

КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ  
И ТЕОРИИ ВОЛН

УДК 539.3;534.1;534.16

ИЗГИБНЫЕ КРОМОЧНЫЕ ВОЛНЫ КОНЕНКОВА  
В СЛОИСТО-ИЗОТРОПНЫХ И ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНЫХ  
ПЛАСТИНАХ

© 2021 г. Д. Д. Захаров\*

Российский университет транспорта (РУТ-МИИТ), ул. Образцова 9, стр. 9, Москва, 127994 Россия

\*e-mail: dd\_zakh@mail.ru

Поступила в редакцию 08.11.2020 г.

После доработки 15.03.2021 г.

Принята к публикации 23.04.2021 г.

Рассматриваются изгибные кромочные волны в тонких пластинах из изотропных (трансверсально-изотропных) слоев с возможной несимметричной укладкой или из функционально-градиентного материала, чьи характеристики непрерывно изменяются по толщине. Лицевые поверхности пластины предполагаются свободными от напряжений. Таким образом, получается связанная задача динамического изгиба и квазистатического плоского напряженного состояния пластины. В отличие от рассмотренных ранее общих ситуаций с анизотропными материалами, за счет выбора системы координат здесь можно реализовать разделение уравнений изгиба и плоской задачи и минимизировать связность краевых условий. Кроме того, часть характеристических корней операторов будут кратными. Дисперсионное уравнение получается в явном виде и, кроме известной составляющей, полученной Коненковым, оно содержит поправочную часть, зависящую от безразмерных мембранно-изгибных жесткостей. Получено его решение, проанализировано влияние параметров. Приводятся примеры расчета дисперсионных кривых.

*Ключевые слова:* волны Коненкова, слоистые пластины, функционально-градиентные материалы, дисперсионные кривые

DOI: 10.31857/S0320791921040134

ВВЕДЕНИЕ

Начало исследований изгибных волн кромочного типа в тонких телах (в частности, в тонких пластинах) традиционно отсчитывают с работы [1] с последующим обращением к той же теме в статьях [2–4]. На этом этапе использовались длинноволновые низкочастотные теории пластин типа Кирхгофа–Лява. Далее было показано, что подобные кромочные волны могут быть также топографического характера [5] или распространяться вдоль контактной кромки [6–8].

Усложнение свойств в виде анизотропии упругих материалов и/или использование пакета слоев не обладает “запирающим” эффектом, но приводит к существенному усложнению дисперсионных свойств кромочной волны [9–17].

Продвижение в область более высоких частот потребовало для анализа дисперсионных свойств привлечения теорий типа Тимошенко–Рейсснера [18, 19], итерационно-асимптотических подходов [20], прямых численных методов [20–24] или проекционных методов решения трехмерных краевых задач [25]. Полученные результаты ока-

зались хорошо согласованными как между собой, так и с первыми экспериментальными исследованиями изгибных кромочных волн [26].

Именно численными методами были впервые выявлены кромочные волны высших порядков — не “фундаментальные”, т.е. такие, что существуют не при любых частотах, начиная с нулевой, а только выше некоторой конечной критической частоты [24]. Более регулярное исследование кромочных волн высших порядков представлено в [27].

Среди работ последних лет можно отметить анализ кромочных волн в изотропной пластине на упругом (винклеровском) основании [28–30], а также локализованных волн в пластине с кромкой, усиленной другой пластиной в виде широкой полосы из иного упругого материала [31, 32].

В данной работе приводятся результаты исследования фундаментальных изгибных кромочных волн в пластине из упругих или трансверсально-упругих слоев с несимметричной укладкой по толщине. С одной стороны, это менее общая ситуация, чем в случае анизотропии материалов бо-

лее общего вида [13, 14], но с другой — она позволяет получить основные результаты в замкнутом виде и выделить наиболее существенные параметры. Кроме того, аналогичный метод удастся применить и к пластине из функционально-градиентного материала с непрерывной изменемостью свойств по толщине пластины. В этом и состоит новизна исследования. Распространение волн в телах из функционально-градиентных материалов с плоской или цилиндрической геометрией исследовалось в работах [33–36]. Работы по краевым волнам в таких структурах в литературе, по-видимому, пока отсутствуют.

### УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ И КРАЕВЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ ИЗОТРОПНО-СЛОИСТЫХ ПЛАСТИН

Рассмотрим тонкий пакет несимметричного строения, составленный из слоев с упругими постоянными общего вида. Межслойный контакт предполагается идеальным. Обозначим полную толщину пакета  $H = 2h$ ; введем продольные декартовы координаты  $x_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2$  ( $\mathbf{x} = \mathbf{i}_\alpha x_\alpha$ ) и поперечную координату  $x_3 = z$ . В постоянных матрицах жесткостей слоев  $\mathbf{G}_j = \|g_{mn}\|_j$  ( $m, n = 1, 2, 3, 4, 5, 6; j$  — номер слоя) с ненулевыми элементами соответствие индексов отвечает следующим подстановкам  $1, 2, 3, 4, 5, 6 \leftrightarrow 11, 22, 33, 23, 13, 12$ . Далее примем, что внутреннее напряженно-деформированное состояние слоистого пакета является длинноволновым. Асимптотически точные математические модели движения таких пакетов были получены в [37–39] и обладают преемственностью по отношению к классическим соотношениям теории пластин Кирхгофа–Лява. Нормальный прогиб  $w$  и вектор продольных перемещений  $\mathbf{u}$  при этом имеют вид

$$w = w(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, t) - z \nabla w, \quad (\nabla \equiv \mathbf{i}_\alpha \partial_\alpha; \alpha = 1, 2). \quad (1)$$

Продольные напряжения в  $j$ -м слое  $z_j \leq z \leq z_{j+1}$  выражаются формулой ( $\alpha, \beta = 1, 2$ )

$$\sigma_{\alpha\beta}^j = \chi_{\alpha\beta}(\mathbf{\Gamma}_j)(\mathbf{u}_0 - z \nabla w), \quad \begin{bmatrix} \chi_{11} \\ \chi_{12} \\ \chi_{22} \end{bmatrix}(\mathbf{\Gamma}_j) \equiv \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{16} & \gamma_{12} \\ \gamma_{16} & \gamma_{66} & \gamma_{26} \\ \gamma_{12} & \gamma_{26} & \gamma_{22} \end{bmatrix}_j \times \begin{bmatrix} \partial_1 & 0 \\ \partial_2 & \partial_1 \\ 0 & \partial_2 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

где  $\mathbf{\Gamma}_j \equiv \|\gamma_{pq}\|_j$  ( $p, q = 1, 6, 2$ ) — матрица эффективных жесткостей в слое  $j$ . Ее элементы равны отношению определителей миноров исходной матрицы  $\mathbf{G}$ :  $\gamma_{pq} \equiv \det \mathbf{G}_q^p / \det \mathbf{G}_0$ ,  $\mathbf{G}_0 \equiv \mathbf{G} \begin{pmatrix} 345 \\ 345 \end{pmatrix}$ , минор  $\mathbf{G}_q^p$  получается окаймлением  $p$ -й строкой и  $q$ -м

столбцом минора  $\mathbf{G}_0$  снизу и справа, соответственно.

