин и пологих оболочек. Выявлены характерные особенности эффективных свойств микрополярного материала по сравнению с соответствующим классическим материалом.

Работа выполнена при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научных проектов 18T-2C263 и 21T-2C093.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Karman Th.* Collected works. V. 1. London, 1956. 530 p.
2. *Marguerre K.* Die Durchschlags kraft eines schwachgekrummten Balkes // Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Cesellschaft. 1938. Bd. 37. S. 22–40.
3. *Вольмир А.С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972. 432 с.
4. *Григолюк Э.И., Мамай В.И.* Нелинейное деформирование тонкостенных конструкций. М.: Физматлит, 1997. 264 с.
5. *Altenbach J., Altenbach H., Eremeyev V.A.* On generalized Cosserat-type theories of plates and shells: a short review and bibliography // Arch. Appl. Mech (Special Issue). 2010. V. 80. P. 73–92. https://doi.org/10.1007/s00419-009-0365-3
6. *Nowacki W.* Theory of Asymmetric Elasticity. Oxford, etc: Pergamon Press, 1986. 383p.
7. *Кулеш М.А., Матвеенко В.П., Шардаков И.Н.* О распространении упругих поверхностных волн в среде Коссера // Акуст. журн. 2006. Т. 52. № 2. С. 227–235.
8. *Кулеш М.А., Матвеенко В.П., Улитин М.В., Шардаков И.Н.* Анализ волнового решения уравнений эластокинетики среды Коссера в случае плоских объемных волн // Прикладная механика и техническая физика. 2008. Т. 49. № 2. С. 196–203.
9. *Ерофеев В.И.* Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой. М.: Изд-во МГУ, 1999. 328 с.
10. *Sadovskii V., Sadovskaya O., Varigina M.* Numerical solution of dynamic problems in couple-stressed continuum of multiprocessor computer systems // Int. J. Numerical Analysis and Modeling. Series B. 2011. V. 2. № 2–3. P. 215–230.
11. *Еремеев В.А., Зубов Л.М.* Механика упругих оболочек. М.: Наука, 2008. 280 с.
12. *Саркисян С.О.* Общая динамическая теория микрополярных упругих тонких оболочек // Докл. Акад. наук России. 2011. Т. 436. № 2. С. 195–198.
13. *Sargsyan S.H.* Applied theory of dynamics of micropolar elastic thin shells ad variation principles // Advanced Structured Materials. V. 103. Dynamical Processes in Generalized Continua and Structures. Springer, 2019. P. 449–465.
14. *Саркисян С.О., Саркисян А.А.* Общая динамическая теория микрополярных упругих тонких пластин со свободным вращением и особенности их свободных колебаний // Акуст. журн. 2011. Т. 57. № 4. С. 461–469.
15. *Саркисян С.О., Саркисян А.А.* Модель колебаний микрополярных тонких оболочек // Акуст. журн. 2013. Т. 59. № 2. С. 170–181.
16. *Sargsyan A.H., Sargsyan S.H.* Dynamic model of micropolar elastic thin plates with independent fields of displacements and rotations // J. Sound Vibr. 2014. V. 333. Is. 18. P. 4354–4375.
17. *Sargsyan S.H.* asymptotically confirmed hypotheses method for the construction of micropolar and classical theories of elastic thin shells // Advances in Pure Mathematics. 2015. V. 5. № 10. P. 629–643.
18. *Новожилов В.В.* Основы нелинейной теории упругости. Л., М.: ОГИЗ. Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1948. 213 с.
19. *Lakes R.* Experimental methods for study of Cosserat elastic solids and other generalized elastic continua // Continuum models for materials with micro-structure / Ed. By Muhlhaus H., Wiley J. N. Y.: J. Wiley and sons, Ltd., 1995. Ch. 1. P. 1–22.