

**КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ  
ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ И ТЕОРИИ ВОЛН**

УДК 534.1.539.3

**НАПРЯЖЕНИЯ В СИММЕТРИЧНОЙ ВОЛНЕ ЛЭМБА СРЕДНЕГО  
ДИАПАЗОНА. ИССЛЕДОВАНИЕ ВНУТРЕННЕЙ ВОЛНЫ**

© 2022 г. В. В. Мокряков\*, \*\*

*Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского  
Российской академии наук, пр-т Вернадского 101, корп. 1, Москва, 119526 Россия*

\*e-mail: mokr@ipmnet.ru

\*\*e-mail: euphil@gmail.com

Поступила в редакцию 02.11.2021 г.

После доработки 28.11.2021 г.

Принята к публикации 30.11.2021 г.

Рассмотрено напряженно-деформированное состояние упругой неограниченной пластины в процессе распространения фундаментальной моды симметричной волны Лэмба. Особое внимание уделено случаю диапазона волн средней длины, т.е. длины волны, сравнимой с толщиной пластины. Проведено сравнение полей напряжений волн средней длины с полями напряжений длинноволнового и коротковолнового приближений. Найдена внутренняя волна, для которой в рамках линейно-упругой модели на поверхности пластины все компоненты деформаций и напряжений, а также продольные смещения, равны нулю, и их локализация происходит в толще пластины. Это означает, что использование поверхностных датчиков смещений неэффективно для регистрации такой волны. Доказано, что в данном случае материал находится в состоянии чистого сдвига, т.е. первый инвариант равен нулю.

*Ключевые слова:* волны Лэмба, упругость, неограниченная пластина, напряженно-деформированное состояние, коэффициент Пуассона, локализация напряжений

**DOI:** 10.31857/S032079192202006X

**ОБОЗНАЧЕНИЯ**

		$c_2 = \sqrt{\mu/\rho}$	скорость волн сдвига в бесконечной среде
$x, y, z$	координаты декартовой системы координат	$c_R$	скорость волн Рэлея (поверхностных волн в полупространстве)
$a$	полутолщина пластины	$u_i$	компоненты вектора смещений
$\rho$	плотность	$\varepsilon_{ij}$	компоненты тензора деформаций
$E$	модуль Юнга	$\Delta$	первый инвариант тензора деформаций
$\nu$	коэффициент Пуассона	$\sigma_{ij}$	компоненты тензора напряжений
$\lambda, \mu$	параметры Ламе	$U$	обобщенная амплитуда волны
$\omega$	круговая частота		
$\gamma$	круговое волновое число		
$l$	длина волны		
$\Omega = \gamma x - \omega t$	фаза волны в точке $x$ в момент $t$		В формулах используются следующие сокращения:
$c = \omega/\gamma$	фазовая скорость	$\alpha = \gamma\sqrt{c^2/c_1^2 - 1}, \beta = \gamma\sqrt{c^2/c_2^2 - 1},$	(1)
$c_0 = \sqrt{E/\rho}$	скорость бесконечно длинных волн в бесконечном стержне		а также следующие взаимоотношения:
$c'_0 = c_0/\sqrt{1-\nu^2}$	скорость бесконечно длинных волн в бесконечной пластине	$c_1^2 = c_0^2 \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} = c_0'^2 \frac{(1-\nu)^2}{1-2\nu};$	(2)
$c_1 = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$	скорость продольных волн расширения в бесконечной среде	$c_2^2 = \frac{c_0^2}{2(1+\nu)} = c_0'^2 \frac{1-\nu}{2};$	

$$\lambda = \frac{Ev}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \rho(c_1^2 - 2c_2^2); \quad (3)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} = \rho c_2^2; \quad \frac{\lambda}{\mu} = \frac{2\nu}{1-2\nu} = \frac{c_1^2}{c_2^2} - 2.$$

## ВВЕДЕНИЕ

Задача распространения упругой волны в бесконечной пластине ненулевой толщины впервые рассмотрена Лэмбом [1]. В этой работе представлены основные уравнения, описывающие движение волны в толще пластины, их решение, получена формула дисперсионного соотношения. Подробное решение можно увидеть также в более поздних работах, например [2–4] и др.

Развитие наук о материалах и материаловедения требует расширения классических постановок задач. Ряд авторов посвятили свои работы распространению волн Лэмба в различных материалах, таких как ауксетики (например, [5]), анизотропные среды (например, [6]), функционально-градиентные материалы (например, [7, 8]).

Еще одним направлением развития является рассмотрение задач о многослойных пластинах. Они широко рассмотрены, например, в [9]. В работе разобраны задачи о волновом движении упругого полупространства, контактирующих полупространств, слоя на полупространстве, многослойного полупространства, многослойной пластины. Отдельно рассмотрено влияние силы тяжести, кривизны слоя, внутреннего трения.

Поскольку пластины часто становятся элементами конструкций, то возникает вопрос о прочности. Пластины могут содержать разнообразные дефекты, которые могут стать источниками разрушения. В работах [10, 11] исследовали поведение волн Лэмба в пластинах с неоднородностями, такими как надрезы, расслаивание, сварочные швы. Авторы рассмотрели возможности применения волн Лэмба для диагностики конструкций на наличие дефектов.

Всесторонне тема диагностики конструкций посредством волн Лэмба рассмотрена в работе Su и Ye [12]. В частности, подробно разобрана технология возбуждения и регистрации волн Лэмба, обработка получаемых сигналов, описаны алгоритмы идентификации дефектов. Отдельная глава посвящена используемым сенсорам и массивам сенсоров, их устройству и использованию. Этой же теме посвящены статьи [13–15].

Тем не менее, волны могут возбуждаться не только намеренно, с исследовательской или иной полезной целью. Волны из неконтролируемых источников могут наносить урон конструкциям, увеличивая напряжения до критических величин. Напряженно-деформированное состояние под воздействием волны Лэмба может быть весьма

неоднородно, и поверхностные напряжения, измеряемые сенсорами, могут значительно отличаться в меньшую сторону от напряжений внутри материала пластины.

Данная статья посвящена структуре напряжений в пластине в процессе распространения волн Лэмба (в этой работе мы ограничимся симметричными волнами), в частности, исследованию локализации максимальных растягивающих и сдвиговых напряжений. Особое внимание уделено случаю, когда напряжения в толще пластины могут быть многократно выше, чем поверхностные напряжения.

## 1. ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

Рассмотрим симметричную волну Лэмба (рис. 1) в упругой пластине толщиной  $2a$ , с поверхностью, свободной от нагрузок:

$$u_x(x, z) = u_x(x, -z); \quad u_z(x, z) = -u_z(x, -z); \quad (4)$$

$$\sigma_{zz}|_{z=\pm a} = \sigma_{xz}|_{z=\pm a} = 0.$$

Общий вид смещений в симметричной волне Лэмба [1] имеет вид [2]:

$$u_x = [-A\gamma \cos(\alpha z) + iB\beta \cos(\beta z)] \sin \Omega,$$

$$u_z = [-A\alpha \sin(\alpha z) - iB\gamma \sin(\beta z)] \cos \Omega, \quad (5)$$

$$u_y = 0.$$

Здесь  $\Omega = \gamma x - \omega t$  – фаза волны в точке  $x$  в момент  $t$ .