Продольные усилия  $Q_{\alpha\beta}$  и изгибающие моменты  $M_{\alpha\beta}$  получаются интегрированием по толщине напряжений (2) с соответствующим весом

$$\begin{aligned} Q_{\alpha\beta} &= \chi_{\alpha\beta}(\mathbf{D}_1) \mathbf{u}_0 - \chi_{\alpha\beta}(\mathbf{D}_2) \nabla w, \\ M_{\alpha\beta} &= \chi_{\alpha\beta}(\mathbf{D}_2) \mathbf{u}_0 - \chi_{\alpha\beta}(\mathbf{D}_3) \nabla w, \\ \mathbf{D}_k &\equiv k^{-1} \sum_j (z_{j+1}^k - z_j^k) \mathbf{\Gamma}_j, \end{aligned} \quad (3)$$

а поперечные усилия выражаются привычным образом  $Q_{\alpha z} = \partial_\beta M_{\alpha\beta}$ . Мембранные жесткости  $\mathbf{D}_1$  отвечают задаче о плоском напряженном состоянии, изгибные жесткости  $\mathbf{D}_3$  — задаче изгиба пластины, а ненулевые мембранно-изгибные жесткости  $\mathbf{D}_2$  приводят к связанности обоих процессов. В отсутствие нагрузок на лицевых поверхностях пакета уравнения движения принимают вид [10] ( $\alpha, \beta = 1, 2$ ):

$$\begin{aligned} \partial_\beta \chi_{\alpha\beta}(\mathbf{D}_1) \mathbf{u}_0 - \partial_\beta \chi_{\alpha\beta}(\mathbf{D}_2) \nabla w &= 0, \\ -\partial_{\alpha\beta}^2 \chi_{\alpha\beta}(\mathbf{D}_2) \mathbf{u}_0 + [\partial_{\alpha\beta}^2 \chi_{\alpha\beta}(\mathbf{D}_3) \nabla + \rho \partial_t^2] w &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\rho$  обозначает эффективную плотность пакета по толщине:

$$\rho = \sum_j \rho_j (z_{j+1} - z_j). \quad (5)$$

При симметричном расположении слоев относительно нейтральной плоскости  $\mathbf{D}_2 = 0$ , и квазистатическая задача о плоском напряженном состоянии полностью отделяется, а последнее из уравнений (4) совпадает с классическим уравнением изгиба [34, 35]. Краевые условия на торце пластины формулируются в перемещениях, углах поворота сечений  $\theta_\alpha = -\partial_\alpha w$ , продольных усилиях и/или изгибающих моментах (3) и перерезывающих усилиях Кирхгофа  $N_{\alpha z} = Q_{\alpha z} + \partial_\beta M_{\alpha\beta}$  (суммирование по повторяющимся индексам в последней формуле не проводится).

Пусть теперь пластина совершает гармонические колебания с циклической частотой  $\omega$ , занимает в плане область  $-\infty < x_1 < \infty$ ,  $x_2 \geq 0$  и ее кромка  $x_2 = 0$  свободна от напряжений. Изгибные волны Коненкова распространяются вдоль края и экспоненциально затухают с удалением от него вглубь пластины (см. рис. 1), т.е. образуются парциальными волнами вида

$$w = Ae^{i(\omega t - k_1 x_1) - k_1 \xi x_2}, \quad \mathbf{u}_0 = Be^{i(\omega t - k_1 x_1) - k_1 \xi x_2}, \quad (k_1, \xi \geq 0). \quad (6)$$

Амплитуды парциальных волн  $w^*$ ,  $u_\alpha^*$  сначала будем предполагать постоянными. Искомое решение (6) должно удовлетворять системе уравнений (4) и условию свободного края  $x_2 = 0$ :

$$Q_{12} = Q_{22} = 0, \quad M_{22} = 0, \quad N_{2z} = 0. \quad (7)$$

В такой постановке для анизотропии материалов слоев общего вида кромочные волны были изучены в работах [3, 14]. Заметим, что получаемые для общего случая результаты опираются на предварительный анализ характеристических корней операторов [13] или матричный анализ по методу Стро [14], что затрудняет получение дисперсионных уравнений в замкнутом виде.

Ниже рассмотрим более простую ситуацию для изотропных слоев, несимметрично расположенных по толщине пластины. Отметим, что для этого случая среди характеристических корней операторов, вообще говоря, есть кратные корни.

Выражения для осредненных жесткостей в слое упрощаются следующим образом (в очевидных случаях номер слоя опускаем):

$$\begin{aligned} \gamma_{11} = \gamma_{22} = \gamma_{12} + 2\gamma_{66} &= \frac{E}{1-\nu^2}, \\ \gamma_{12} = \frac{\nu E}{1-\nu^2}, \quad \gamma_{66} &= \frac{E}{2(1+\nu)}, \\ \gamma_{16} = \gamma_{26} &= 0, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $E$  – модуль Юнга,  $\nu$  – коэффициент Пуассона материала. Это также означает, что если система координат по вертикали расположена так, что выполнено условие

$$\frac{1}{2} \sum_j \left( \frac{E}{1-\nu^2} \right)_j (z_{j+1}^2 - z_j^2) = 0, \quad (9)$$

то  $\partial_{\beta} \chi_{\alpha\beta}(\mathbf{D}_2) \nabla \equiv 0$ ,  $\partial_{\alpha\beta}^2 \chi_{\alpha\beta}(\mathbf{D}_2) \equiv 0$  и уравнения движения (4) полностью разделяются на изгибное уравнение и систему уравнений для обобщенного плоского напряженного состояния. Условие (9) всегда выполнимо, т.к. при заданных толщинах слоев  $h_j = z_{j+1} - z_j$  сводится, например, к уравнению для координаты нижней лицевой поверхности (всегда отрицательной)

$$\begin{aligned} z_1 \sum_j \left( \frac{E}{1-\nu^2} \right)_j h_j + \sum_j \left( \frac{E}{1-\nu^2} \right)_j h_j \times \\ \times \left( h_1 + \dots + h_{j-1} + \frac{h_j}{2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Тогда система из трех уравнений (4) упрощается. Первое уравнение – уравнение динамического изгиба принимает вид  $(\Delta \equiv \partial_1^2 + \partial_2^2)$

