

КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ
И ТЕОРИИ ВОЛН

УДК 534.26

ДИФРАКЦИЯ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ НА СИЛЬНО ВЫТЯНУТОМ
ТРЕХОСНОМ ЭЛЛИПСОИДЕ

© 2021 г. И. В. Андронов^{а, *}, Н. И. Андронов^а

^аСанкт-Петербургский государственный университет, НИИФ,
Ульяновская 1/1, Петродворец, 198504 Россия

*e-mail: iva—@list.ru

Поступила в редакцию 12.03.2021 г.

После доработки 14.04.2021 г.

Принята к публикации 20.04.2021 г.

Рассмотрена задача высокочастотной дифракции плоской волны на трехосном сильно вытянутом эллипсоиде. Методом параболического уравнения в эллипсоидальных координатах построен старший член асимптотики поля в пограничном слое у поверхности. Поле выражается в квадратурах через решения конфлюэнтного уравнения Гойна. Рассчитаны значения поля на поверхности идеально жесткого эллипсоида и скорости на поверхности идеально мягкого. Обсуждаются эффекты высокочастотной дифракции.

Ключевые слова: дифракция, сильно вытянутый эллипсоид, высокочастотная асимптотика, метод параболического уравнения, функции Гойна

DOI: 10.31857/S032079192104002X

ВВЕДЕНИЕ

В задаче дифракции на гладком выпуклом теле В.А. Фоком [1] были получены асимптотические разложения для поля в полутени. В этих разложениях зависимость от поперечной координаты представлена лишь через зависимость от нее радиуса кривизны поверхности. При дифракции на цилиндрической поверхности формулы Фока дают весьма точное описание волнового поля уже при $kr \approx 3$, где k – волновое число, r – радиус цилиндра. Однако, при дифракции на сфере, где также отсутствует зависимость радиуса кривизны от поперечной координаты, асимптотическое приближение начинает работать лишь при $kr \approx 15$, а для дифракции на вытянутом сфероиде нижняя граница допустимых частот еще больше увеличивается [2]. Идея учета поправочных членов, вновь использованная в [3] при рассмотрении задачи дифракции на умеренно вытянутом теле вращения, не приводит к улучшению ситуации. Построению более пригодных асимптотических и численных представлений для поля в задачах дифракции на вытянутых телах в последнее время уделяется большое внимание. Перечислим лишь некоторые работы [4–8]. Однако, во всех этих статьях зависимость параметров поверхности от поперечной координаты отсутствует. Здесь мы обобщаем процедуру построения высокочастотной асимптотики в задаче дифракции на сильно вытянутом теле [6] на поверхность, свой-

ства которой зависят от поперечной координаты. Мы рассматриваем задачу дифракции на трехосном сильно вытянутом эллипсоиде.

Как известно, уравнение Гельмгольца допускает разделение переменных в общих эллипсоидальных координатах [9]. Такое решение было построено в [10] в терминах волновых функций Ламэ, которые удовлетворяют дифференциальному уравнению с 5 особыми точками, точнее его конфлюэнтному случаю, когда две особые точки слились и образовали иррегулярную особую точку. Уравнение записывается в виде:

$$\left[\sqrt{f(\zeta)} \frac{d}{d\zeta} \sqrt{f(\zeta)} \frac{d}{d\zeta} + \frac{h - l\zeta + k^2\zeta^2}{4} \right] w = 0,$$

где $f(\zeta) = (\zeta - a_1)(\zeta - a_2)(\zeta - a_3)$, величины a_1, a_2, a_3 задают эллипсоид, а h и l – параметры разделения переменных. Переход к используемому в работе методу параболического уравнения сводит задачу к решаемой в терминах конфлюэнтных функций Гойна. Другими словами, подобно тому как при рассмотрении задач дифракции на сфероиде осуществлялся переход от сфероидальных функций (функций класса Гойна), в которых задача решается точно, к вырожденным гипергеометрическим функциям Уиттекера, здесь мы имеем переход от конфлюэнтного варианта уравнения с пятью особыми точками к конфлюэнтно-

му уравнению класса Гойна (т.е. класса уравнений с четырьмя особыми точками).