Отметим, что плоские волны Лэмба соответствуют задаче об упругой плоской деформации, т.е.  $u_y$  и  $\epsilon_{yy}$ ,  $\epsilon_{xy}$ ,  $\epsilon_{yz}$  равны нулю (в отличие от  $\sigma_{yy}$ ). Из (5) получаем выражения для деформации:

$$\epsilon_{xx} = u_{x,x} = [-A\gamma^2 \cos(\alpha z) + iB\gamma\beta \cos(\beta z)] \cos \Omega,$$

$$\epsilon_{zz} = u_{z,z} = [-A\alpha^2 \cos(\alpha z) - iB\gamma\beta \cos(\beta z)] \cos \Omega,$$

$$u_{y,x} = u_{y,y} = u_{y,z} = u_{x,y} = u_{z,y} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \epsilon_{yy} = \epsilon_{xy} = \epsilon_{yz} = 0,$$

$$u_{x,z} = [A\gamma\alpha \sin(\alpha z) - iB\beta^2 \sin(\beta z)] \sin \Omega, \quad (6)$$

$$u_{z,x} = [A\gamma\alpha \sin(\alpha z) + iB\gamma^2 \sin(\beta z)] \sin \Omega,$$

$$\epsilon_{xz} = (u_{x,z} + u_{z,x})/2 =$$

$$= \left[ A\gamma\alpha \sin(\alpha z) - \frac{\beta^2 - \gamma^2}{2} iB \sin(\beta z) \right] \sin \Omega,$$

$$\Delta = \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz} = -A(\gamma^2 + \alpha^2) \cos(\alpha z) \cos \Omega.$$

С помощью закона Гука получаем значения ненулевых компонентов напряжений:

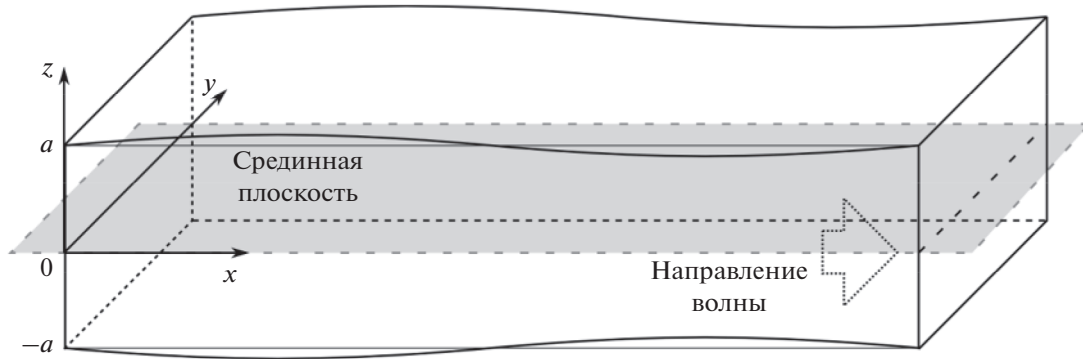


Рис. 1. Схема симметричной волны Лэмба.

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \mu \left[ \left( \frac{c_1^2}{c_2^2} - 2 \right) \Delta + 2\varepsilon_{xx} \right] = \\ &= \mu \left[ -A\gamma^2 \left( \frac{c_2^2}{c_2^2} - 2 \frac{c_2^2}{c_1^2} + 2 \right) \times \right. \\ &\times \cos(\alpha z) + 2iB\gamma\beta \cos(\beta z) \left. \right] \cos \Omega = \\ &= \mu \left[ -A(\beta^2 - 2\alpha^2 + \gamma^2) \cos(\alpha z) + \right. \\ &\quad \left. + 2iB\gamma\beta \cos(\beta z) \right] \cos \Omega, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} &= \mu \left[ \left( \frac{c_1^2}{c_2^2} - 2 \right) \Delta + 2\varepsilon_{yy} \right] = \mu \left( \frac{c_1^2}{c_2^2} - 2 \right) \Delta = \\ &= -A\mu\gamma^2 \left( \frac{c_2^2}{c_2^2} - 2 \frac{c_2^2}{c_1^2} \right) \cos(\alpha z) \cos \Omega = \\ &= -A\mu(\beta^2 - 2\alpha^2 - \gamma^2) \cos(\alpha z) \cos \Omega, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} &= \mu \left[ \left( \frac{c_1^2}{c_2^2} - 2 \right) \Delta + 2\varepsilon_{zz} \right] = \\ &= \mu \left[ A(\gamma^2 - \beta^2) \cos(\alpha z) - 2iB\gamma\beta \cos(\beta z) \right] \cos \Omega, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xz} &= 2\mu\varepsilon_{xz} = \\ &= \mu \left[ 2A\gamma\alpha \sin(\alpha z) + iB(\gamma^2 - \beta^2) \sin(\beta z) \right] \sin \Omega. \end{aligned} \quad (10)$$

Дисперсионное соотношение для симметричной волны Лэмба находим, используя граничные условия:

$$\sigma_{zz}|_{z=\pm a} = -\mu \left[ A(\beta^2 - \gamma^2) \cos(\alpha a) + 2iB\gamma\beta \cos(\beta a) \right] \cos \Omega = 0, \quad (11)$$

$$\sigma_{xz}|_{z=\pm a} = \mp \mu \left[ 2A\gamma\alpha \sin(\alpha a) - iB(\beta^2 - \gamma^2) \sin(\beta a) \right] \sin \Omega = 0. \quad (12)$$

Найдем отношение коэффициентов:

$$\frac{A}{iB} = -\frac{2\gamma\beta \cos(\beta a)}{(\beta^2 - \gamma^2) \cos(\alpha a)} = \frac{(\beta^2 - \gamma^2) \sin(\beta a)}{2\gamma\alpha \sin(\alpha a)}, \quad (13)$$

$$\frac{A}{iB} = -\frac{2\sqrt{\frac{c_2^2}{c_2^2} - 1} \cos(\beta a)}{\left( \frac{c_2^2}{c_2^2} - 2 \right) \cos(\alpha a)} = \frac{\left( \frac{c_2^2}{c_2^2} - 2 \right) \sin(\beta a)}{2\sqrt{\frac{c_2^2}{c_1^2} - 1} \sin(\alpha a)}. \quad (14)$$

Отсюда получаем дисперсионное соотношение:

$$\begin{aligned} &\left( \frac{c_2^2}{c_2^2} - 2 \right)^2 \cos(\alpha a) \sin(\beta a) + \\ &+ 4\sqrt{\frac{c_2^2}{c_1^2} - 1} \sqrt{\frac{c_2^2}{c_2^2} - 1} \sin(\alpha a) \cos(\beta a) = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Отметим, что при  $c = c_2$  ( $\beta = 0$ ) соотношение становится вырожденным. Удалив ложный корень, получаем невырожденную форму ( $\sin x/x \rightarrow 1$  при  $x \rightarrow 0$ ):

$$\begin{aligned} &\left( \frac{c_2^2}{c_2^2} - 2 \right)^2 \cos(\alpha a) \frac{\sin(\beta a)}{\beta a} + \\ &+ 4\left( \frac{c_2^2}{c_1^2} - 1 \right) \frac{\sin(\alpha a)}{\alpha a} \cos(\beta a) = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Аналогично изменим выражение (13):

$$\frac{A\gamma^2}{iB\gamma\beta} = -\frac{2\gamma^2 \cos(\beta a)}{(\beta^2 - \gamma^2) \cos(\alpha a)} = \frac{(\beta^2 - \gamma^2) \frac{\sin(\beta a)}{\beta a}}{2\alpha^2 \frac{\sin(\alpha a)}{\alpha a}}. \quad (17)$$