$$d_3 \Delta^2 w + \rho d_7^2 w = 0, \quad (11)$$

с параметрами

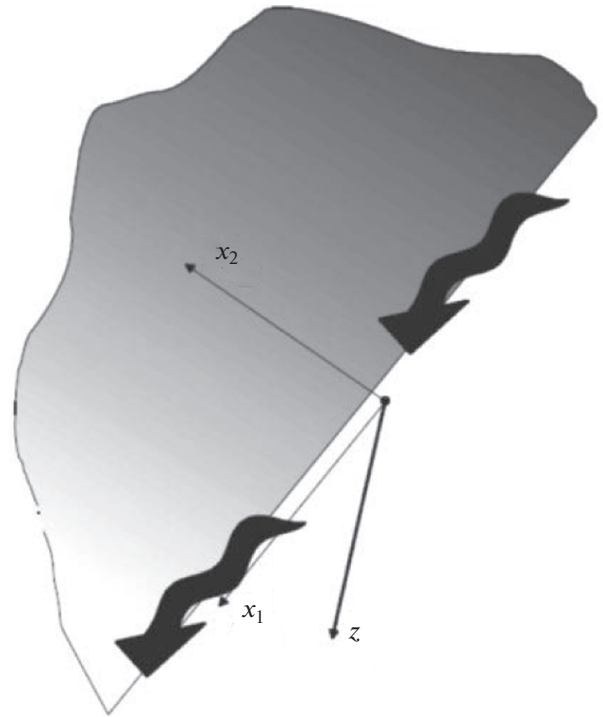


Рис. 1. Изгибная кромочная волна.

$$\begin{aligned} d_3 &= \frac{1}{3} \sum_j \left( \frac{E}{1-\nu^2} \right)_j (z_{j+1}^3 - z_j^3), \\ \nu_3 &= \frac{1}{3d_3} \sum_j \left( \frac{\nu E}{1-\nu^2} \right)_j (z_{j+1}^3 - z_j^3) \end{aligned} \quad (12)$$

и дополняется вторым и третьим из уравнений (4) – квазистатическими уравнениями плоской задачи

$$\begin{aligned} d_1 \left\{ \left( \partial_1^2 + \frac{1-\nu_1}{2} \partial_2^2 \right) u_1 + \frac{1+\nu_1}{2} \partial_{12}^2 u_2 \right\} = 0, \\ d_1 \left\{ \frac{1+\nu_1}{2} \partial_{12}^2 u_1 + \left( \partial_2^2 + \frac{1-\nu_1}{2} \partial_1^2 \right) u_2 \right\} = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

с параметрами

$$\begin{aligned} d_1 &= \sum_j \left( \frac{E}{1-\nu^2} \right)_j (z_{j+1} - z_j), \\ \nu_1 &= \frac{1}{d_1} \sum_j \left( \frac{\nu E}{1-\nu^2} \right)_j (z_{j+1} - z_j). \end{aligned}$$

Получающийся общий множитель  $d_1$  в уравнениях (13) может быть сокращен.

Матрица  $\mathbf{D}_2$  мембранно-изгибных жесткостей содержит, вообще говоря, два ненулевых элемента

$$\begin{aligned} d_{12}^{(2)} &= \frac{1}{2} \sum_j \left( \frac{\nu E}{1-\nu^2} \right)_j (z_{j+1}^2 - z_j^2), \\ d_{66}^{(2)} &= \frac{1}{4} \sum_j \left( \frac{E}{1+\nu} \right)_j (z_{j+1}^2 - z_j^2). \end{aligned} \quad (14)$$

В силу условия (9)  $d_{12}^{(2)} + 2d_{66}^{(2)} = 0$  и далее полагаем

$$d_2 = d_{12}^{(2)}, \quad d_{66}^{(2)} = -\frac{1}{2}d_2. \quad (15)$$

Краевые условия на торце  $x_2 = 0$  для разделившихся уравнений остаются связанными:

$$\begin{aligned} Q_{12} &\equiv d_1(1 - \nu_1)\varepsilon_{12} - d_2\theta_{12} = 0, \\ Q_{22} &\equiv d_1(\nu_1\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + d_2\theta_{11} = 0, \\ M_{22} &\equiv d_2\varepsilon_{11} + d_3(\nu_3\theta_{11} + \theta_{22}) = 0, \\ N_{2z} &\equiv \partial_2\{d_2\varepsilon_{11} + d_3(\nu_3\theta_{11} + \theta_{22})\} + \\ &+ 2\partial_1\{-d_2\varepsilon_{12} + d_3(1 - \nu_3)\theta_{12}\} = 0, \end{aligned} \quad (16)$$

где  $\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\partial_\alpha u_\beta + \partial_\beta u_\alpha)$ ,  $\theta_{\alpha\beta} = -\partial_{\alpha\beta} w$ .

### ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ И ЕГО АНАЛИЗ

Подстановка соотношений (6) в уравнение изгиба (11) приводит к тем же соотношениям, что и в работе [1]

$$s^4 \equiv (1 - \xi^2)^2 = \frac{\rho}{d_3 k_1^4} \frac{\omega^2}{\omega^2 d_3} = \frac{\rho}{\omega^2 d_3} \left(\frac{\omega}{k_1}\right)^4. \quad (17)$$

Параметр  $s$  есть безразмерная фазовая скорость искомой кромочной волны, нормированная на скорость изгибной волны Кирхгофа–Лява

$$s = \frac{V}{V_B}, \quad V = \frac{\omega}{k_1}, \quad V_B = \left(\frac{\omega^2 d_3}{\rho}\right)^{1/4}. \quad (18)$$

Соответственно, для параметра затухания и парциальных волн получаем выражения:

$$\xi_{1,2} = (1 \pm s^2)^{1/2}, \quad (19)$$

$$w = (A_1 e^{-k_1 \xi_1 x_2} + A_2 e^{-k_1 \xi_2 x_2}) e^{i(\omega t - k_1 x_1)}. \quad (20)$$

Далее начинаются различия. За счет полного разделения уравнений изгиба и плоской задачи и за счет квазистатической природы плоского напряженного состояния в таком масштабе времени, подстановка продольных перемещений (6) в уравнения (13) дает равенство

$$(1 - \xi^2)^2 = 0, \quad (21)$$

и кромочной волне соответствует корень  $\xi = 1$  кратности 2. Тогда соответствующие перемещения приводятся к виду

$$\begin{aligned} u_1 &= (k_1 x_2 B + D) e^{i(\omega t - k_1 x_1) - k_1 x_2}, \\ u_2 &= i \left( -k_1 x_2 B - \frac{3 - \nu_1}{1 + \nu_1} B - D \right) e^{i(\omega t - k_1 x_1) - k_1 x_2}. \end{aligned} \quad (22)$$