Полученные асимптотические представления позволяют провести верификацию численных программ расчета волновых полей подобно тому, как это было сделано в [11] для случая дифракции на сфероиде.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Мы рассматриваем задачу высокочастотной дифракции на сильно вытянутом трехосном эллипсоиде. Зададим эллипсоид стандартным уравнением

$$\left(\frac{x}{a_x}\right)^2 + \left(\frac{y}{a_y}\right)^2 + \left(\frac{z}{a_z}\right)^2 = 1. \quad (1)$$

Здесь a_x , a_y и a_z – полуоси эллипсоида. Без ограничения общности будем считать, что $a_x < a_y$. Акустическое поле во внешности эллипсоида удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\Delta u + k^2 u = 0. \quad (2)$$

Здесь $k = \omega/c$ – волновое число, зависимость от частоты ω принята в виде $e^{-i\omega t}$, c – скорость распространения волн, которую мы считаем постоянной.

Пусть поле возбуждается плоской волной, падающей на эллипсоид вдоль оси Oz

$$u_{inc} = \exp(ikz). \quad (3)$$

Будем одновременно рассматривать две задачи: в случае идеально мягкой поверхности зададим условия Дирихле, а в случае идеально жесткой – условия Неймана. На бесконечности для рассеянного поля $u_{sc} = u - u_{inc}$ ставятся условия излучения.

Частоту считаем высокой, так что волновые размеры сфероида велики, т.е. $ka_x \gg 1$, $ka_y \gg 1$ и $ka_z \gg 1$. Кроме того, эллипсоид будем считать сильно вытянутым [17], что записывается в виде соотношений

$$\sqrt{ka_z} \frac{a_x}{a_z} = O(1), \quad \sqrt{ka_z} \frac{a_y}{a_z} = O(1). \quad (4)$$

С учетом симметрии задачи, рассмотрения можно проводить лишь в четверти пространства $x > 0$, $y > 0$. Это позволяет ввести эллипсоидальные координаты (η, ν, μ) при помощи формул [12]

$$\begin{aligned} x &= p \sqrt{\frac{(\mu - a)(\nu - a)(\eta^2 - a)}{a(a - 1)}}, \\ y &= p \sqrt{\frac{(\mu - 1)(\nu - 1)(\eta^2 - 1)}{1 - a}}, \quad z = p \sqrt{\frac{\mu\nu}{a}} \eta. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь $0 < \eta < 1 < \nu < a < \mu < \infty$, параметр p имеет смысл половины фокусного расстояния, параметр $a = (a_z^2 - a_x^2)/p^2$ характеризует степень вытянутости по отношению к меньшей из полуосей. Поверхность эллипсоида в этой системе координат является координатной. Пусть она задается уравнением

$$\mu = \mu_0.$$

Полуоси такого эллипсоида вычисляются по формулам

$$a_x = p\sqrt{\mu_0 - a}, \quad a_y = p\sqrt{\mu_0 - 1}, \quad a_z = p\sqrt{\mu_0}, \quad (6)$$

откуда с учетом (4) следует, что μ_0 , а значит и параметр a должны быть близки к единице. Тогда близка к единице и координата ν . Введем вместо μ и ν растянутые координаты (t, s) по формулам

$$a = 1 + \frac{\chi}{kp}, \quad \mu = 1 + \frac{\chi}{kp} t, \quad \nu = 1 + \frac{\chi}{kp} s. \quad (7)$$

Координата s меняется в пределах $0 < s < 1$, а координата $t > 1$. Пусть

$$\mu_0 = 1 + \frac{\chi}{kp} t_0.$$

Параметры t_0 и χ определяются через полуоси эллипсоида. В старшем по kp порядке имеем

$$\chi = \frac{k(a_y^2 - a_x^2)}{a_z}, \quad t_0 = \frac{a_y^2}{a_y^2 - a_x^2}. \quad (8)$$

ПАРАБОЛИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

Как известно [9], уравнение Гельмгольца допускает разделение переменных в эллипсоидальных координатах, а решение выражается через волновые функции Ламэ. Однако, в случае высоких частот такое решение, как и многие другие точные решения задач дифракции, оказывается непригодным. Поэтому будем строить асимптотическое решение, считая $kp \gg 1$. Используя метод параболического уравнения, представим решение в виде

$$u = e^{ikp\eta} \sum_{j=0}^{\infty} U_j(s, t, \eta)(kp)^{-j}. \quad (9)$$

Функции U_j , входящие в асимптотический ряд, будем предполагать независимыми от kp . Подставляя представление (9) в уравнение Гельмгольца (2), которое следует переписать в координатах (η, s, t) , и приравнявая члены при $(kp)^1$ (члены при

$(kp)^2$ сокращаются), получим параболическое уравнение

$$4s(1-s)U_{ss} + (2-4s)U_s + 4t(t-1)U_{tt} + (4t-2)U_t + 2i\chi(t-s)(1-\eta^2)U_\eta + \chi(t-s)(\chi(s+t-1)-2i\eta)U = 0. \quad (10)$$

