АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2022, том 68, № 2, с. 173–181

ФИЗИЧЕСКАЯ АКУСТИКА

УДК 534.138

ЯЧЕЕЧНЫЕ МОДЕЛИ ВЯЗКОУПРУГОЙ СРЕДЫ С ТВЕРДЫМИ СФЕРИЧЕСКИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ

© 2022 г. Л. И. Казаков*

Физический факультет МГУ, Москва, Ленинские горы, 119991 Россия

**e-mail: lev-kazakov@rambler.ru*

Поступила в редакцию 02.04.2020 г.
После доработки 03.09.2021 г.
Принята к публикации 30.11.2021 г.

Приведен расчет акустических характеристик композитной среды в виде резины с твердыми включениями, предложенной ранее в качестве звукопоглощающего материала с независимыми от гидростатического давления свойствами. Расчет основан на применении к такой композитной среде ячеечных моделей монодисперсных суспензий с граничными условиями на поверхности ячейки в виде тонкой жесткой оболочки или условия Хаппеля. Переход к вязкоупругой среде выполнен заменой вязкости суспензии на величину, пропорциональную комплексному модулю сдвига резины. Учтены только сдвиговые потери в резине. Расчет справедлив в широком диапазоне частот для произвольных объемных концентраций включений. Выполнено сравнение расчетных и имеющихся в литературе экспериментальных данных. Рассмотрены варианты слоистых звукопоглотителей, состоящих из набора покрытых резиной твердых шариков разных размеров, помещенных в маловязкую сжимаемую полиметилсилоксановую жидкость.

Ключевые слова: композитная вязкоупругая среда, ячеечные модели, сферические включения, граничные условия, диссипация звуковой энергии, звукопоглощающие покрытия

DOI: 10.31857/S0320791922020034

ВВЕДЕНИЕ

Искусственная композитная среда, состоящая из резины, в которой равномерно распределены твердые сферические или цилиндрические тяжелые включения, предназначена к использованию в качестве звукопоглощающего материала для облицовки измерительных гидроакустических бассейнов и камер [1, 2]. Когда длина звуковой волны много больше размеров включений и среднего расстояния между ними, композитную среду можно считать “микронеоднородной” с эффективными параметрами – плотностью $\tilde{\rho}$, скоростью звука $\tilde{c}$, волновым числом $\tilde{\kappa} = \omega/\tilde{c}$ и другими [3, § 19]. К расчету акустических характеристик среды можно применить ячеечные модели монодисперсных суспензий. Такая модель представляет собой упорядоченное размещение в вязкой жидкости одинаковых сферических твердых включений радиуса R. Каждое включение окружено слоем жидкости, вместе они составляют ячейку суспензии с внешней поверхностью неизвестной сложной формы. Приближение, обеспечивающее возможность расчета, состоит в представлении этого слоя шаровым с наружным радиусом R_1. Его величину выбирают из условия: $\varepsilon = \xi^3 = (R/R_1)^3$, где ε – объемная концентрация включений в суспензии. Упаковку ячеек считаем плотнейшей гексагональной. Акустические свойства суспензии находят, изучая движение фаз в пробной ячейке.

Общие уравнения движения изотропной вязкоупругой несжимаемой среды (например, резины) отличаются от уравнений Навье–Стокса в случае гармонических колебаний лишь тем, что в них вместо динамической вязкости η_l жидкости стоит величина $i\mu^*/\omega$, где μ^* – комплексный модуль сдвига вязкоупругого материала. Поэтому, сделав в готовых формулах для суспензий замену $\eta_l \to i\mu^*/\omega$, получим акустические характеристики композитной среды “шарики в резине”.

Из-за присущих резине вязких звуковых потерь эффективная плотность $\tilde{\rho}(\omega)$ такой среды является комплексной частотнозависимой величиной [3, с. 405]. При сферических включениях выражение для $\tilde{\rho}(\omega)$ было найдено Г.Д. Малюжинцем на основе модельного рассмотрения движения одиночного шарика в резине в поле гармонической звуковой волны [4], а также И.А. Чабан – применением к этому случаю метода самосогласованного поля [5, формула (46)]. Полученное выражение пригодно для описания резины с шариками малых волновых размеров при неопределенно малых их объемных концентрациях ε.

К вязкоупругим материалам наряду с резиной относятся мягкие пластмассы, смолы, битумы и т.п. Эти вещества занимают промежуточное место между идеально упругими твердыми телами и вязкими несжимаемыми жидкостями, сочетая в себе свойства тех и других. Однородное изотропное вязкоупругое тело, подобно идеально упругому, характеризуют двумя модулями упругости, например, модулем сдвига μ и модулем объемного сжатия K [6, с. 22]. При колебаниях в вязкоупругом теле происходит (как и в вязкой жидкости) диссипация механической энергии за счет внутреннего трения. Поэтому его модули упругости при гармонических колебаниях принципиально комплексные и частотнозависимые величины. Более того, их вещественные и мнимые части однозначно взаимосвязаны отражающими принцип причинности дисперсионными соотношениями типа Крамерса—Кронига [7, 8; 9, § 123].

Важнейшим для резины является комплексный динамический модуль сдвига

$$\mu^*(\omega) = \mu(\omega)\left[1 - i\eta(\omega)\right], \tag{1}$$

где $\mu(\omega)$ — модуль сдвига, $\eta(\omega)$ — коэффициент сдвиговых потерь, причем

$$\left|\mu^*(\omega)\right| \ll K. \tag{2}$$

Кроме того, $\mu(\omega)$ — четная, а $\eta(\omega)$ — нечетная функции частоты ω:

$$\mu(\omega) = \mu(-\omega), \quad \eta(\omega) = -\eta(-\omega).$$

Модули сдвига разных резин отличаются друг от друга в десятки и сотни раз и лежат в пределах $\mu(\omega) = 10^5...10^8$ Па. Коэффициенты сдвиговых потерь резин обычно порядка $\eta(\omega) = 0.1...1.0$. Модули всестороннего сжатия резин примерно такие же, как у воды, и в диапазоне звуковых и ультразвуковых частот практически от частоты не зависят, т.е. их можно считать вещественными величинами. Соотношения (1) и (2) фактически служат определением вязкоупругих “практически несжимаемых”, “водоподобных” веществ [3, с. 446].