Введем обобщенную амплитуду:

$$\frac{A\gamma^2}{(\beta^2 - \gamma^2) \frac{\sin(\beta a)}{\beta a}} = \frac{iB\gamma\beta}{2\alpha^2 \frac{\sin(\alpha a)}{\alpha a}} = U. \quad (18)$$

Отсюда

$$A = U \left( \frac{\beta^2}{\gamma^2} - 1 \right) \frac{\sin(\beta a)}{\beta a} = U \left( \frac{c^2}{c_2^2} - 2 \right) \frac{\sin(\beta a)}{\beta a}, \quad (19)$$

$$iB \frac{\beta}{\gamma} = 2U \frac{\alpha^2 \sin(\alpha a)}{\gamma^2 \alpha a} = 2U \left( \frac{c^2}{c_1^2} - 1 \right) \frac{\sin(\alpha a)}{\alpha a}.$$

Итак, получаем выражения для напряженно-деформированного состояния (НДС):

$$u_x = U \gamma \left[ - \left( \frac{\beta^2}{\gamma^2} - 1 \right) \frac{\sin(\beta a)}{\beta a} \cos(\alpha z) + \right. \\ \left. + 2 \frac{\alpha^2 \sin(\alpha a)}{\gamma^2 \alpha a} \cos(\beta z) \right] \sin \Omega, \quad (20)$$

$$u_z = U \alpha^2 z \left[ - \left( \frac{\beta^2}{\gamma^2} - 1 \right) \frac{\sin(\beta a)}{\beta a} \frac{\sin(\alpha z)}{\alpha z} - \right. \\ \left. - 2 \frac{\sin(\alpha a) \sin(\beta z)}{\alpha a \beta z} \right] \cos \Omega,$$

$$\sigma_{xx} = \mu \frac{U}{\gamma^2} \left[ (\gamma^2 - \beta^2) (\beta^2 - 2\alpha^2 + \gamma^2) \frac{\sin(\beta a)}{\beta a} \times \right. \\ \left. \times \cos(\alpha z) + 4\gamma^2 \alpha^2 \frac{\sin(\alpha a)}{\alpha a} \cos(\beta z) \right] \cos \Omega, \quad (21)$$

$$\sigma_{yy} = \mu \frac{U}{\gamma^2} (\gamma^2 - \beta^2) (\beta^2 - 2\alpha^2 - \gamma^2) \times \\ \times \frac{\sin(\beta a)}{\beta a} \cos(\alpha z) \cos \Omega, \quad (22)$$

$$\sigma_{zz} = -\mu \frac{U}{\gamma^2} \left[ (\gamma^2 - \beta^2)^2 \frac{\sin(\beta a)}{\beta a} \cos(\alpha z) + \right. \\ \left. + 4\gamma^2 \alpha^2 \frac{\sin(\alpha a)}{\alpha a} \cos(\beta z) \right] \cos \Omega, \quad (23)$$

$$\sigma_{xz} = -2\mu U z \gamma \frac{\alpha^2}{\gamma^2} (\gamma^2 - \beta^2) \times \\ \times \left[ \frac{\sin(\beta a) \sin(\alpha z)}{\beta a \alpha z} - \frac{\sin(\alpha a) \sin(\beta z)}{\alpha a \beta z} \right] \sin \Omega. \quad (24)$$

## 2. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЛЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ МОДЫ

Часто на практике используются приближенные значения НДС для волн, длина которых много больше или много меньше толщины пластины.

Рассмотрим длинноволновое приближение ( $l \gg 2a$ ,  $\gamma a \ll \pi$ ). Используя первые члены асимптотических разложений при  $\xi \rightarrow 0$ :  $\sin \xi \rightarrow \xi$ ;  $\cos \xi \rightarrow 1$ , дисперсионное соотношение можно привести к следующему виду:

$$\beta \left( \frac{c^2}{c_2^2} - 2 \right)^2 + 4\alpha \sqrt{\frac{c^2}{c_1^2} - 1} \sqrt{\frac{c^2}{c_2^2} - 1} = 0, \quad (25)$$

$$\left( \frac{c^2}{c_2^2} - 2 \right)^2 + 4 \left( \frac{c^2}{c_1^2} - 1 \right) = 0 \quad (26)$$

или

$$\frac{c^2}{c_2^2} \left( \frac{c^2}{c_2^2} + 4 \frac{c_2^2}{c_1^2} - 4 \right) = 0. \quad (27)$$

Ненулевым решением здесь будет

$$c^2 = 4c_2^2 \left( 1 - \frac{c_2^2}{c_1^2} \right) = \frac{c_0^2}{1 - \nu^2} = c_0'^2. \quad (28)$$

Так мы получили фазовую скорость длинных (и, соответственно, низкочастотных) волн. Это выражение можно найти в различных источниках (например, см. [2–4]).

Смещения для длинных волн имеют следующий вид:

$$u_x = -U \gamma \left[ 2 - \frac{c^2}{c_2^2} - 2 \left( 1 - \frac{c^2}{c_1^2} \right) \right] \sin \Omega = \\ = \frac{2U \gamma \nu}{(1 - \nu)^2} \sin \Omega, \quad (29)$$

$$u_z = -U \gamma^2 z \left( 1 - \frac{c^2}{c_1^2} \right) \frac{c^2}{c_2^2} = -\frac{2U \gamma^2 \nu^2}{(1 - \nu)^3} z \cos \Omega. \quad (30)$$

Обобщенная амплитуда может быть представлена через относительную амплитуду изменения толщины (для длинных волн):

$$\delta_{\text{long}} = \max_{z=a} u_z / a = \frac{2U \gamma^2 \nu^2}{(1 - \nu)^3}. \quad (31)$$

Отсюда

$$U = \delta_{\text{long}} \frac{(1 - \nu)^3}{2\gamma^2 \nu^2}. \quad (32)$$

Используя последнюю формулу, получим выражения для смещений и напряжений:

$$u_x = \delta_{\text{long}} \frac{1 - \nu}{\gamma \nu} \sin \Omega = \delta_{\text{long}} l \frac{1 - \nu}{2\pi \nu} \sin \Omega, \quad (33)$$

$$u_z = -\delta_{\text{long}} z \cos \Omega, \quad (34)$$

$$\sigma_{xx} = \frac{4U \mu \gamma^2 \nu}{(1 - \nu)^3} \cos \Omega = \frac{2\mu}{\nu} \delta_{\text{long}} \cos \Omega, \quad (35)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{4U \mu \gamma^2 \nu^2}{(1 - \nu)^3} \cos \Omega = 2\mu \delta_{\text{long}} \cos \Omega, \quad (36)$$

$$\sigma_{zz} = U \mu \gamma^2 \left[ \left( 2 - \frac{c^2}{c_2^2} \right)^2 - 4 \left( 1 - \frac{c^2}{c_1^2} \right) \right] \cos \Omega = 0, \quad (37)$$

$$\sigma_{xz} = 0. \quad (38)$$

Таким образом, длинные волны являются плоскими волнами, т.е. в каждом поперечном сечении деформации и напряжения однородны.