Краевые условия (16) для поля перемещений (20), (22) дают следующее матричное уравнение

$$\mathbf{M} \times \mathbf{C} = 0, \quad (23)$$

$$\mathbf{C} = \left[ A_1 \quad A_2 \quad \frac{iB}{(1 + \nu_1)k_1} \quad \frac{iD}{k_1} \right]^T, \quad (24)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \frac{d_2 \xi_1}{d_1} & \frac{d_2 \xi_2}{d_1} & (1 - \nu_1)^2 & 1 - \nu_1 \\ \frac{d_2}{d_1} & \frac{d_2}{d_1} & 2(1 - \nu_1) & 1 - \nu_1 \\ \nu_3 - \xi_1^2 & \nu_3 - \xi_2^2 & 0 & \frac{d_2}{d_3} \\ (\nu_3 - \xi_2^2)\xi_1 & (\nu_3 - \xi_1^2)\xi_2 & \frac{(3 - \nu_1)d_2}{d_3} & \frac{d_2}{d_3} \end{bmatrix}. \quad (25)$$

Приравнивание к нулю определителя матрицы (25) дает дисперсионное уравнение

$$f(s^2) \equiv K(s^2, \nu_3) + g(s^2, \nu_1, \nu_3, a) = 0. \quad (26)$$

Первая компонента в уравнении (26) совпадает с известным выражением для изгиба [1], зависящим от приведенного коэффициента Пуассона  $\nu_3$

$$K(s^2, \nu_3) \equiv (\nu_3 - \xi_2^2)^2 \xi_1 - (\nu_3 - \xi_1^2)^2 \xi_2 \quad (27)$$

с соответствующим корнем  $s_0: K(s_0^2, \nu_3) = 0$ ,

$$\begin{aligned} s_0 &= \left\{ (1 - \nu_3) \left( 3\nu_3 - 1 + 2\sqrt{1 - 2\nu_3 + 2\nu_3^2} \right) \right\}^{1/4} = \\ &= 1 - \frac{\nu_3^4}{16} - \frac{\nu_3^5}{8} - \frac{5\nu_3^6}{32} + O(\nu_3^7). \end{aligned} \quad (28)$$

Вторая компонента появляется за счет связности краевых условий (16). Эта компонента зависит от двух приведенных коэффициентов Пуассона  $\nu_3$  и  $\nu_1$  для изгибной и плоской задачи, соответственно, и, что более существенно, от отношения мембранно-изгибной жесткости  $d_2$  к изгибной и мембранной жесткостям

$$\begin{aligned} g(s^2, \nu_1, \nu_3, a) &= 4s^2 a \left\{ \xi_1 \xi_2 - \frac{1 - \nu_1}{2} (\xi_1 + \xi_2) + 1 \right\} + \\ &+ 2a (\xi_1 - \xi_2) (1 - \nu_1) (1 - \nu_3) - \\ &- a^2 (\xi_1 - \xi_2) (3 - \nu_1) (1 + \nu_1), \end{aligned} \quad (29)$$

$$a = \frac{(d_2)^2}{d_1 d_3 (1 - \nu_1^2)}. \quad (30)$$

При  $d_2 = 0$  ( $a = 0$ ) получим уравнение для классической волны Коненкова  $K(s^2, \nu_3) = 0$ .

Непосредственной подстановкой можно показать, что функция  $f(s^2)$  обладает следующими свойствами

$$f(0) = 0, \quad f(1) \frac{\partial f(s^2)}{\partial s^2} \Big|_{s=0} < 0, \quad (31)$$

т.е. ее значение в окрестности точки  $s = 0$  противоположно по знаку значению при  $s = 1$ . Отсюда,

в силу непрерывности функции, уравнение (26) всегда имеет корень  $s \in (0, 1)$ .

В случае малых значений параметра  $a \ll 1$  для этого корня можно получить приближенное выражение

$$s^2 = s_0^2 (1 + Ca + O(a^2)), \quad (32)$$

$$C = \frac{2 \left\{ \xi_1 \xi_2 - \frac{1-v_1}{2} (\xi_1 + \xi_2) + 1 \right\} + \frac{\xi_1 - \xi_2}{s_0^2} (1-v_1)(1-v_3)}{\left( v_3 - \xi_2^2 \right) \xi_1 + \frac{(v_3 - \xi_2^2)^2}{4\xi_1} - (v_3 - \xi_1^2) \xi_2 + \frac{(v_3 - \xi_1^2)^2}{4\xi_2}} \Big|_{s=s_0}. \quad (33)$$

**ОБОБЩЕНИЕ МОДЕЛИ  
ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНЫХ  
МАТЕРИАЛОВ**

Предположим теперь, что в пластине плотность  $\rho(z)$  и параметры упругости  $E(z)$ ,  $\nu(z)$  непрерывно зависят от поперечной координаты  $z$ :  $z_- \leq z \leq z_+$ ,  $H = z_+ - z_-$ . Рассматривая эту ситуацию как предельный переход от пластины с растущим числом слоев исчезающе малой толщины и полагая  $\Delta z_j = z_{j+1} - z_j$ , получаем для плотности и жесткостей

$$\rho = \sum_j \rho_j \Delta z_j \rightarrow \int_{z_-}^{z_+} \rho(z) dz, \quad (34)$$

$$d_1 = \sum_j \left( \frac{E}{1-\nu^2} \right)_j \Delta z_j \rightarrow \int_{z_-}^{z_+} \frac{E(z)}{1-\nu^2(z)} dz, \quad (35)$$

$$\nu_1 = \frac{1}{d_1} \sum_j \left( \frac{\nu E}{1-\nu^2} \right)_j \Delta z_j \rightarrow \frac{1}{d_1} \int_{z_-}^{z_+} \frac{\nu(z) E(z)}{1-\nu^2(z)} dz,$$

$$d_3 = \frac{1}{3} \sum_j \left( \frac{E}{1-\nu^2} \right)_j (z_{j+1}^3 - z_j^3) = \sum_j \left( \frac{E}{1-\nu^2} \right)_j \Delta z_j \left( \frac{\Delta z_j^2}{3} + z_{j+1} z_j \right) \rightarrow \int_{z_-}^{z_+} \frac{E(z) z^2}{1-\nu^2(z)} dz, \quad (36)$$

$$\nu_3 = \frac{1}{3d_3} \sum_j \left( \frac{\nu E}{1-\nu^2} \right)_j (z_{j+1}^3 - z_j^3) \rightarrow \frac{1}{d_3} \int_{z_-}^{z_+} \frac{\nu(z) E(z) z^2}{1-\nu^2(z)} dz. \quad (37)$$

$$d_2 = \sum_j \left( \frac{\nu E}{1-\nu^2} \right)_j \Delta z_j \left( \frac{z_{j+1} + z_j}{2} \right) \rightarrow \int_{z_-}^{z_+} \frac{\nu(z) E(z) z}{1-\nu^2(z)} dz, \quad (38)$$

$$d_2 = d_{12}^{(2)}, \quad d_{66}^{(2)} = -\frac{1}{2} d_2.$$

Уравнение (9) для выбора координаты нижней лицевой поверхности  $z_-$ , соответственно, примет вид

$$\sum_j \left( \frac{E}{1-\nu^2} \right)_j \Delta z_j \left( \frac{z_{j+1} + z_j}{2} \right) \rightarrow \int_{z_-}^{z_+H} \frac{E(z) z}{1-\nu^2(z)} dz = 0. \quad (39)$$