Здесь мы опустили индекс 0 у функции U_0 , а нижними индексами s , t и η обозначили производные по соответствующим переменным. Уравнение (10) допускает разделение переменных в виде

$$U(s, t, \eta) = S(s)T(t)R(\eta).$$

Для функции $R(\eta)$ получается дифференциальное уравнение первого порядка

$$R'(\eta) = \frac{\eta - 2i\lambda}{1 - \eta^2} R(\eta),$$

которое решается в элементарных функциях

$$R = \frac{1}{\sqrt{1-\eta^2}} \left(\frac{1-\eta}{1+\eta} \right)^{i\lambda}. \quad (11)$$

Для функций S и T получаются обыкновенные дифференциальные уравнения

$$LS(\zeta) = 0, \quad LT(\zeta) = 0 \quad (12)$$

с одним и тем же оператором

$$L = \zeta(1-\zeta) \frac{d^2}{d\zeta^2} + \left(\frac{1}{2} - \zeta \right) \frac{d}{d\zeta} + \left(\frac{\chi^2}{4} \zeta(1-\zeta) + \chi\lambda \left(\frac{1}{2} - \zeta \right) + \alpha \right). \quad (13)$$

Первое уравнение в (12) будем называть угловым, а второе – радиальным. Параметры λ и α в (11) и (12) являются параметрами разделения переменных.

Решение (11) является ядром интегрального преобразования [13]

$$\hat{F}(\eta) = \frac{1}{\sqrt{1-\eta^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1-\eta}{1+\eta} \right)^{i\lambda} F(\lambda) d\lambda, \quad (14)$$

$$F(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left(\frac{1+\eta}{1-\eta} \right)^{i\lambda} \hat{F}(\eta) \frac{d\eta}{\sqrt{1-\eta^2}}.$$

Поэтому общее решение параболического уравнения (10) будем искать в виде интеграла по λ по вещественной оси.

Дифференциальные уравнения (12) должны быть дополнены краевыми условиями. По переменной s рассматривается конечный интервал $[0, 1]$, однако концы этого интервала являются особыми точками дифференциального оператора. Согласно аналитической теории линейных дифференциальных уравнений [14] уравнение (12) имеет регулярные особые точки $\zeta = 0$ и $\zeta = 1$ и ир-

регулярную особую точку на бесконечности. Это уравнение сводится к вырожденному (конфлюэнтному) уравнению Гойна [15]. В окрестности особой точки $\zeta = 0$ решение уравнения (12) имеет вид

$$S(\zeta) = S_{00}(\zeta) + \sqrt{\zeta} S_{01}(\zeta), \quad (15)$$

где S_{00} и S_{01} – голоморфные в окрестности $\zeta = 0$ функции. Аналогично, в окрестности точки $\zeta = 1$ имеют место представления

$$S(\zeta) = S_{10}(1-\zeta) + \sqrt{1-\zeta} S_{11}(1-\zeta). \quad (16)$$

Из (5) и (7) следует, что при фиксированных значениях η и t координата s пропорциональна y^2 при малых y , а $1-s$ пропорциональна x^2 при малых x . Поэтому решение S_{00} соответствует четному продолжению поля u на отрицательные значения координаты y , а решение $\sqrt{\zeta} S_{01}(\zeta)$ – нечетному. Аналогично, решение S_{10} соответствует четному продолжению поля на отрицательные значения координаты x , а решение $\sqrt{1-\zeta} S_{11}(\zeta)$ – нечетному. Поскольку падающее поле является четным по x и y , эта четность переносится и на полное поле. Таким образом, нас интересуют такие решения углового уравнения (12), которые одновременно голоморфны и в окрестности $\zeta = 0$, и в окрестности $\zeta = 1$. Такая сингулярная задача Штурма–Лиувилля может рассматриваться как возмущение задачи, получающейся при $\chi = 0$, и имеющей полиномиальные решения

$$S_n^\circ(\zeta) = T_n(2\zeta - 1), \quad \alpha_n^\circ = n^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (17)$$

выражающиеся через полиномы Чебышева первого рода T_n . С точки зрения рассматриваемой задачи дифракции переход к $\chi = 0$ соответствует стремлению $a_x \rightarrow a_y$, то есть к задачам, когда эллипсоид является почти телом вращения.