Теперь рассмотрим коротковолновое приближение ( $l \ll 2a$ ,  $\gamma a \gg \pi$ ). Для высоких частот фазовая скорость симметричной фундаментальной моды меньше скоростей  $c_1$  и  $c_2$ . Это означает, что  $\alpha$  и  $\beta$  мнимые. Таким образом, дисперсионное соотношение имеет вид:

$$\begin{aligned} & \left(2 - \frac{c^2}{c_2^2}\right)^2 \operatorname{ch}\left(\gamma a \sqrt{1 - \frac{c^2}{c_1^2}}\right) \operatorname{sh}\left(\gamma a \sqrt{1 - \frac{c^2}{c_2^2}}\right) = \\ & = 4 \sqrt{1 - \frac{c^2}{c_1^2}} \sqrt{1 - \frac{c^2}{c_2^2}} \operatorname{sh}\left(\gamma a \sqrt{1 - \frac{c^2}{c_1^2}}\right) \operatorname{ch}\left(\gamma a \sqrt{1 - \frac{c^2}{c_2^2}}\right). \end{aligned} \quad (39)$$

Используем следующие приближенные выражения при  $\xi \gg 1$ :  $\operatorname{sh} \xi$ ,  $\operatorname{ch} \xi \approx e^{\xi}/2$ . Тогда дисперсионное соотношение выглядит так:

$$\begin{aligned} & \left(2 - \frac{c^2}{c_2^2}\right)^2 \exp\left(\gamma a \sqrt{1 - \frac{c^2}{c_1^2}}\right) \exp\left(\gamma a \sqrt{1 - \frac{c^2}{c_2^2}}\right) = \\ & = 4 \sqrt{1 - \frac{c^2}{c_1^2}} \sqrt{1 - \frac{c^2}{c_2^2}} \exp\left(\gamma a \sqrt{1 - \frac{c^2}{c_1^2}}\right) \exp\left(\gamma a \sqrt{1 - \frac{c^2}{c_2^2}}\right) \end{aligned} \quad (40)$$

или

$$\left(2 - \frac{c^2}{c_2^2}\right)^2 = 4 \sqrt{1 - \frac{c^2}{c_1^2}} \sqrt{1 - \frac{c^2}{c_2^2}}. \quad (41)$$

Таким образом, дисперсионное соотношение для коротковолнового приближения совпадает с дисперсионным соотношением для поверхностной волны Рэлея, т.е.  $c = c_R$ .

Смещения в коротковолновом приближении имеют вид:

$$\begin{aligned} u_z &= \frac{U \left(1 - \frac{c_R^2}{c_1^2}\right)}{a \left(2 - \frac{c_R^2}{c_2^2}\right)^2} \exp\left[\gamma a \left(\sqrt{1 - \frac{c_R^2}{c_1^2}} + \sqrt{1 - \frac{c_R^2}{c_2^2}}\right)\right] \times \\ & \times \left\{ \left(2 - \frac{c_R^2}{c_2^2}\right) \exp\left[\gamma(z-a) \sqrt{1 - \frac{c_R^2}{c_1^2}}\right] - \right. \\ & \left. - 2 \exp\left[\gamma(z-a) \sqrt{1 - \frac{c_R^2}{c_2^2}}\right] \right\} \cos \Omega. \end{aligned} \quad (42)$$

Относительная амплитуда изменения толщины (для коротких волн):

$$\begin{aligned} \delta_{\text{short}} &= \max u_z(z=a)/a = \\ &= \frac{U \left(1 - \frac{c_R^2}{c_1^2}\right) \frac{c_R^2}{c_2^2}}{a^2 \left(2 - \frac{c_R^2}{c_2^2}\right)^2} \exp\left[\gamma a \left(\sqrt{1 - \frac{c_R^2}{c_1^2}} + \sqrt{1 - \frac{c_R^2}{c_2^2}}\right)\right] = \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{U \frac{c_R^2}{c_2^2} \sqrt{1 - \frac{c_R^2}{c_1^2}}}{4a^2 \sqrt{1 - \frac{c_R^2}{c_2^2}}} \exp\left[\gamma a \left(\sqrt{1 - \frac{c_R^2}{c_1^2}} + \sqrt{1 - \frac{c_R^2}{c_2^2}}\right)\right]. \end{aligned}$$

$$U = \frac{4\delta_{\text{short}} a^2 \sqrt{1 - \frac{c_R^2}{c_2^2}}}{\frac{c_R^2}{c_2^2} \sqrt{1 - \frac{c_R^2}{c_1^2}} \exp\left[\gamma a \left(\sqrt{1 - \frac{c_R^2}{c_1^2}} + \sqrt{1 - \frac{c_R^2}{c_2^2}}\right)\right]}. \quad (44)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} u_z &= \delta_{\text{short}} a \frac{c_2^2}{c_R^2} \left[ \left(2 - \frac{c_R^2}{c_2^2}\right) \exp\left[\gamma(z-a) \sqrt{1 - \frac{c_R^2}{c_1^2}}\right] - \right. \\ & \left. - 2 \exp\left[\gamma(z-a) \sqrt{1 - \frac{c_R^2}{c_2^2}}\right] \right] \cos \Omega, \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} u_x &= -U \exp\left(\gamma a \sqrt{1 - \frac{c_R^2}{c_1^2}} + \gamma a \sqrt{1 - \frac{c_R^2}{c_2^2}}\right) \frac{2 - \frac{c_R^2}{c_2^2}}{8a \sqrt{1 - \frac{c_R^2}{c_2^2}}} \times \\ & \times \left\{ 2 \exp\left[\gamma(z-a) \sqrt{1 - \frac{c_R^2}{c_1^2}}\right] - \right. \\ & \left. - \left(2 - \frac{c_R^2}{c_2^2}\right) \exp\left[\gamma(z-a) \sqrt{1 - \frac{c_R^2}{c_2^2}}\right] \right\} \sin \Omega = \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{\delta_{\text{short}} a \left(2 - \frac{c_R^2}{c_2^2}\right)}{2 \frac{c_R^2}{c_2^2} \sqrt{1 - \frac{c_R^2}{c_1^2}}} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \left\{ 2 \exp\left[\gamma(z-a) \sqrt{1 - \frac{c_R^2}{c_1^2}}\right] - \right. \\ & \left. - \left(2 - \frac{c_R^2}{c_2^2}\right) \exp\left[\gamma(z-a) \sqrt{1 - \frac{c_R^2}{c_2^2}}\right] \right\} \sin \Omega. \end{aligned}$$

Полученные формулы справедливы, если  $\gamma z \gg \pi$ , т.е. в приповерхностном слое.