Рассматриваемой композитной среде присущи две полезные особенности: 1) резонансное поведение и 2) независимость акустических свойств от гидростатического давления. Акустический резонатор образуют инерционная масса включения, присоединенная масса резины, ее сдвиговая упругость и вязкие потери в резине. Незначительная пьезорасстройка свойств материала обусловлена практической несжимаемостью резины вблизи включения и жесткостью последнего.

КОМПЛЕКСНАЯ ПЛОТНОСТЬ КОМПОЗИТНОЙ СРЕДЫ

Комплексная плотность резины с включениями, подобно общему случаю эмульсий, выражается формулой [13; 10, формула (2)]:

$$\tilde{\rho}(\omega) = \tilde{\rho}_1(\omega) + i\tilde{\rho}_2(\omega) = \rho\left(1 + \zeta\varepsilon\frac{U}{V}\right), \tag{3}$$

где ρ — плотность резины; $\zeta = (\rho' - \rho)/\rho$, ρ' — плотность включения; U — комплексная амплитуда колебательной скорости включения. Для ячейки с жесткой оболочкой скорость V — это скорость оболочки. В общем случае V — заданная скорость резины на поверхности ячейки радиуса R_1 в ее полюсах с координатами $r = R_1$, $\theta = 0$ и $r = R_1$, $\theta = \pi$, где θ — зенитный угол сферической системы координат.

Согласно (3) $\tilde{\rho}$ определяется отношением колебательных скоростей фаз, зависящим от разности их плотностей. За счет разности скоростей происходят вязкие сдвиговые потери звуковой энергии в среде. Для одиночного сферического включения ($\xi \ll 1$) отношение скоростей определяет известная формула Кенига (W. König, 1891 г.), в [10, формула (38)] представленная в виде:

$$\frac{U}{V} = \frac{1 - y + \dfrac{y^2}{3}}{1 - y + \dfrac{y^2(2\zeta + 3)}{9}}, \tag{4}$$

где применительно к данному случаю

$$y = \frac{i\kappa_t R}{\sqrt{1 - i\eta}}, \quad \kappa_t = \omega\sqrt{\frac{\rho}{\mu}} = \frac{\omega}{c_t}, \tag{5}$$

где κ_t — волновое число сдвиговых волн в резине, c_t — скорость их распространения.

Если каждое включение можно считать независимым от других, например, при достаточно малой их концентрации ε, либо при взаимном гашении исходящих от всех соседей сдвиговых волн в резине, то, подставив в (3) формулу Кенига (4), получим:

$$\tilde{\rho}(x) = \rho\left(1 + \zeta\varepsilon\frac{1 - y(x) + \dfrac{y(x)^2}{3}}{1 - y(x) + \dfrac{y(x)^2(2\zeta + 3)}{9}}\right), \tag{6}$$

где

$$x = \kappa_t R. \tag{7}$$

Это и есть упомянутая выше формула Г.Д. Малюжинца и И.А. Чабан. На ней основаны расчеты в работах [1, 2].

Для любой ячеечной модели дисперсной среды неизвестно, как задать граничное условие для тангенциальной скорости V_θ на поверхности ячейки. В работах [11—13] рассмотрены 4 известных варианта таких условий ($n = 0, 1, 2, 3$). Все они установлены эвристическим путем и имеют лишь интуитивные “правдоподобные” обоснования. Но два условия – тонкая жесткая оболочка на поверхности ячейки ($n = 0$) и условие Хаппеля ($n = 2$), постулирующее отсутствие на ней касательных напряжений, – физически состоятельны в том смысле, что в принципе реализуемы. Однако, если условие Хаппеля на практике легко выполнимо (просто нужно обеспечить свободные поверхности ячеек), то снабжение множества сферических ячеек жесткими оболочками проблематично.

Любые расчетные кривые, относящиеся к ($n = 1, 2, 3$)-моделям, близки, причем кривые для модели $n = 1$ всегда лежат между двумя другими. Кривые для моделей с жесткой оболочкой ($n = 0$) заметно отличны от остальных. В работе [10] при сравнении расчетов с известными экспериментами наиболее приемлемой оказалась именно модель с жесткой оболочкой.

Отношение скоростей в n-ой модели для произвольных объемных концентраций включений (произвольных $0 < \xi < 1$) представим в виде:

$$\frac{U}{V} = \frac{1}{1 - iq_n}. \tag{8}$$

Функции q_n для разных граничных условий имеются в работах [10] (для $n = 0$) и [11] (для всех n). Здесь приведем используемые далее, при расчетах звукопоглощающих покрытий, формулы для условия Хаппеля ($n = 2$) [11]:

$$q_2 = i\frac{2\zeta}{9}\xi^2 z^2\left\{-2z\xi + \left[z\left(1 - \frac{\xi}{2} + \frac{3}{2}\xi^2\right) + \frac{z^3}{6}(1 - \xi^3)\right]\mathrm{ch}\left[z(1-\xi)\right] - \left[1 - \frac{3}{2}\xi + \frac{z^2}{2}(1 + \xi^2 - \xi^3)\right]\mathrm{sh}\left[z(1-\xi)\right]\right\}\times$$
$$\times\left\{\left[z(1-\xi) + \frac{z^3}{6}(1 - 3\xi + 2\xi^2) + \frac{z^5}{18}\xi^2\right]\mathrm{ch}\left[z(1-\xi)\right] - \left[1 + \frac{z^2}{6}(3 - 6\xi + 2\xi^2) - \frac{z^4}{6}\xi(1-\xi)\right]\mathrm{sh}\left[z(1-\xi)\right]\right\}^{-1}, \tag{9}$$

где

$$z = \frac{y}{\xi} = \frac{ix}{\xi\sqrt{1 - i\eta}}.$$

Если в дробь точной формулы (9) вместо $\mathrm{sh}\left[z(1-\xi)\right]$ и $\mathrm{ch}\left[z(1-\xi)\right]$ подставить их разложения в ряды Тейлора, справедливые для любых значений аргументов, то окончательно как в числителе, так и в знаменателе дроби получим степенные ряды, начинающиеся с z^5. После сокращения числителя и знаменателя на z^5 придем к альтернативной (тоже точной!) формуле:

$$q_2 = i\frac{2\zeta}{9}\xi^2 z^2\frac{\sum_{m=0}^{\infty}\phi'_{2m}(\xi)\left[z(1-\xi)\right]^{2m}}{\sum_{m=0}^{\infty}\psi'_{2m}(\xi)\left[z(1-\xi)\right]^{2m}}, \tag{10}$$