Вывод и анализ дисперсионного уравнения краевой изгибной волны далее может быть проведен так же, как и в предыдущем параграфе, изменяется лишь способ нахождения коэффициентов. Такими же прозрачными предельными переходами можно получить (при необходимости) формулы напряжений более высокого асимптотического порядка малости  $\sigma_{\alpha z}^j$  и  $\sigma_{zz}^j$  из полученных в [37–39] для слоистой пластины. Здесь они примут следующий вид

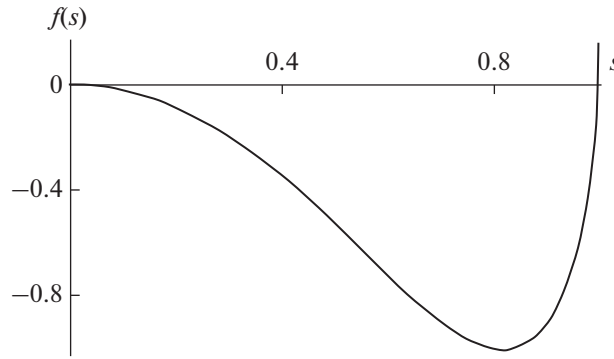


Рис. 2. Пример поведения функции  $f(s)$ .

$$\begin{aligned} \sigma_{\beta z} = & \frac{\tau_{\beta}^+ + \tau_{\beta}^-}{2} + \frac{1}{2} \left\{ \int_z^{z_+} - \int_z^- \right\} \partial_{\beta} \chi_{\alpha\beta}(\Gamma) \times \\ & \times (\mathbf{u}_0 - z \nabla w) dz + z \partial_{\beta} \chi_{\alpha\beta}(\Gamma) \mathbf{u}_0 - \\ & - \frac{z}{2} \partial_{\beta} \chi_{\alpha\beta}(\Gamma) \nabla w, \quad \sigma_{zz} = \frac{\sigma^+ + \sigma^-}{2} + \\ & + \frac{1}{2} \left\{ (z_+ - z) \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}^+ + (z_- - z) \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}^- \right\} - \\ & - \frac{1}{2} \left\{ \int_z^{z_+} - \int_z^- \right\} \rho(z) dz \cdot \partial_r^2 w, \end{aligned} \quad (40)$$

при дополнительном требовании отсутствия нормальных напряжений  $\sigma^{\pm} = 0$  и касательных напряжений  $\boldsymbol{\tau}^{\pm} = (\tau_1, \tau_2)^{\pm} = 0$  на лицевых поверхностях пластины при  $z = z_{\pm}$ . Заметим, что в напряжении  $\sigma_{zz}$  при этом останется только инерционная составляющая.

### ОБОБЩЕНИЯ МОДЕЛИ ДЛЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫХ СЛОЕВ

Пусть теперь материал каждого слоя трансверсально изотропен с направлением анизотропии поперек пластины. Предположим, что в плоскости изотропии  $x_1, x_2$  материал слоя имеет модуль Юнга  $E$  и коэффициент Пуассона  $\nu$ , а в любой поперечной плоскости (содержащей ось  $z = x_3$ ) эти параметры равны  $E', \nu'$  и дополнены независимым модулем сдвига  $\mu'$ . Как следствие, получаем, что эффективные жесткости  $\gamma_{pq} \equiv \det \mathbf{G}_q^p / \det \mathbf{G}_0$  ( $pq = 11, 12, 22, 66$ ) в слое выражаются в тех же обозначениях и теми же формулами (8) и не зависят от  $E', \nu', \mu'$ . Соответственно, результаты как для слоистой пластины, так и для пластины из функционально-градиентного материала с зависимостью упругих и инерционных параметров от

координаты  $z$  будут полностью аналогичными предыдущим.

### ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА ДИСПЕРСИОННЫХ КРИВЫХ

Рассмотрим двухслойную пластину из материала 1 с плотностью  $\rho_1 = 2700 \text{ кг/м}^3$ , постоянными Ламе  $\lambda_1 = 56.618 \text{ ГПа}, \mu_1 = 25.613 \text{ ГПа}$  и материала 2 с параметрами  $\rho_2 = 1060 \text{ кг/м}^3, \lambda_2 = 30.501 \text{ ГПа}, \mu_2 = 14.018 \text{ ГПа}$ . Как легко видеть, материал 2 “низкоскоростной” со скоростями продольных и поперечных волн почти втрое ниже, чем у материала 1.

Толщину слоя 1 примем равной  $h_1 = 2 \text{ см}$ , а толщину слоя 2 будем варьировать следующим образом  $h_2 = 2; 5; 40 \text{ см}$  для вариантов 1, 2, 3 соответственно.

Искомый корень  $s$  уравнения (26) во всех случаях оказывается близок к 1. Пример поведения функции  $f(s)$  для варианта 3 показан на рис. 2. Полученные в результате решения уравнения (26) нормированные значения скорости изгибной кромочной волны приведены на рис. 3а. Здесь величины  $c_2^{(1)}, c_2^{(2)}$  обозначают скорости сдвиговых волн в слоях 1 и 2. По горизонтали отложено безразмерное значение частоты  $\omega \left( \frac{h_1}{c_2^{(1)}} + \frac{h_2}{c_2^{(2)}} \right)$ .