Найдем напряжения на поверхности (при  $z = a$ ). Напряжения  $\sigma_{zz}$  и  $\sigma_{xz}$  равны нулю согласно граничным условиям. Выражения для напряжений  $\sigma_{xx}$  и  $\sigma_{yy}$  имеют вид

$$\sigma_{xx} = \frac{\mu U \gamma}{2a \sqrt{1 - \frac{c_R^2}{c_2^2}}} \left( 2 - \frac{c_R^2}{c_2^2} \right) \left( \frac{c_R^2}{c_2^2} - \frac{c_R^2}{c_1^2} \right) \times \exp \left( \gamma a \sqrt{1 - \frac{c_R^2}{c_1^2}} \right) \exp \left( \gamma a \sqrt{1 - \frac{c_R^2}{c_2^2}} \right) \cos \Omega. \quad (47)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{\mu U \gamma}{4a \sqrt{1 - \frac{c_R^2}{c_2^2}}} \left( 2 - \frac{c_R^2}{c_2^2} \right) \left( \frac{c_R^2}{c_2^2} - 2 \frac{c_R^2}{c_1^2} \right) \times \exp \left( \gamma a \sqrt{1 - \frac{c_R^2}{c_1^2}} \right) \exp \left( \gamma a \sqrt{1 - \frac{c_R^2}{c_2^2}} \right) \cos \Omega. \quad (48)$$

Здесь  $\sigma_{xx}$  всегда больше  $\sigma_{yy}$ . Отсюда можно сделать вывод, что максимальное поверхностное напряжение (максимальное первое главное напряжение  $\sigma_1$ ) имеет следующий вид

$$\max_{z=a} \sigma_1 = \frac{\mu U \gamma}{2a \sqrt{1 - \frac{c_R^2}{c_2^2}}} \left( 2 - \frac{c_R^2}{c_2^2} \right) \left( \frac{c_R^2}{c_2^2} - \frac{c_R^2}{c_1^2} \right) \times \exp \left( \gamma a \sqrt{1 - \frac{c_R^2}{c_1^2}} \right) \exp \left( \gamma a \sqrt{1 - \frac{c_R^2}{c_2^2}} \right). \quad (49)$$

Рассмотрим теперь напряжения на срединной плоскости ( $z = 0$ ):

$$\sigma_{xx} = \mu U \gamma^2 \left[ \left( 2 - \frac{c_R^2}{c_2^2} \right) \left( 2 - 2 \frac{c_R^2}{c_1^2} + \frac{c_R^2}{c_2^2} \right) \times \frac{\exp \left( \gamma a \sqrt{1 - \frac{c_R^2}{c_2^2}} \right) - 4 \left( 1 - \frac{c_R^2}{c_1^2} \right)}{2 \gamma a \sqrt{1 - \frac{c_R^2}{c_2^2}}} \times \frac{\exp \left( \gamma a \sqrt{1 - \frac{c_R^2}{c_1^2}} \right)}{2 \gamma a \sqrt{1 - \frac{c_R^2}{c_1^2}}} \right] \cos \Omega = \frac{\mu U \gamma}{2a \sqrt{1 - \frac{c_R^2}{c_2^2}}} \times \left( 2 - \frac{c_R^2}{c_2^2} \right) \left[ \left( 2 - 2 \frac{c_R^2}{c_1^2} + \frac{c_R^2}{c_2^2} \right) \times \left[ \exp \left( \gamma a \sqrt{1 - \frac{c_R^2}{c_2^2}} \right) - \left( 2 - \frac{c_R^2}{c_2^2} \right) \exp \left( \gamma a \sqrt{1 - \frac{c_R^2}{c_1^2}} \right) \right] \right] \cos \Omega, \quad (50)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{\mu U \gamma}{2a \sqrt{1 - \frac{c_R^2}{c_2^2}}} \left( 2 - \frac{c_R^2}{c_2^2} \right) \times \left( \frac{c_R^2}{c_2^2} - 2 \frac{c_R^2}{c_1^2} \right) \exp \left( \gamma a \sqrt{1 - \frac{c_R^2}{c_2^2}} \right) \cos \Omega, \quad (51)$$

$$\sigma_{zz} = \frac{-\mu U \gamma}{2a \sqrt{1 - \frac{c_R^2}{c_2^2}}} \left[ \left( 2 - \frac{c_R^2}{c_2^2} \right)^2 \exp \left( \gamma a \sqrt{1 - \frac{c_R^2}{c_2^2}} \right) - 4 \sqrt{1 - \frac{c_R^2}{c_1^2}} \sqrt{1 - \frac{c_R^2}{c_2^2}} \exp \left( \gamma a \sqrt{1 - \frac{c_R^2}{c_1^2}} \right) \right] \cos \Omega = \quad (52) (52)$$

$$= \frac{\mu U \gamma}{2a \sqrt{1 - \frac{c_R^2}{c_2^2}}} \left( 2 - \frac{c_R^2}{c_2^2} \right)^2 \times \left[ \exp \left( \gamma a \sqrt{1 - \frac{c_R^2}{c_1^2}} \right) - \exp \left( \gamma a \sqrt{1 - \frac{c_R^2}{c_2^2}} \right) \right] \cos \Omega, \quad (53)$$

$$\sigma_{xz} = 0.$$

Рассмотрим отношение этих напряжений к

$$\max_{z=a} \sigma_1 = \frac{\sigma_{xx}}{\max_{z=a} \sigma_1} = \left[ \frac{2c_1^2 c_2^2 - 2c_R^2 c_2^2 + c_R^2 c_1^2}{c_R^2 (c_1^2 - c_2^2)} \times \exp \left( -\gamma a \sqrt{1 - \frac{c_R^2}{c_1^2}} \right) - \frac{c_1^2 2c_2^2 - c_R^2}{c_R^2 c_1^2 - c_2^2} \exp \left( -\gamma a \sqrt{1 - \frac{c_R^2}{c_2^2}} \right) \right] \cos \Omega, \quad (54)$$

$$\frac{\sigma_{yy}}{\max_{z=a} \sigma_1} = \frac{c_1^2 - 2c_2^2}{c_1^2 - c_2^2} \exp \left( -\gamma a \sqrt{1 - \frac{c_R^2}{c_1^2}} \right) \cos \Omega, \quad (55)$$

$$\frac{\sigma_{zz}}{\max_{z=a} \sigma_1} = \frac{c_1^2 2c_2^2 - c_R^2}{c_R^2 c_1^2 - c_2^2} \times \left[ \exp \left( -\gamma a \sqrt{1 - \frac{c_R^2}{c_2^2}} \right) - \exp \left( -\gamma a \sqrt{1 - \frac{c_R^2}{c_1^2}} \right) \right] \cos \Omega. \quad (56)$$

Как видим из полученных выражений, их амплитуды представляют собой линейные комбинации экспонент с отрицательными показателями. Таким образом, при увеличении  $\gamma$  все компоненты смещений на срединной плоскости по отношению к  $\max_{z=a} \sigma_1$  стремятся к нулю.