где

$$\phi'_{2m}(\xi) = \frac{(1-\xi)^3}{(2m+5)!}\times$$
$$\times\left\{(1-\xi)\left[(m+2)(1 - \frac{\xi}{2} + \frac{3}{2}\xi^2) + \xi\right] + \right.$$
$$+\frac{(m+2)(2m+5)}{6}\times$$
$$\left.\times\left[(2m + 3\xi)(1 + \xi + \xi^2) - 3\xi^2\right]\right\},$$

$$\psi'_{2m}(\xi) = \frac{(m+2)}{(2m+5)!}\left\{(1-\xi)^5 + \frac{2m+5}{6}\times\right.$$
$$\times\left[(2m+3)(1-2\xi) - 3 + 6\xi - 2\xi^2\right](1-\xi)^3 +$$
$$+\frac{(m+1)(2m+3)(2m+5)}{9}\times$$
$$\left.\times\,\xi\left[(2m+1)\xi + 3(1-\xi)^2\right]\right\}.$$

Компьютерные расчеты по формулам (9) и (10) дают тождественные результаты в широком диапазоне аргументов при любых значениях ξ.

Приближенные выражения для каждого q_n, справедливые на низких частотах и в области первого резонанса, найдем, представив в соответствующих альтернативных формулах дробь в виде выражения, содержащего ряд только в знаменателе, и оставив в этом ряду лишь два первых слагаемых:

$$q_n \approx -i\frac{2\zeta}{9}x^2\frac{\alpha_n(\xi)}{1 - \frac{(1-\xi)^2\beta_n(\xi)}{\xi^2}x^2 - i\eta}, \tag{11}$$

где

$$\alpha_n(\xi) = \frac{\phi'_{n0}(\xi)}{\psi'_{n0}(\xi)},\quad \beta_n(\xi) = \frac{\psi'_{n1}(\xi)}{\psi'_{n0}(\xi)} - \frac{\phi'_{n1}(\xi)}{\phi'_{n0}(\xi)}.$$

Используя (3) и (8), найдем:

$$\tilde{\rho}_n(x) = \tilde{\rho}_{n1}(x) + i\tilde{\rho}_{n2}(x) = \rho\left(1 + \frac{\zeta\varepsilon}{1 - iq_n(x)}\right). \tag{12}$$

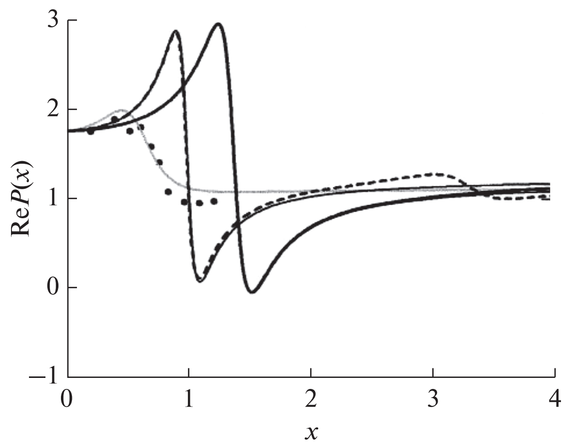

Рис. 1. Вещественные части приведенной комплексной плотности композитной среды: ● – экспериментальные данные работы [4]; —— – расчет по формуле (6); —— – расчет для жесткой оболочки ($n = 0$); --- – расчет по формулам (12), (9) (условие Хаппеля, $n = 2$); —– приближения по формуле (13).

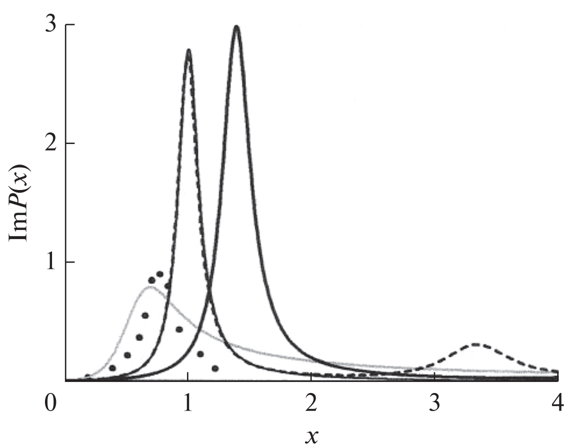

Рис. 2. Мнимые части приведенной комплексной плотности композитной среды. Обозначения такие же, как на рис. 1.

Подставляя в (12) для $q_n(x)$ точные (типа (9)), альтернативные (как (10)), или приближенные (11) выражения, получим варианты представления $\tilde{\rho}_n(x)$. Так, в последнем случае найдем:

$$\tilde{\rho}_n(x) \approx$$
$$\approx \rho\left(1+\frac{\zeta\varepsilon\left[1-\dfrac{(1-\xi)^2\beta_n(\xi)}{\xi^2}x^2-i\eta\right]}{1-\left[\dfrac{2\zeta}{9}\alpha_n(\xi)+\dfrac{(1-\xi)^2}{\xi^2}\beta_n(\xi)\right]x^2-i\eta}\right). \quad (13)$$

На рис. 1 и 2 показаны экспериментальные и расчетные значения компонентов приведенной комплексной плотности $P(x) = \tilde{\rho}(x)/\rho$ среды с параметрами: $\rho = 1.11\times10^3$ кг/м^3, $\rho' = 11.3\times10^3$ кг/м^3 (свинец, $z = 9.18$); $\varepsilon = 0.082$ ($\xi = 0.4344$); $\eta = 0.2$.

Из этих рисунков видно, что эксперимент неплохо описывается лишь формулой (6), предполагающей взаимонезависимость включений. (Аналогичный эффект имеет место и в резиноподобной среде с полостями, где тоже можно считать полости независимыми даже при заметных их концентрациях.) Точные же и приближенные расчетные кривые на рис. 1 и 2 не имеют с экспериментом ничего общего, видимо, потому, что в экспериментальном образце не сформирована ячеечная структура.