Известно [15], что сингулярная задача Штурма–Лиувилля для углового уравнения (12) имеет простой, дискретный, ограниченный снизу спектр. Пусть α_n , $n = 0, 1, 2, \dots$ – собственные числа. Естественно, они зависят от параметров χ и λ (при необходимости подчеркнуть эту зависимость будем писать $\alpha_n(\chi, \lambda)$), причем

$$\alpha_n(\chi, \lambda) = \alpha_n(\chi, -\lambda) \quad \text{и} \quad \alpha_n(0, \lambda) = n^2.$$

Ниже зависимость от параметра χ , который является фиксированным, для краткости указывать не будем. Пусть $F_n(\zeta) = F_n(\lambda, \zeta)$ – собственные функции, отвечающие собственным числам α_n . Поскольку оператор в уравнении (12) является симметричным в L_2 с весом $\rho = 1/\sqrt{\zeta(1-\zeta)}$, функции

F_n образуют полную ортогональную систему. Нормируем их таким образом, что

$$\int_0^1 \frac{F_n(\zeta)F_m(\zeta)}{\sqrt{\zeta(1-\zeta)}} d\zeta = \delta_n^m, \tag{18}$$

где δ_n^m – символ Кронекера.

Обратимся теперь к решениям радиального уравнения (12) относительно $T(\zeta)$. Кроме решения $F_n(\zeta)$, являющегося аналитическим продолжением собственных функций с отрезка $[0, 1]$, нам понадобится также решение, фиксированное поведением на бесконечности. Как известно [15], имеются два решения, фиксированные своим поведением на бесконечности

$$G^+(\zeta) = \exp\left(\frac{i\chi\zeta}{2}\right)\zeta^{-\frac{1}{2}+i\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{c_j^+}{\zeta^j} \tag{19}$$

и

$$G^-(\zeta) = \exp\left(-\frac{i\chi\zeta}{2}\right)\zeta^{-\frac{1}{2}-i\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{c_j^-}{\zeta^j}. \tag{20}$$

Функции (19) и (20) называются решениями Томе. Ряды в (19) и (20) не сходятся, а дают лишь асимптотическое приближение в секторе, содержащем положительную полуось ζ .

Поскольку параметр χ положителен, решение $G^+(\zeta)$ имеет фазу, растущую на бесконечности, и, тем самым, отвечает волне, уходящей на бесконечность, в то время как решение $G^-(\zeta)$ отвечает приходящей из бесконечности волне. Таким образом, в представлении рассеянного поля могут присутствовать решения $G^+(\zeta)$ и не могут присутствовать решения $G^-(\zeta)$.

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДЛЯ ФУНКЦИИ ОСЛАБЛЕНИЯ

На основании результатов предыдущего параграфа будем искать старший член асимптотики функции ослабления в следующем виде

$$U(s, t, \eta) = \frac{1}{\sqrt{1-\eta^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1-\eta}{1+\eta}\right)^{i\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} F_n(\lambda, s) \times \tag{21}$$

$$\times \{A_n(\lambda)F_n(\lambda, t) + B_n(\lambda)G_n^+(\lambda, t)\} d\lambda.$$

Здесь $G_n^+(\lambda, \zeta)$ – решение радиального уравнения (12) с параметром $\alpha = \alpha_n$, фиксированное поведением (19) при $t \rightarrow +\infty$.

В фигурных скобках записано общее решение радиального уравнения при фиксированных значениях параметров λ и $\alpha = \alpha_n$. Это решение можно было бы записать и через другие частные ре-

шения радиального уравнения. Выбранная в представлении (21) форма удобна тем, что, если в ней положить $B_n \equiv 0$, то полученная функция U будет допускать четное продолжение во все полу-пространство $x < 0$. Ранее мы рассматривали лишь внешность эллипсоида и вопрос о четном/нечетном продолжении поля затрагивал зависимость лишь от координаты s . При рассмотрении представления (21) внутри эллипсоида, то есть при $t < t_0$, следует обратить внимание на то, что значению $t = 1$ отвечает предельный эллиптический диск в плоскости $x = 0$. Продолжение в область $x < 0$ через этот диск происходит в соответствии с зависимостью поля от координаты t . При фиксированных η и s величина $t - 1$ пропорциональна x^2 при малых x . Поэтому функция $F_n(t)$, которая является голоморфной в окрестности $t = 1$, может быть записана как некоторая функция от x^2 , и ввиду этого отвечающее ей поле будет зависеть от x четным образом. Если же в представлении (21) положить $A_n \equiv 0$, то полученное решение будет представлять собой комбинацию волн, уходящих по переменной t на бесконечность. Поэтому это решение будет удовлетворять условиям излучения. На основании этих свойств можно утверждать, что первое слагаемое $A_n F_n(t)$ порождает функцию ослабления U_{inc} для падающего поля, а слагаемое $B_n G_n^+(t)$ порождает функцию ослабления для рассеянного поля.