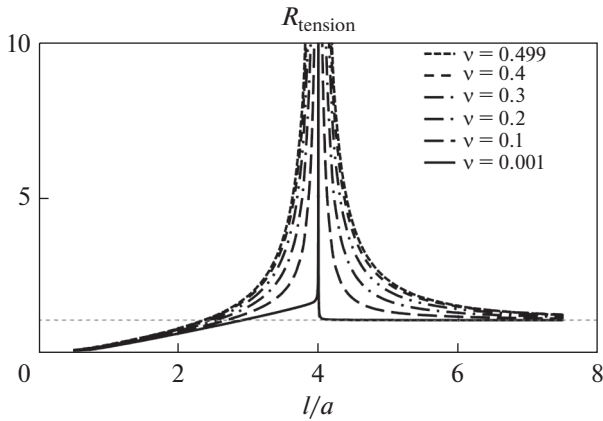


Рис. 2. Отношение максимальных срединных растягивающих напряжений к поверхностным (симметричная фундаментальная мода).

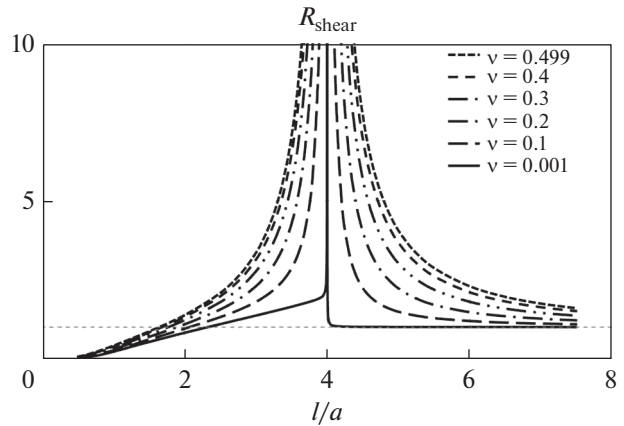


Рис. 3. Отношение максимальных срединных сдвиговых напряжений к поверхностным (симметричная фундаментальная мода).

### 3. СРЕДНЕВОЛНОВОЙ ДИАПАЗОН

Исходя из анализа предельных приближений, напряжения на срединной плоскости пластины не превышают максимальное растягивающее напряжение на поверхности и для длинных волн, и для коротких. Можно было бы предположить, что это утверждение справедливо и для волн, чья длина сравнима с толщиной слоя ( $0.1 < l/(2a) < 10$ ).

Однако численные расчеты для фундаментальной моды показали, что это не так. Введем величины  $R_{\text{tension}} = \max_{z=0} \sigma_1 / \max_{z=a} \sigma_1$  и  $R_{\text{shear}} = \max_{z=0} \sigma_M / \max_{z=a} \sigma_M$ . Отношение  $R_{\text{tension}}$  показывает, во сколько раз максимальное растягивающее напряжение на срединной плоскости пластины больше, чем максимальное растягивающее напряжение на поверхности. Отношение  $R_{\text{shear}}$  имеет такой же смысл, только для максимальных сдвигов. На рис. 2 и 3 представлены распределения отношений  $R_{\text{tension}}$  и  $R_{\text{shear}}$  в зависимости от длины волны относительно толщины пластины. Серая пунктирная горизонталь соответствует равенству максимальных напряжений (растягивающих или сдвиговых) на поверхности и на срединной плоскости. Как видно на графиках, для каждого значения коэффициента Пуассона (в работе рассмотрены  $0 < \nu < 0.5$ ) существует длина волны в диапазоне от  $2a$  до  $3a$ , для которой максимальные растягивающие напряжения на поверхности и на срединной плоскости равны. Для более длинных волн растягивающие напряжения на поверхности оказываются меньше, чем при  $z = 0$ . Более того, расчеты показали, что для волны с фазовой скоростью  $c = c_2 \sqrt{2}$  все компоненты напряжений на поверхности стремятся к нулю.

Рассмотрим этот случай (коэффициент Пуассона  $\nu$  положителен). Для удобства введем константу

$$\eta = \sqrt{1 - 2 \frac{c_2^2}{c_1^2}} = \sqrt{\frac{\nu}{1 - \nu}}$$

Так как  $c_2 < c_2 \sqrt{2} < c_1$ , то смещения волны Лэмба в общем виде описываются следующим образом:

$$\begin{aligned} u_x &= -\gamma [A \operatorname{ch}(\gamma z \eta) - iB \cos(\gamma z)] \sin \Omega; \\ u_z &= \gamma [A \eta \operatorname{sh}(\gamma z \eta) - iB \sin(\gamma z)] \cos \Omega; \\ u_y &= 0. \end{aligned} \quad (57)$$

Отсюда получаем напряжения из закона Гука:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= 2\mu \gamma^2 \times \\ &\times \left[ -(\eta^2 + 1) A \operatorname{ch}(\gamma z \eta) + iB \cos(\gamma z) \right] \cos \Omega, \\ \sigma_{yy} &= -2\mu \gamma^2 \eta^2 A \operatorname{ch}(\gamma z \eta) \cos \Omega, \\ \sigma_{zz} &= -2\mu \gamma^2 iB \cos(\gamma z) \cos \Omega, \\ \sigma_{xz} &= -2\mu \gamma^2 \eta A \operatorname{sh}(\gamma z \eta) \sin \Omega. \end{aligned} \quad (58)$$

Отношение констант  $A$  и  $B$  определяется граничными условиями. Граничные условия (поверхность слоя свободна от внешних нагрузок):

$$\sigma_{zz}|_{z=\pm a} = \sigma_{xz}|_{z=\pm a} = 0, \quad (59)$$

$$2\mu \gamma^2 iB \cos(\gamma a) \cos \Omega = 0; \quad (60)$$

$$2\mu \gamma^2 \eta A \operatorname{sh}(\gamma a \eta) \sin \Omega = 0; \quad (61)$$

Функция  $\operatorname{sh}(\gamma a \eta)$  равна нулю только если  $\gamma a \eta = 0$ , т.е.  $\gamma = 0$ . Однако, в данном случае волна просто отсутствует. Значит, второе уравнение имеет единственное решение  $A = 0$ .

Чтобы не получить нулевое решение, коэффициент  $B$  должен быть отличен от нуля. Тогда получаем

$$\cos(\gamma a) = 0 \Rightarrow \gamma a = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (62)$$

Длина волны здесь равна

$$l = \frac{2\pi}{\gamma} = \frac{4a}{1 + 2n}. \quad (63)$$

Для фундаментальной моды ( $n = 0$ ) длина волны  $l = 4a$ , т.е. равна удвоенной толщине пластины.

Итак, НДС описывается следующим образом:

$$\begin{aligned} u_x &= \gamma i B \cos(\gamma z) \sin \Omega; \\ u_z &= -\gamma i B \sin(\gamma z) \cos \Omega; \quad u_y = 0; \\ \varepsilon_{xx} &= \gamma^2 i B \cos(\gamma z) \cos \Omega; \\ \varepsilon_{zz} &= -\gamma^2 i B \cos(\gamma z) \cos \Omega; \quad \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{xz} = 0; \\ \sigma_{xx} &= 2\mu \gamma^2 i B \cos(\gamma z) \cos \Omega; \\ \sigma_{zz} &= -2\mu \gamma^2 i B \cos(\gamma z) \cos \Omega; \quad \sigma_{yy} = \sigma_{xz} = 0. \end{aligned} \quad (64)$$

Отметим, что материал находится в состоянии чистого сдвига, т.е. первый инвариант напряжений (всестороннее изотропное напряжение) равен нулю.