Пусть теперь толщина всей пластины равна  $H = 2 \text{ см}$  и ее упругие и инерционные параметры изменяются в пределах от значений для материала 1 до значений для материала 2. Вариант 1 предполагает линейный закон изменения по толщине для всех параметров  $(\lambda(z), \lambda_{\alpha} \leftrightarrow \mu(z), \mu_{\alpha}; \rho(z), \rho_{\alpha})$ :

$$\lambda(z) = \lambda_1 + (\lambda_2 - \lambda_1) \frac{z - z_-}{H}. \quad (41)$$

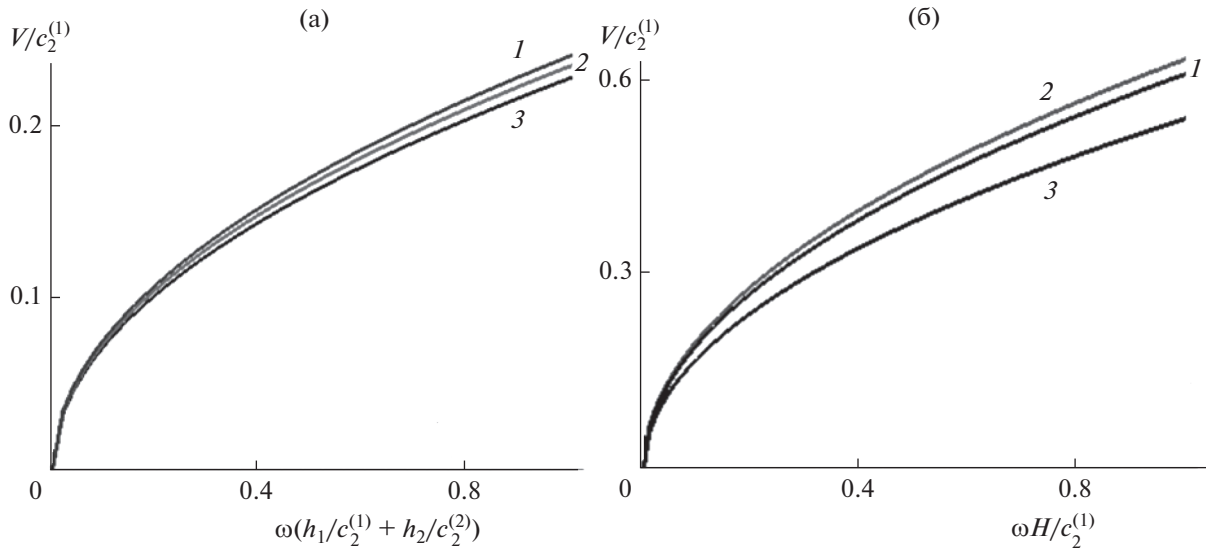


Рис. 3. Примеры дисперсионных кривых для вариантов 1, 2, 3 в случае (а) слоистой пластины и (б) пластины из функционально-градиентного материала.

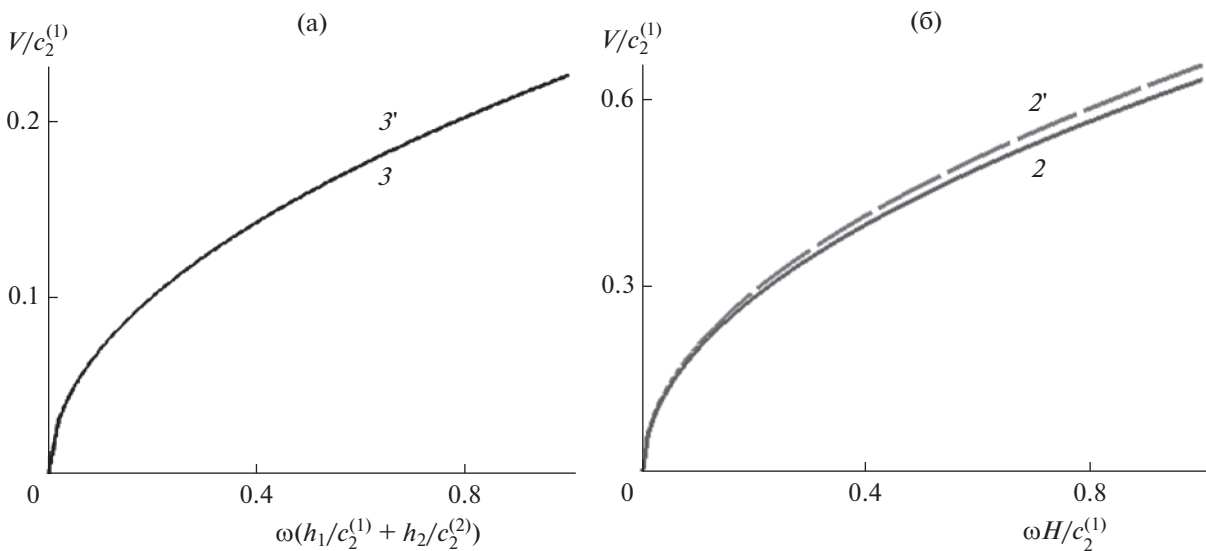


Рис. 4. Изгибная кромочная волна. (а) – Слоистая пластина в варианте 3:  $a = 0$  (штриховая кривая),  $a \neq 0$  (сплошная кривая). (б) – Слоистая пластина в варианте 2:  $a = 0$  (штриховая кривая),  $a \neq 0$  (сплошная кривая).

Для варианта 2 закон изменения по толщине для всех параметров примем квадратичным

$$\lambda(z) = \lambda_1 + (\lambda_2 - \lambda_1) \left( \frac{z - z_-}{H} \right)^2, \quad (42)$$

и для варианта 3 закон изменения для всех параметров примем экспоненциальным

$$\lambda(z) = \lambda_1 \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^{\frac{z_- - z}{H}}. \quad (43)$$

Пересчет осредненных параметров для уравнений пластины по формулам (34)–(38) и решение дисперсионного уравнения дают дисперсионные кривые, показанные на рис. 3б. Предварительно находится оптимальное расположение системы координат из решения уравнения (39).

Отметим, что наиболее существенное влияние на результат оказывает величина параметра  $a$  (30) и распределение параметров материала по толщине пластины. Например, для слоистой пластины в варианте 3 решение уравнения (26) практически не отличается от решения Коненкова (28)

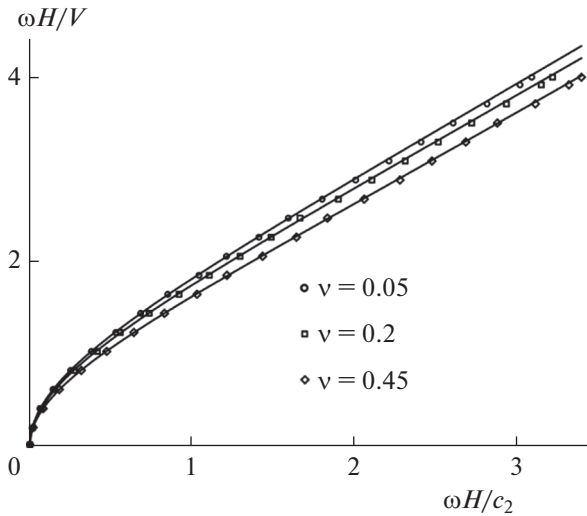


Рис. 5. Изгибная кромочная волна. Расчет по итерационной формуле (46) (сплошные линии), конечно-элементный расчет (кружки, квадраты, ромбы).