Из формулы (13) следуют резонансные значения x и резонансные частоты:

$$x_{nr}(\zeta,\xi) = (\kappa_t R)_{nr} = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{2\zeta}{9}\alpha_n(\xi)+\dfrac{(1-\xi)^2}{\xi^2}\beta_n(\xi)}}, \quad (14)$$

$$f_{nr} = \frac{1}{2\pi R}\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}x_{nr}(\zeta,\xi). \quad (15)$$

Сама приближенная формула (13) справедлива для $0 < x < (2...3)x_{nr}$. Графики функций (14) для $\zeta = 9.18$ (свинец) и $\zeta = 6.094$ (железо) представлены на рис. 3. Эти функции пригодны для $\xi > 0.3$. Точкой показано резонансное значение x в выражении (6) для $\zeta = 9.18$ при $\eta \ll 1$: $x_r = 3/\sqrt{2\zeta+3} = 0.6491$ (для $\zeta = 6.094$, $x_r = 0.7698$). Сравнение (15) с собственной частотой $f_0 = \dfrac{1}{\pi R}\sqrt{\dfrac{\mu}{\rho}}$ пустой полости в резине дает:

$$\frac{f_{nr}}{f_0} = \frac{x_{nr}(\zeta,\xi)}{2}.$$

Дополнительная жесткость, внесенная оболочкой, ожидаемо увеличивает резонансную частоту.

По формулам (12), (9) (для $q_n(x)$) найдем высокочастотное приближение при $x \gg x_{nr}(\zeta,\xi)$ (14) (но ограниченное требованием малости волнового размера ячейки):

$$\tilde{\rho}_{n1}(x) \approx \rho\frac{1+\dfrac{2\zeta}{3}\left(1+\dfrac{\xi^3}{2}\right)}{1+\dfrac{2\zeta}{3}\left(1-\xi^3\right)} = \tilde{\rho}(\infty), \quad (16)$$

$$\tilde{\rho}_{n2}(x) \approx \rho\frac{\zeta^2\xi^3 a_n(\xi)\sqrt{\sqrt{1+\eta^2}+\eta}}{x\left[1+\dfrac{2\zeta}{3}(1-\xi^3)\right]^2}, \quad (17)$$

$$a_0(\xi) = 1+\xi^4, \quad a_1 = a_2 = a_3 = 1.$$

Выражение (16) справедливо и в общем случае эмульсий и суспензий [10, формула (30); 11, с. 36] для любых граничных условий. Легко видеть, что $\tilde{\rho}(\infty) < \tilde{\rho}(0) = \rho'\xi^3 + \rho(1-\xi^3)$, т.к. на высоких частотах массивное включение не полностью увлекается резиной.

ЗАТУХАНИЕ ЗВУКА В КОМПОЗИТНОЙ СРЕДЕ

Комплексная скорость звука $\tilde{c}$ в композитной среде и волновое число $\tilde{\kappa}$ плоской звуковой волны имеют вид [3, с. 28]:

$$\tilde{c} = \frac{1}{\sqrt{\tilde{k}\tilde{\rho}}}, \quad \tilde{\kappa} = \frac{\omega}{\tilde{c}} = \omega\sqrt{\tilde{k}\tilde{\rho}}, \tag{18}$$

где

$$\tilde{k} = k'\xi^3 + k(1-\xi^3), \tag{19}$$

$\tilde{k}$ – эффективная сжимаемость среды [3, с. 57], которую здесь следует считать вещественной величиной, т.к. тепловыми потерями пренебрегаем; $k' = 1/\rho' c'^2$ – сжимаемость включения, c' – скорость звука в его материале; $k = 1/\rho c^2$ – сжимаемость резины, c – скорость звука в ней. Учитывая (19) и (12), комплексное волновое число (18) представим в виде:

$$\tilde{\kappa}_n = \tilde{\kappa}_{n1} + i\tilde{\kappa}_{n2} = \frac{\omega}{\tilde{c}_{nph}} + i\tilde{\kappa}_{n2},$$

где $\tilde{c}_{nph}(x) = \left[\frac{\tilde{k}}{2}\left(\sqrt{\tilde{\rho}_{n1}(x)^2 + \tilde{\rho}_{n2}(x)^2} + \tilde{\rho}_{n1}(x)\right)\right]^{-\frac{1}{2}}$ – фазовая скорость звука в среде;

$$\begin{aligned} \tilde{\kappa}_{n1}(x) &= x\left[\frac{\tilde{k}\mu}{2\rho R^2}\left(\sqrt{\tilde{\rho}_{n1}(x)^2 + \tilde{\rho}_{n2}(x)^2} + \tilde{\rho}_{n1}(x)\right)\right]^{\frac{1}{2}}; \\ \tilde{\kappa}_{n2}(x) &= x\left[\frac{\tilde{k}\mu}{2\rho R^2}\left(\sqrt{\tilde{\rho}_{n1}(x)^2 + \tilde{\rho}_{n2}(x)^2} - \tilde{\rho}_{n1}(x)\right)\right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{20}$$

$\tilde{\kappa}_{n2}(x)$ – амплитудный коэффициент поглощения звука в множителе $e^{-\tilde{\kappa}_{n2}l}$, определяющем убывание амплитуды колебаний с расстоянием l.

На рис. 4 представлены графики зависимостей затухания звука $A_n(x) = 8.686\tilde{\kappa}_{n2}(x)$ (в дБ/м), рассчитанные по формуле (20) с учетом (5), (7), (12) для композитного материала с параметрами: $\varepsilon = 0.082$; $R = 2 \times 10^{-3}$ м; $\mu = 10^6$ Па, $\eta = 0.2$, $\rho = 1.11 \times 10^3$ кг/м^3, $k = 3.52 \times 10^{-10}$ Па$^{-1}$; $\rho' = 11.3 \times 10^3$ кг/м^3, $\zeta = 9.18$, $k' = 2.36 \times 10^{-11}$ Па$^{-1}$ (свинец). Здесь примечательна высокочастотная независимость $A_n(x)$ от аргумента. Среды с такой особенностью известны (см., например, [14, с. 374, 381; 3, с. 398; 10, формула (42)]).