Очевидно (см. (62)), что в данном случае ( $c = c_2\sqrt{2}$ ) на поверхности слоя ( $z = \pm a$ ) все компоненты смещений, деформаций и напряжений (за исключением  $u_z$ ) равны нулю (что и объясняет сингулярности на графиках рис. 2 и 3). Такую волну можно назвать внутренней: основное деформирование материала и его напряжения происходят в толще конструкции, не проявляясь на поверхности.

Здесь относительная амплитуда изменения толщины равна:

$$\delta_z = \max_{z=a} u_z/a = \gamma i B/a. \quad (65)$$

Соответственно,

$$iB = a\delta_z/\gamma. \quad (66)$$

В итоге получаем следующую форму НДС:

$$\begin{aligned} u_x &= a\delta_z \cos(\gamma z) \sin \Omega; \quad u_z = -a\delta_z \sin(\gamma z) \cos \Omega; \\ u_y &= 0; \\ \varepsilon_{xx} &= \gamma a \delta_z \cos(\gamma z) \cos \Omega; \\ \varepsilon_{zz} &= -\gamma a \delta_z \cos(\gamma z) \cos \Omega; \quad \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{xz} = 0; \\ \sigma_{xx} &= 2\mu \gamma a \delta_z \cos(\gamma z) \cos \Omega; \\ \sigma_{zz} &= -2\mu \gamma a \delta_z \cos(\gamma z) \cos \Omega; \quad \sigma_{yy} = \sigma_{xz} = 0. \end{aligned} \quad (67)$$

В частности, для фундаментальной моды  $l = 4a$ , т.е.  $\gamma a = \pi/2$ :

$$\begin{aligned} u_x &= a\delta_z \cos\left(\frac{\pi z}{2a}\right) \sin \Omega; \\ u_z &= -a\delta_z \sin\left(\frac{\pi z}{2a}\right) \cos \Omega; \quad u_y = 0; \\ \varepsilon_{xx} &= \frac{\pi}{2} \delta_z \cos\left(\frac{\pi z}{2a}\right) \cos \Omega; \\ \varepsilon_{zz} &= -\frac{\pi}{2} \delta_z \cos\left(\frac{\pi z}{2a}\right) \cos \Omega; \quad \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{xz} = 0; \\ \sigma_{xx} &= \pi \mu \delta_z \cos\left(\frac{\pi z}{2a}\right) \cos \Omega; \\ \sigma_{zz} &= -\pi \mu \delta_z \cos\left(\frac{\pi z}{2a}\right) \cos \Omega; \quad \sigma_{yy} = \sigma_{xz} = 0. \end{aligned} \quad (68)$$

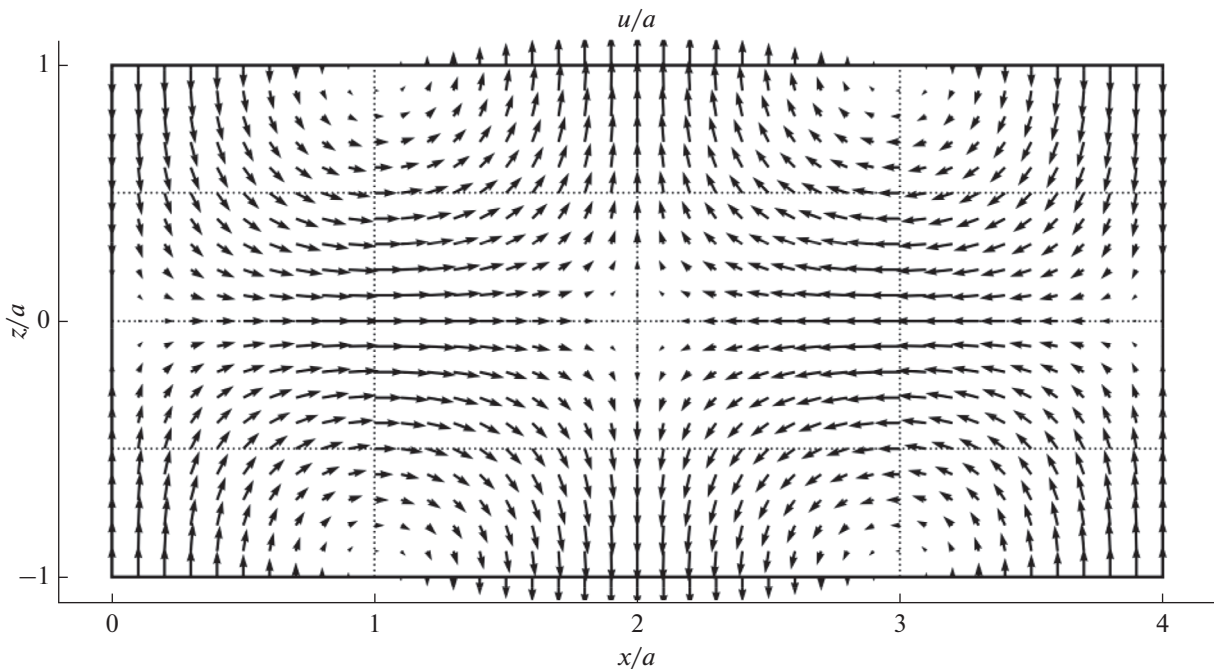


Рис. 4. Распределение относительных смещений в сечении пластины вдоль распространения волны (максимальная длина вектора соответствует  $\delta_z$ ).



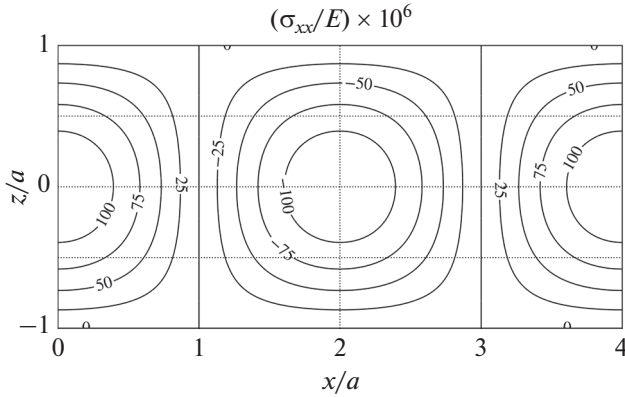


Рис. 5. Распределение относительных продольных напряжений в сечении пластины вдоль плоскости распространения волны.

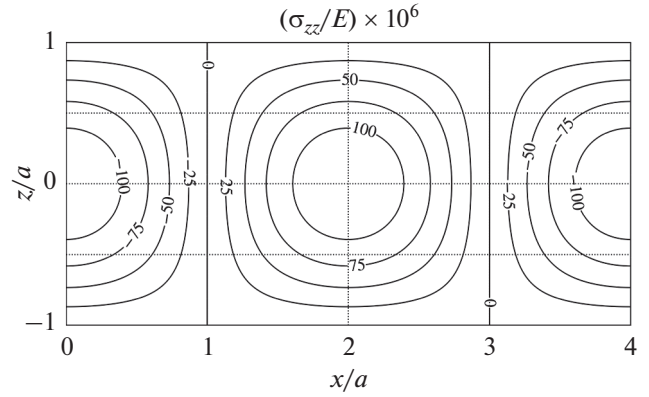


Рис. 6. Распределение относительных поперечных напряжений в сечении пластины вдоль плоскости распространения волны.