при  $a = 0$ . Соответствующая дисперсионная кривая показана пунктиром и помечена номером со штрихом на рис. 4а, а сплошной кривой показано решение полного уравнения (26) при  $a \neq 0$ . Здесь они практически неразличимы.

Для пластины из функционально-градиентного материала (вариант 2) отличие решения Коненкова, не учитывающего связность изгиба и плоского напряженного состояния, от решения для полного уравнения более существенно. Соответствующие дисперсионные кривые показаны на рис. 4б с аналогичными обозначениями.

### ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ И ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотренный подход позволяет получить основные соотношения для кромочной волны в замкнутом виде для случая пластины:

1) из изотропных и трансверсально-изотропных слоев с произвольной несимметричной укладкой;

2) из функционально-градиентных материалов такого же типа, со свойствами, непрерывно зависящими от поперечной координаты.

Полученные в явном виде результаты достаточно просты для параметрического анализа и для расчета дисперсионных кривых. В частности, сразу обнаруживается вид поправки к известному уравнению Коненкова, зависящей от приведенных коэффициентов Пуассона изгибной и плоской задачи и от отношения коэффициентов жесткости для этих задач к мембранно-изгибной жесткости. Влияние этой поправки на дисперси-

онные кривые может быть существенным. Сами уравнения движения для каждой из задач разделяются за счет оптимизации расположения системы отсчета по толщине, хотя связанность краевых условий в этих задачах остается.

Заметим, что полученные результаты справедливы для низких частот и длинных волн, т.е. для “фундаментальных” дисперсионных кривых изгибных кромочных волн с относительной погрешностью  $O(\epsilon^2)$  для главных членов разложения нормального прогиба и вектора продольных перемещений в асимптотический ряд ( $L$  – длина волны)

$$\begin{aligned} w &= L\epsilon^{-3}(w_0 + \epsilon w_1 + \dots), \\ \mathbf{u} &= L\epsilon^{-2}(\mathbf{u}_0 + \epsilon \mathbf{u}_1 + \dots), \quad (\epsilon = h/L). \end{aligned} \tag{44}$$

Для более коротких волн требуется учет более сложных компонент следующих асимптотических порядков. Согласно [40], для однослойной изотропной пластины соответствующее изменение основного оператора (уравнений движения) с погрешностью  $O(\epsilon^8)$  имеет вид

$$\begin{aligned} &d_3 \Delta^2 w + 2\rho h \times \\ &\times \left\{ 1 + a_0 h^2 \Delta + a_1 \frac{h^2}{c_2^2} \partial_t^2 + a_2 \frac{h^4}{c_2^2} \partial_t^2 \Delta \right\} \partial_t^2 w = 0, \\ a_0 &= \frac{7\nu - 17}{15(1 - \nu)}, \quad a_1 = \frac{422 - 424\nu - 33\nu^2}{1050(1 - \nu)}, \\ a_2 &= \frac{32 - 96\nu + 261\nu^2 - 197\nu^3}{15750(1 - \nu)}. \end{aligned} \tag{45}$$

Как было показано в [20], для кромочной изгибной волны именно операторная поправка оказывается главным фактором, а коррекция краевых условий – второстепенным. Тогда дисперсионную кривую можно уточнять итерационным способом, начиная с результата с погрешностью  $O(\epsilon^2)$  в виде

$$\begin{aligned} &\frac{\omega H}{c_2} \left\{ \sum_{k=0}^n B_k \left( \frac{\omega H}{2c_2} \right)^k \right\}^{-1/2} = \\ &= \left\{ \frac{6}{-1 + 3\nu + 2\sqrt{1 - 2\nu + 2\nu^2}} \right\}^{1/2} \left( \frac{V}{c_2} \right)^2, \\ B_0 &= 1, \quad B_1 = \sqrt{\frac{3(1 - \nu)}{2}} \frac{17 - 7\nu}{15(1 - \nu)}, \\ B_2 &= \frac{1179 - 818\nu + 409\nu^2}{2100(1 - \nu)}, \\ B_3 &= \sqrt{\frac{3(1 - \nu)}{2}} \frac{5951 - 2603\nu + 9953\nu^2 - 4901\nu^3}{126000(1 - \nu)^2}. \end{aligned} \tag{46}$$



Итерационная формула (46) хорошо согласуется с другими известными результатами, например, с конечно-элементным расчетом [24] (показан на рис. 5 кружками, квадратами и ромбами), сопоставлением с экспериментальными измерениями (см. [20, 26]) или с численным расчетом проекционным методом (погрешность порядка 1% на высоких частотах, см. [20, 25]).

По-видимому, подобный итерационно-асимптотический подход может быть применен и к приведенной выше постановке для продвижения в область более высоких частот в качестве приближенной альтернативы более общих методов расчета, основанных на применении матрицантов и/или формализме Коши [41–43] с последующим использованием в динамических расчетах элементов тонкостенных конструкций [44].