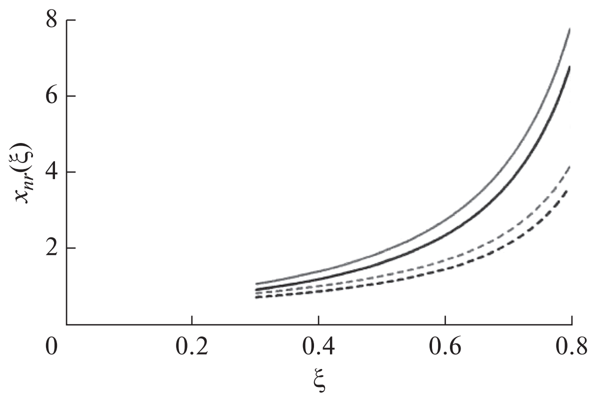

Рис. 3. Резонансные значения $x_{nr}(\zeta,\xi)$ (14) для комплексных плотностей композитных сред: жесткая оболочка: —— – $\zeta = 9.18$ (свинец), —— – $\zeta = 6.094$ (железо); условие Хаппеля: --- – $\zeta = 9.18$, - - - – $\zeta = 6.094$.

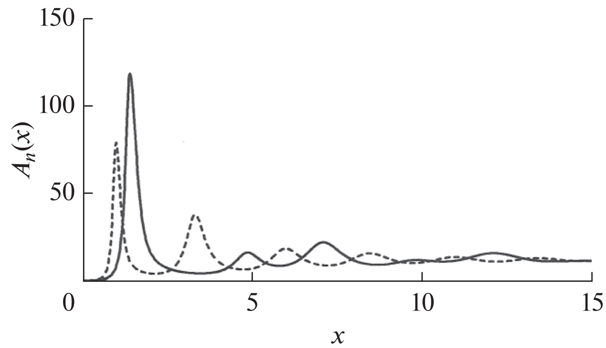

Рис. 4. Зависимости затухания звука (в дБ/м) в композитной среде со свинцовыми включениями: —— – жесткая оболочка, --- – условие Хаппеля.

Асимптотические выражения для амплитудных коэффициентов поглощения найдем с помощью формул (20), (16), (17):

$$\tilde{\kappa}_{n2}(\infty) = \frac{\sqrt{\tilde{k}\mu}\zeta^2\xi^3 a_n(\xi)\sqrt{\sqrt{1+\eta^2}+\eta}}{2R\sqrt{1+\frac{2\zeta}{3}\left(1+\frac{\xi^3}{2}\right)}\left[1+\frac{2\zeta}{3}(1-\xi^3)\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

Волновое сопротивление $\tilde{S}(x) = \tilde{\rho}(x)\tilde{c}(x)$ композитной среды согласно (18) равно:

$$\tilde{S}(x) = \sqrt{\frac{\tilde{\rho}(x)}{\tilde{k}}}. \tag{21}$$

При нормальном падении звука из воды на граничащую с ней композитную среду коэффициент отражения звука определяет формула Френеля [3, с. 132]:

$$\tilde{r}(x) = \frac{\tilde{S}(x) - \rho_0 c_0}{\tilde{S}(x) + \rho_0 c_0} = \frac{\sqrt{\frac{\tilde{\rho}(x)}{\tilde{k}}} - \rho_0 c_0}{\sqrt{\frac{\tilde{\rho}(x)}{\tilde{k}}} + \rho_0 c_0}, \tag{22}$$

где $\rho_0 c_0 = 1.5\times10^6$ кг/м²с – волновое сопротивление воды. Используя (16), по (21) найдем предельное значение $\tilde{S}(x)$ при $x \gg x_{nr}(\zeta,\xi)$:

$$\tilde{S}(\infty) \approx \sqrt{\frac{\rho\left(1+\frac{2\zeta}{3}\left(1+\frac{\xi^3}{2}\right)\right)}{\tilde{k}\left(1+\frac{2\zeta}{3}\left(1-\xi^3\right)\right)}}.$$

Как и (16), оно справедливо для любых граничных условий на поверхности ячейки.

Если на стенку с импедансом Z_0 нанесен плоскопараллельный слой композитного материала толщиной h, то согласно [3, с. 156] входной импеданс слоя

$$\tilde{Z}(x) = i\tilde{S}(x)\frac{Z_0 - i\tilde{S}(x)\,\mathrm{tg}(\tilde{\kappa}(x)h)}{Z_0\,\mathrm{tg}(\tilde{\kappa}(x)h) + i\tilde{S}(x)}. \quad (23)$$

ЗВУКОПОГЛОЩАЮЩЕЕ ПОКРЫТИЕ

Плотность резины несколько больше, а сжимаемость – меньше, чем у воды. Твердые массивные включения только усиливают эти различия. Поэтому для хорошего согласования волновых сопротивлений композитной среды и воды необходимо использовать в покрытии жидкость с плотностью ρ_l меньшей, а сжимаемостью k_l – большей, чем у воды.

Рассмотрим ячеечную модель "суспензии", в которой каждое сферическое включение покрыто шаровым слоем резины. Такое включение с резиной назовем "вкладышем". Таким образом, в получившейся суспензии вкладыши замещают включения исходной суспензии, и плотность ее включений ρ' надо теперь заменить комплексной плотностью $\tilde{\rho}$ вкладышей. Последняя может быть вычислена точно, если резиновую поверхность вкладыша можно считать свободной от касательных напряжений, т.е. при выполнении условия Хаппеля ($n = 2$). Для этого вязкость вмещающей жидкости η_l должна быть достаточно малой: $\eta_l \ll \omega R\rho_l/9$.

Жидкости, удовлетворяющие перечисленным требованиям, существуют – это силиконовые масла. Особенно подходят для наших целей полиметилсилоксановые жидкости (ПМС). Они безвредны для резин, а их свойства мало зависят от температуры. Остановимся на ПМС-0.65 с плотностью $\rho_l = 0.818\times10^3$ кг/м³, сжимаемостью $k_l = 14.74\times10^{-10}$ Па$^{-1}$ (в 3.3 раза большей, чем у воды!), вязкостью – меньшей, чем у воды.