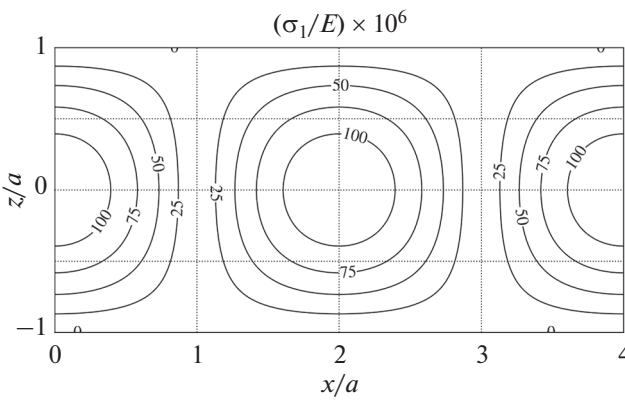


Рис. 7. Распределение относительных максимальных растягивающих напряжений в сечении пластины вдоль плоскости распространения волны.

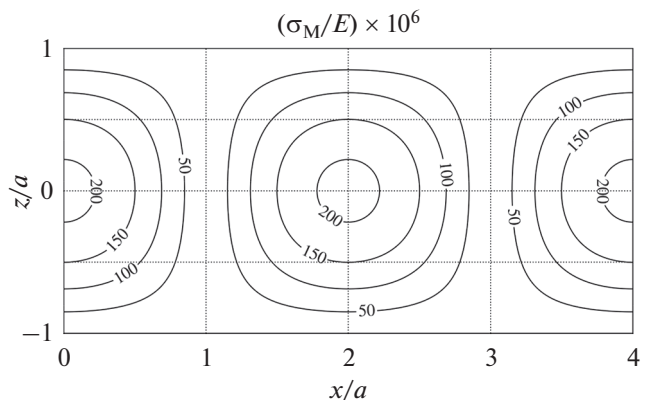


Рис. 8. Распределение относительных максимальных сдвиговых напряжений в сечении пластины вдоль плоскости распространения волны.

Представленные ниже графики относятся к фундаментальной моде рассматриваемой волны ( $c = c_2\sqrt{2}$ ) в стальной пластине ( $E = 210$  ГПа,  $\mu = 82$  ГПа,  $\nu = 0.28$ ), если  $\delta_z = 10^{-4}$ .

На рис. 4 изображено распределение смещений  $u$ , где видно, что на поверхности волна имеет поперечный вид, а на срединной плоскости, напротив, продольный.

На рис. 5 и 6 представлены распределения продольных ( $\sigma_{xx}$ ) и поперечных ( $\sigma_{zz}$ ) напряжений, вид которых подтверждает, что материал находится в состоянии чистого сдвига:  $\sigma_{xx} = -\sigma_{zz}$ .

На рис. 7 и 8 представлены распределения максимального растягивающего напряжения (первого напряжения,  $\sigma_1$ ) и максимального сдвига (напряжения фон Мизеса [16],  $\sigma_M$ ). Распределения подтверждают, что напряжения на поверхности равны нулю.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Анализ напряжений в упругой пластине в процессе распространения волны Лэмба показал, что для волны средней длины (т.е. длины, сравнимой с толщиной пластины) растягивающие и сдвиговые напряжения на средней плоскости пластины могут многократно превышать поверхностные напряжения. Более того, обнаружена внутренняя волна, чьи поверхностные напряжения и деформации, а также продольные смещения, равны нулю (в рамках модели малых деформаций), найдена ее фазовая скорость  $c = c_2\sqrt{2}$  (длина волны равна  $l = 4a/(2n + 1)$ , где  $n \geq 0$  – номер моды).

В этом случае контроль НДС конструкции с помощью поверхностных сенсоров (как в [12]) становится неэффективен, и необходимо искать другие способы контроля.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-01-00100.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lamb H.* On waves in an elastic plate // Proc. R. Soc. A. 1917. V. 93. P. 293–312.
2. *Кольский Г.* Волны напряжения в твердых телах. М.: Изд-во иностранной литературы, 1955. 194 с.
3. *Achenbach J.D.* Wave propagation in elastic solids. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1973. 431 p.
4. *Graff K.F.* Wave motion in elastic solids. New York: Dover, 1991. 649 p.
5. *Huang T. et al.* Based on auxetic foam: A novel type of seismic metamaterial for Lamb waves // Engng. Struct. 2021. V. 246. 112976. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2021.112976>
6. *Kuznetsov S.V.* Lamb waves in anisotropic plates (Review) // Acoust. Phys. 2014. V.60. N. 1. P. 95–103. <https://doi.org/10.1134/S1063771014010084>
7. *Kuznetsov S.V.* Cauchy formalism for Lamb waves in functionally graded plates // J. Vibr. Control. 2019. V. 25. № 6. P. 1227–1232. <https://doi.org/10.1177/1077546318815376>
8. *Ilyashenko A.V., Kuznetsov S.V.* Lamb waves in functionally graded and laminated composites // J. Theor. Comp. Acoust. 2020. V. 28. № 3. 1950021. <https://doi.org/10.1142/S259172851950021X>
9. *Ewing W.M., Jardetzky W.S., Press F.* Elastic Waves in Layered Media. New York: McGraw-Hill Book Company, Inc. 1957. 390 pp.
10. *Alleyne D., Cawley P.* The Interaction of Lamb Waves with Defects // IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control. 1992. V. 39. № 3. P. 381–397.
11. *Alleyne D., Cawley P.* The use of Lamb waves for the long range inspection of large structures // Ultrasonics. 1996. V. 34. P. 287–290.
12. *Su Zh., Ye L.* Identification of damage using Lamb waves. Berlin: Springer-Verlag. 2009. 357 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-84882-784-4>
13. *Зверев А.Я., Черных В.В.* Экспериментальное определение акустических и виброакустических характеристик многослойных композитных панелей // Акуст. журн. 2018. Т. 64. № 6. С. 727–736. <https://doi.org/10.1134/S0320791918060151>
14. *Квашнин Г.М., Сорокин Б.П., Бурков С.И.* Возбуждение поверхностных акустических волн и волн Лэмба на СВЧ в пьезоэлектрической слоистой структуре на основе алмаза // Акуст. журн. 2021. Т. 67. № 1. С. 45–54. <https://doi.org/10.31857/S0320791921010020>
15. *Муякшин С.И., Диденкулов И.Н., Вьюгин П.Н., Чернов В.В., Денисов Д.М.* Исследование метода обнаружения и локализации неоднородностей в пластинах с использованием волн Лэмба // Акуст. журн. 2021. Т. 67. № 3. С. 270–274. <https://doi.org/10.31857/S0320791921030114>
16. *Ишлинский А.Ю., Ивлев Д.Д.* Математическая теория пластичности. М.: Физматлит, 2003. 704 с.