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коненков Ю.К. Об изгибной волне “рэлеевского” типа // Акуст. журн. 1960. Т. 6. № 1. С. 124–126.
2. Thurston R.N., McKenna J. Flexural acoustic waves along the edge of a plate // IEEE Trans. Sonics Ultrason. 1974. V. 21. P. 296–297.
3. Sinha B.K. Some remarks on propagation characteristics of ridge guide for acoustic waves at low frequencies // J. Acoust. Soc. Am. 1974. V. 56. P. 16–18.
4. Kauffmann C. A new bending wave solution for the classical plate equation // J. Acoust. Soc. Am. 1998. V. 104. P. 2220–2222.
5. Крылов В.В. Об условиях применимости приближения геометрической акустики для волн в остроугольном твердом клине // Акуст. журн. 1989. Т. 35. № 2. С. 294–301.
6. Зильбергейт А.С., Суслова И.Б. Контактные волны изгиба в тонких пластинах // Акуст. журн. 1983. Т. 29. № 2. С. 186–191.
7. Коузов Д.П., Кравцова Т.С., Яковлева В.Г. О рассеянии вибрационных волн на узловом сочленении пластин // Акуст. журн. 1989. Т. 35. № 4. С. 678–684.
8. Коузов Д.П., Кравцова Т.С. О волнах, распространяющихся вдоль ребра жесткости, подкрепляющего тонкую пластину // Акуст. журн. 1986. Т. 32. № 1. С. 125–127.
9. Захаров Д.Д. Волны Коненкова в анизотропных слоистых пластинах // Акуст. журн. 2002. Т. 48. № 2. С. 205–210.
10. Zakharov D.D., Becker W. Rayleigh type bending waves in anisotropic media // J. Sound Vibr. 2003. V. 261. P. 805–818.
11. Thompson I., Abrahams I.D., Norris A.N. On the existence of flexural edge waves on thin orthotropic plates // J. Acoust. Soc. Am. 2002. V. 112. P. 1756–1765.
12. Fu Y.B. Existence and uniqueness of edge waves in a generally anisotropic elastic plate // Q. J. Mech. Appl. Math. 2003. V. 56. P. 605–616.
13. Захаров Д.Д. Изгибные кромочные волны в слоистых анизотропных средах // Изв. АН. МТТ. 2006. № 2. С. 36–47.
14. Fu Y.B., Brookes D.W. Edge waves in asymmetrically laminated plates // J. Mech. Phys. Solids. 2006. V. 54. P. 1–21.
15. Lu P., Chen H.B., Lee H.P., Lu C. Further studies on edge waves in anisotropic elastic plates // Int. J. Solids and Structures. 2007. V. 44. P. 2192–2208.
16. Piliposian G.T., Belubekyan M.V., Ghazaryan K.B. Localized bending waves in a transversely isotropic plate // J. Sound Vibr. 2010. V. 329. P. 3596–3605.
17. Белубекян М.В., Енгибарян И.А. Волны, локализованные вдоль свободной кромки пластины с кубической симметрией // Изв. АН. МТТ. 1996. № 6. С. 139–143.
18. Norris A.N. Flexural edge waves // J. Sound Vibr. 1994. V. 174. № 4. P. 571–573.
19. Norris A.N., Krylov V.V., Abrahams I.D. Flexural edge waves and Comments on ‘A new bending wave solution for the classical plate equation’ // J. Acoust. Soc. Am. 2000. V. 107. P. 1781–1784.
20. Zakharov D.D. Analysis of the acoustical edge flexural mode in a plate using refined asymptotics // J. Acoust. Soc. Am. 2004. V. 116. P. 872–878.
21. Burridge R., Sabina F.J. Theoretical computations on ridge acoustic surface waves using the finite element method // Electron Lett. 1971. V. 7. P. 720–722.
22. Burridge R., Sabina F.J. The propagation of elastic surface waves guided by ridges // Proc. Roy. Soc. London A. 1972. V. 330. P. 417–441.
23. Lagasse P.E. High-order finite-element analysis of topographic guides supporting elastic surface waves // J. Acoust. Soc. Am. 1973. V. 53. P. 1116–1122.
24. Liu G.R., Tani J., Ohyoshi T., Watanabe K. Characteristics of surface wave propagation along the edge of an anisotropic laminated semi-infinite plate // Wave Motion. 1991. V. 13. P. 243–251.
25. Krushinska A.A. Flexural edge waves in semi-infinite elastic plates // J. Sound Vibr. 2011. V. 330. P. 1964–1976.
26. Lagasse P.E., Oliner A.A. Acoustic flexural mode on a ridge of semi-infinite height // Electron Lett. 1976. V. 12. P. 11–13.
27. Вильде М.В., Каплунов Ю.Д., Коссович Л.Ю. Краевые и интерфейсные резонансные явления в упругих телах. М.: Физматлит, 2010. 280 с.
28. Kaplunov J., Prikazchikov D.A., Rogerson G.A., Lashab M.I. The edge wave on an elastically supported Kirchhoff plate // J. Acoust. Soc. Am. 2004. V. 136(4). P. 1487–1490.
29. Kaplunov J., Prikazchikov D.A., Rogerson G.A. Edge bending wave of a thin elastic plate resting on a Winkler foundation // Proc. Roy. Soc. A. 2016. V. 472. 20160178.
30. Kaplunov J., Nobili A. The edge waves on a Kirchhoff plate bilaterally supported by a two-parameter elastic foundation // J. Vib. Control. 2017. V. 23(12). P. 2014–2022.
31. Alzaidi A.S., Kaplunov J., Prikazchikova L. Elastic bending wave on the edge of a semi-infinite plate rein-

- forced by a strip plate // *Math. and Mechanics of Solids*. 2019. V. 24(10). P. 3319–3330.
32. *Alzaidi A.S., Kaplunov J., Prikazchikova L.* The edge bending wave on a plate reinforced by a beam (L) // *J. Acoust. Soc. Am.* 2019. V. 146(2). P. 1061–1064.
  33. *Глушков Е.В., Глушкова И.В., Фоменко С.И., Жанг Ч.* Поверхностные волны в материалах с функционально-градиентными покрытиями // *Акуст. журн.* 2012. Т. 58. № 3. С. 370–385.
  34. *Белянкова Т.И., Калинин В.В.* Особенности локализации волнового поля в преднапряженном функционально-градиентном слое // *Акуст. журн.* 2017. Т. 63. № 3. С. 219–234.
  35. *Ватульян А.О., Юров В.О.* Анализ вынужденных колебаний в функционально-градиентном цилиндрическом волноводе // *Акуст. журн.* 2018. Т. 64. № 6. С. 649–656.
  36. *Ватульян А.О., Юров В.О.* Об оценке законов радиальной неоднородности в цилиндрическом волноводе // *Акуст. журн.* 2020. Т. 66. № 2. С. 119–127.
  37. *Захаров Д.Д.* Асимптотический анализ трехмерных динамических уравнений упругости для тонкой слоистой анизотропной пластины произвольной структуры // *ПММ.* 1992. Т. 59. Вып. 5. С. 637–644.
  38. *Zakharov D.D.* Asymptotic integration of 3D dynamic equations for thin multilayered anisotropic plates // *Comptes Rendus de l'Academie des Scences, Paris II.* 1992. V. 315. № 8. P. 915–920.
  39. *Zakharov D.D., Becker W.* 2-D problems of thin asymmetric laminates // *Zeitschrift fur Angewandte Matematik und Physik.* 2000. V. 51. № 4. P. 49–66.
  40. *Goldenveizer A.L., Kaplunov J.D., Nolde E.V.* On Timoshenko-Reissner type theories of plates and shells // *Int. J. Solids and Structures.* 1993. V. 30. P. 675–694.
  41. *Shuvalov A.L., Poncelet O., Kiselev A.P.* Shear horizontal waves in transversely inhomogeneous plates // *Wave Motion.* 2008. V. 45(5). P. 605–615.
  42. *Kuznetsov S.V.* Closed form analytical solution for dispersion of Lamb waves in FG plates // *Wave Motion.* 2019. V. 84. P. 1–7.
  43. *Kuznetsov S.V.* Similarity and discrepancy of Lamb wave propagation in functionally graded, stratified, and homogeneous media // *Int. J. Dynamics and Control.* 2020. V. 8. P. 717–722.
  44. *Бобровницкий Ю.И., Генкин М.Д., Маслов В.П., Римский-Корсаков А.В.* Распространение волн в конструкциях из тонких стержней и пластин. М.: Наука, 1974. 102с.