Объемная концентрация вкладышей в суспензии $\bar{\varepsilon} = R_1^3/R_0^3$, где R_0 – внешний радиус ячейки. Благодаря малой вязкости вмещающей жидкости эффективная комплексная плотность $\bar{\rho}(x)$ суспензии принимает вид, аналогичный высокочастотному приближению (16):

$$\frac{\bar{\rho}(x)}{\rho_l} = \frac{1+\frac{2}{3}\frac{\tilde{\rho}_2(x)-\rho_l}{\rho_l}\left(1+\frac{\bar{\varepsilon}}{2}\right)}{1+\frac{2}{3}\frac{\tilde{\rho}_2(x)-\rho_l}{\rho_l}\left(1-\bar{\varepsilon}\right)}, (24) \quad (24)$$

где $\tilde{\rho}_2(x)$ – комплексная плотность вкладыша по (12) для условия Хаппеля. В предельных случаях отсюда следуют правильные соотношения: $\bar{\rho}(x) \to \tilde{\rho}_2(x)$ при $\bar{\varepsilon} \to 1$, $\bar{\rho}(x) \to \rho_l$ при $\bar{\varepsilon} \to 0$. Вещественную сжимаемость $\bar{k}$ среды представляет ее статическое значение:

$$\bar{k} = \tilde{k}\bar{\varepsilon} + k_l(1-\bar{\varepsilon}), \quad (25)$$

где $\tilde{k}$ – сжимаемость вкладыша (19). Соответственно этому для такой среды комплексная скорость звука $\bar{c}$ и волновое число $\bar{\kappa}$ плоской звуковой волны примут аналогичную (18) форму:

$$\bar{c} = \frac{1}{\sqrt{\bar{k}\bar{\rho}}}, \quad \bar{\kappa} = \frac{\omega}{\bar{c}} = \omega\sqrt{\bar{k}\bar{\rho}}.$$

Рассчитаем характеристики пятислойных звукопоглощающих покрытий, состоящих из наборов вкладышей разных размеров, размещенных в жидкости ПМС-0.65. Включения в них имеют радиусы, убывающие по геометрической прогрессии со знаменателем 0.5: R, $R/2$, $R/4$, $R/8$, $R/16$. Для коэффициентов сдвиговых потерь всех применяемых резин возьмем значение, оптимальное для принятого знаменателя прогрессии 0.5: $\eta = 1$. Все вкладыши в данном покрытии считаем геометрически подобными, т.е. для них параметр ξ – один и тот же. Разместим одинаковые вкладыши по примыкающим друг к другу слоям, толщины которых пропорциональны размерам вкладышей, т.е. убывают (в направлении от защищаемой стенки к воде) по такой же геометрической прогрессии: $h_1 = h$; $h_2 = h/2$; $h_3 = h/4$; $h_4 = h/8$; $h_5 = h/16$. Толщина такого пятислойного покрытия составит $H = 1.9375h$. Объемную концентрацию $\bar{\varepsilon}$ вкладышей примем одинаковой во всех слоях.

Подставив (12) в (24), получим:

$$\frac{\bar{\rho}(f)}{\rho_l} = \frac{1+\frac{2}{3}\left[\frac{\rho}{\rho_l}\left(1+\frac{\zeta\xi^3}{1-iq_2(f)}\right)-1\right]\left(1+\frac{\bar{\varepsilon}}{2}\right)}{1+\frac{2}{3}\left[\frac{\rho}{\rho_l}\left(1+\frac{\zeta\xi^3}{1-iq_2(f)}\right)-1\right]\left(1-\bar{\varepsilon}\right)},$$

где f – частота звука в кГц. По (25) и (19) имеем:

$$\bar{k} = \bar{\varepsilon}\left[k'\xi^3 + k(1-\xi^3)\right] + (1-\bar{\varepsilon})k_l.$$

Для m-го слоя волновое число и волновое сопротивление, соответственно, равны:

$$\bar{\kappa}_m(f) = 2\pi \times 10^3 f \sqrt{\bar{k}\bar{\rho}(f 2^{-m+1})},$$

$$\bar{S}_m(f) = \sqrt{\frac{\bar{\rho}(f 2^{-m+1})}{\bar{k}}}.$$

Применив выражение (23) для импеданса нагруженного слоя, найдем:

$$\bar{Z}_m = i\bar{S}_m \frac{\bar{Z}_{m-1} - i\bar{S}_m \operatorname{tg}(\bar{\kappa}_m h_m)}{\bar{Z}_{m-1} \operatorname{tg}(\bar{\kappa}_m h_m) + i\bar{S}_m},$$

где $\bar{Z}_m$ – импеданс на входе m-го слоя. Приняв для определенности защищаемую стенку абсолютно жесткой с импедансом $Z_0 = \infty$, получим:

$$\bar{Z}_1 = \frac{i\bar{S}_1}{\operatorname{tg}(\bar{\kappa}_1 h_1)}.$$

Для каждого варианта пятислойного покрытия на жесткой стенке будут вычислены [3, с. 144, формула (45.4)]: коэффициент отражения

$$r_5(f) = \left|\frac{\bar{Z}_5(f) - 1.5 \times 10^6}{\bar{Z}_5(f) + 1.5 \times 10^6}\right| \qquad (26)$$

и подобный (22) коэффициент отражения от композитной среды, частью которой является самый тонкий, пятый слой покрытия, примыкающий к лицевой плоскости

$$r_s(f) = \left|\frac{\bar{S}_5(f) - 1.5 \times 10^6}{\bar{S}_5(f) + 1.5 \times 10^6}\right|. \qquad (27)$$

Нижнюю частоту $f_{\min}$ рабочего диапазона покрытия определим условием $r_5(f_{\min}) = 0.2$. Верхняя частота $f_{\max}$ выбрана из условия

$$\frac{\bar{\kappa}_5(f_{\max})R_5}{\xi\bar{\varepsilon}^{1/3}} = \frac{\pi}{4},$$

когда ячейки в наружном слое еще можно считать малыми по сравнению с длиной звуковой волны в этом слое, т.е. частота $f_{\max}$ – это верхняя граница применимости теории, но не истинного рабочего диапазона.

Плотность ρ и сжимаемость k применяемых резин будем считать такими же, как на рис. 4. В первых двух вариантах (рис. 5, 6) включения железные: $\rho' = 7.87 \times 10^3$ кг/м^3, $\zeta = 6.094$, $k' = 0.584 \times 10^{-11}$ Па$^{-1}$. Для улучшения характеристик поглощения вблизи $f_{\min}$ толщина h_1 первого слоя увеличена. В каждом случае находим относительную толщину покрытия $L = H/\lambda(f_{\min})$, где $\lambda(f_{\min})$ – длина звуковой волны в воде на частоте $f_{\min}$, а также объемную концентрацию включений $\xi^3\bar{\varepsilon}$.

При заданных параметрах включений, резины, жидкости и выбранном значении $\bar{\varepsilon}$ из уравнения $\bar{S}_1(0) = 1.5 \times 10^6$ найдем требуемое значение ξ.

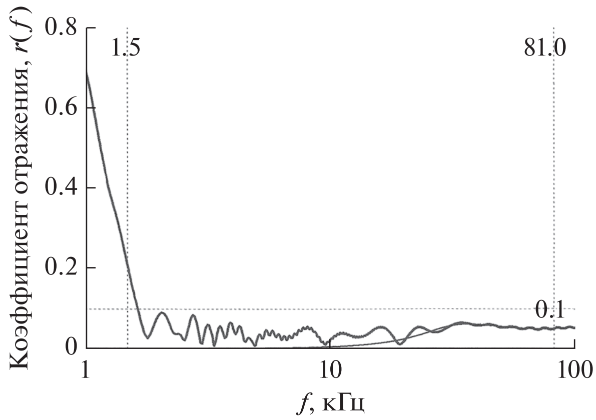

Рис. 5. Характеристики слоистого звукопоглощающего покрытия при плотнейшей упаковке вкладышей с железными включениями: —— – $r_5(f)$, —— – $r_S(f)$.

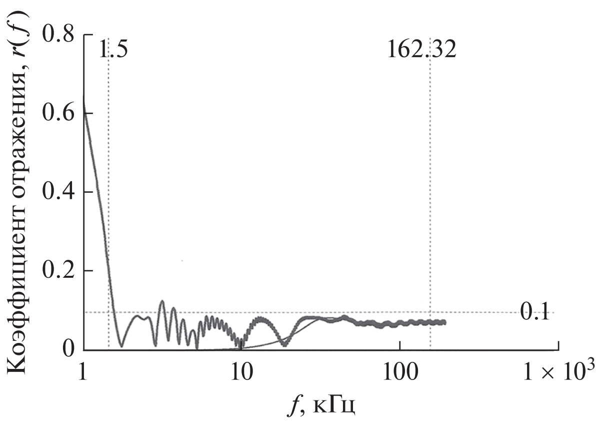

Рис. 6. То же, что на рис. 5, но для $\bar{\varepsilon} = 0.62$ и другого набора параметров.

Положим $\bar{\varepsilon} = 0.74$, тогда $\xi = 0.4556$. Такой выбор упрощает размещение вкладышей в пространстве: они будут просто лежать друг на друге, образуя плотнейшую упаковку. В двенадцати точках соприкосновения каждого вкладыша с соседями взаимодействие между ними будет исключено смазкой маловязкой внешней жидкостью, обеспечивающей выполнение условия Хаппеля и в этих точках.

Пример такого покрытия показан на рис. 5, где $\mu = 10^7$ Па; $R = 12.08$ мм; $h = 0.998$ м; $H = 2.133$ м; $L = 2.133$; $\xi^3\bar{\varepsilon} = 0.07$; $h_1 = 1.2h$; $f_{\min} = 1.5$ кГц; $f_{\max} = 81.0$ кГц; ширина полосы поглощения $\Delta f_{0.2} = 5.75$ октавы. Тонкая кривая представляет величину (27). Видим, что на частотах в диапазоне 30–81 кГц кривые коэффициентов отражения (26) и (27) сливаются. Это означает, что тонкий

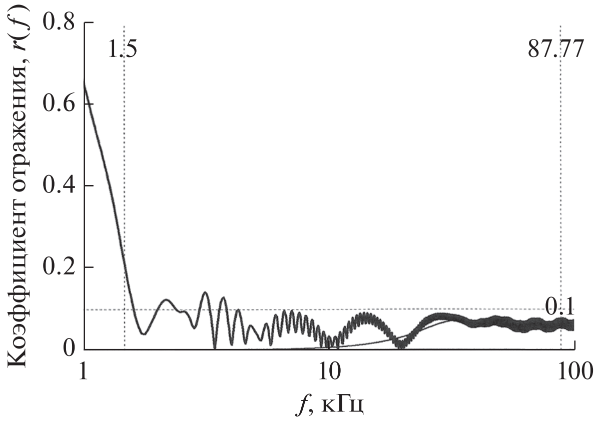

Рис. 7. Характеристики покрытия с плотнейшей упаковкой вкладышей со свинцовыми включениями.

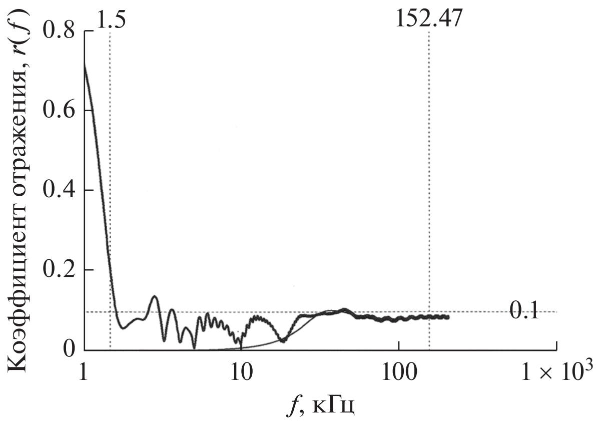

Рис. 8. То же, что на рис. 7, но для $\overline{\varepsilon} = 0.58$ и другого набора параметров.

наружный слой h_5 покрытия для такого высокочастотного звука является как бы полубесконечным. Если параметры R и H уменьшить в 2 раза, то $f_{\min}$ и $f_{\max}$ в 2 раза увеличатся, т.е. весь график рис. 5 сместится вправо на одну октаву, а $\Delta f_{0.2}$ и L не изменятся. Недостаток покрытия – большое значение L, обусловленное большим относительным содержанием в нем малосжимаемой резины.

На рис. 6 показано то же, что и на рис. 5, но для набора параметров: $\mu = 10^6$ Па; $\overline{\varepsilon} = 0.62$, $\xi = 0.65$; $R = 7.3$ мм; $h = 0.474$ м; $H = 1.204$ м; $L = 1.204$; $\xi^3\overline{\varepsilon} = 0.17$; $h_1 = 1.6h$; $f_{\min} = 1.5$ кГц; $f_{\max} = 162.32$ кГц; $\Delta f_{0.2} = 6.75$ октавы. По сравнению с рис. 5 здесь L в 1.77 раза меньше, а $\Delta f_{0.2}$ на октаву больше.

Следующие два рисунка относятся к покрытиям со свинцовыми включениями: $\rho' = 11.3 \times 10^3$ кг/м^3, $\zeta = 9.18$, $k' = 2.36 \times 10^{-11}$ Па$^{-1}$. На рис. 7 – $\mu = 10^7$ Па; $\overline{\varepsilon} = 0.74$, $\xi = 0.4047$; $R = 10$ мм; $h = 0.525$ м; $H = 1.385$ м; $L = 1.385$; $\xi^3\overline{\varepsilon} = 0.049$; $h_1 = 1.7h$; $f_{\min} = 1.5$ кГц; $f_{\max} = 87.77$ кГц; ширина полосы поглощения $\Delta f_{0.2} = 5.87$ октавы. По сравнению с рис. 5 здесь L в 1.54 раза меньше, а $\Delta f_{0.2}$ несколько шире.

На рис. 8 – $\mu = 10^6$ Па; $\overline{\varepsilon} = 0.58$, $\xi = 0.67$; $R = 7.56$ мм; $h = 0.478$ м; $H = 0.927$ м; $L = 0.927$; $\xi^3\overline{\varepsilon} = 0.174$; $h_1 = h$; $f_{\min} = 1.5$ кГц; $f_{\max} = 152.47$ кГц; $\Delta f_{0.2} = 6.66$ октавы.

Значения $\overline{\varepsilon}$ на рис. 6 и 8 входят а диапазон концентраций, характерных для случайных упаковок шаров.

В расчетах рис. 5–8 было принято: $\eta = 1$. На практике это не реализуемо: коэффициент сдвиговых потерь резины $\eta(\omega)$, как правило, растет с частотой. Такое изменение $\eta(\omega)$ можно учесть, используя либо более дробный спектр размеров включений и вкладышей в слоях покрытия, либо увеличивая число его более тонких однородных слоев.

Модуль сдвига резины $\mu(\omega)$ тоже, обычно, растет с частотой. Это можно учесть надлежащим выбором размеров включений в слоях. Величина же модуля сдвига может быть практически любой. Жесткую резину ($\mu \sim 10^8$ Па) можно заменить, например, полистиролом, или строительным битумом.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе ячеечной модели суспензий путем замены в ней динамической вязкости вмещающей жидкости на величину $i\mu^*(\omega)/\omega$ предложена теория вязкоупругой среды с твердыми сферическими включениями. Она применима при четырех известных граничных условиях на поверхности ячеек и справедлива для любых концентраций включений в широком диапазоне частот, ограниченном только требованием малости волновых размеров ячеек. Для комплексной плотности такой композитной среды найдены также приближенные формулы, справедливые в широкой области частот вблизи резонанса включений. В частотной области выше резонанса обнаружена независимость амплитудного коэффициента поглощения звука в среде от частоты.

Предложен новый тип звукопоглощающей композитной среды, состоящей из покрытых резиной массивных шариков, помещенных в маловязкую, легкую и сжимаемую полиметилсилоксановую жидкость. Даны примеры расчетов нескольких вариантов широкополосных гидроакустических звукопоглощающих покрытий.

Расчетные формулы представляются вполне надежными, поскольку параметры $\tilde{\rho}$ и $\tilde{k}$ вкладышей со свободной поверхностью вычислены точно. Обилие в формулах варьируемых параметров дает возможность более тщательного, чем в приведенных примерах, конструирования покрытия с целью расширения полосы поглощения звука, особенно в сторону низких частот, увеличения степени поглощения звука и уменьшения толщины покрытия. Взаимонезависимость вкладышей, разделенных почти идеальной жидкостью, обеспечивает дополнительные возможности и упрощения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Викторова Р.Н., Тютекин В.В.* Физические основы создания звукопоглощающих материалов с использованием среды с комплексной плотностью // Акуст. журн. 1998. Т. 44. № 3. С. 331–336.
2. *Крынкин С.В., Тютекин В.В.* Оптимизация характеристик звукопоглощающих материалов на основе резиноподобных сред с тяжелыми включениями // Акуст. журн. 2002. Т. 48. № 4. С. 523–532.
3. *Исакович М.А.* Общая акустика. Учебное пособие. М.: Наука, 1973. 495 с.
4. *Вовк А.Е., Викторова Р.Н.* О возможности приближенного расчета эффективной плотности упругой среды с твердыми включениями // Труды Акуст. инст. 1971. Т. 10.
5. *Чабан И.А.* Расчет эффективных параметров микронеоднородных сред методом самосогласованного поля // Акуст. журн. 1965. Т. 11. № 1. С. 102–109.
6. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория упругости. 4-е изд., испр. и дополн. М.: Наука, 1987. 248 с.
7. *Гинзбург В.Л.* Об общей связи между поглощением и дисперсией звуковых волн // Акуст. журн. 1955. Т. 1. № 1. С. 31–39.
8. *Нуссенцвейг Х.М.* Причинность и дисперсионные соотношения / Пер. с англ. М.: Мир, 1976. 461 с.
9. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Статистическая физика. Часть 1. 3-е изд., дополн. М.: Наука, 1976. 583 с.
10. *Казаков Л.И.* О распространении звука в дисперсных средах // Акуст. журн. 2018. Т. 64. № 3. С. 330–341.
11. *Казаков Л.И.* Ячеечные модели суспензий сферических частиц при разных граничных условиях // NOISE Theory and Practice. 2019. Т. 5. № 4. С. 27–40.
12. *Казаков Л.И.* Ячеечные модели суспензий цилиндрических частиц при разных граничных условиях // NOISE Theory and Practice. 2019. Т. 5. № 2. С. 39–48.
13. *Казаков Л.И.* Динамика капель в электрокапиллярных акустических преобразователях. Дисс. … к.ф.-м.н. Владивосток, 1985. 114 с.
14. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Механика сплошных сред. 2-е изд., перераб. и доп. М.: ГИТТЛ, 1954. 795 с.