Удобно положить

$$B_n = A_n R_n.$$

Тогда коэффициенты R_n можно рассматривать как парциальные коэффициенты отражения от поверхности. Требуя выполнения краевых условий при $t = t_0$ тождественно под знаком интеграла, получим в задаче Дирихле

$$R_n = -\frac{F_n(\lambda, t_0)}{G_n^+(\lambda, t_0)} \tag{22}$$

и в задаче Неймана

$$R_n = -\frac{\frac{d}{dt} F_n(\lambda, t_0)}{\frac{d}{dt} G_n^+(\lambda, t_0)}. \tag{23}$$

Для завершения построения асимптотического представления в старшем порядке осталось опре-

делить коэффициенты $A_n(\lambda)$. Для этого рассмотрим представление падающего поля

$$U_{inc} = \frac{1}{\sqrt{1-\eta^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1-\eta}{1+\eta}\right)^{i\lambda} \times \sum_{n=0}^{\infty} A_n(\lambda) F_n(\lambda, s) F_n(\lambda, t) d\lambda. \quad (24)$$

В этом представлении слева стоит старший член асимптотического ряда для функции ослабления падающей волны. Перейдем в (3) к координатам пограничного слоя. Имеем

$$z = p \sqrt{\frac{\left(1 + \frac{\chi t}{kp}\right) \left(1 + \frac{\chi s}{kp}\right)}{1 + \frac{\chi}{kp}}} \eta = p\eta + \frac{\chi}{2k}(t+s-1) + O(p^{-1}). \quad (25)$$

Тогда для U_{inc} получим выражение

$$U_{inc}(s, t, \eta) = \exp\left(\frac{i\chi}{2}(t+s-1)\eta\right). \quad (26)$$

Прямой подстановкой проверяется, что функция U_{inc} удовлетворяет параболическому уравнению, а значит, может быть представлена в виде правой части (24) точно.

Применим к (24) обратное преобразование (14)

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n(\lambda) F_n(\lambda, s) F_n(\lambda, t) = K(\lambda, s, t), \quad (27)$$

где

$$K(\lambda, s, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left(\frac{1+\eta}{1-\eta}\right)^{i\lambda} \frac{\exp\left(\frac{i\chi}{2}(s+t-1)\eta\right)}{\sqrt{1-\eta^2}} d\eta. \quad (28)$$

Сравнивая интеграл в (28) с интегральным представлением для функции Уиттекера M [16], окончательно получим

$$K(\lambda, s, t) = \frac{1}{(\pi\lambda)} \frac{M_{-i\lambda, 0}(i\chi(s+t-1))}{\sqrt{i\chi(s+t-1)}}. \quad (29)$$

Отметим, что функция $K(\lambda, s, t)$ не имеет особенностей (квадратный корень в знаменателе компенсируется соответствующим ветвлением функции Уиттекера).

Теперь воспользуемся свойством ортогональности собственных функций $F_n(s)$. Домножим тождество (27) на $F_m(s)$ и проинтегрируем с весом

$\rho(s)$ по отрезку $s \in [0, 1]$. В левой части ввиду (18) останется лишь слагаемое с $n = m$. Таким образом,

$$A_n(\lambda) = \frac{1}{(\pi\lambda)} \frac{1}{F_n(\lambda, t)} \times \int_0^1 \frac{M_{-i\lambda, 0}(i\chi(s+t-1))}{\sqrt{i\chi(s+t-1)}} \frac{F_n(\lambda, s)}{\sqrt{s(1-s)}} ds. \quad (30)$$

Отметим, что коэффициенты $A_n(\lambda)$ не зависят от t , в то время как параметр t присутствует в правой части выражения (30). Формулу (30) следует рассматривать при таких значениях параметра t , при которых сходится интеграл в правой части и которые не являются нулями $F_n(t)$. Наличие параметра t позволяет дополнительно контролировать точность вычислений функций $F_n(\lambda, \zeta)$.

В теории функций класса Гойна соотношения, подобные (30), известны как интегральные соотношения или интегральные уравнения для функций класса Гойна [15].

ЧИСЛЕННАЯ ПРОЦЕДУРА И РЕЗУЛЬТАТЫ

Для обсуждения дифракционных эффектов в задаче дифракции на жестком эллипсоиде будем вычислять полное поле на его поверхности. Приводя выражение, взятое в фигурных скобках в (21), к общему знаменателю, получим формулу для поля в следующем виде

$$U(s, t_0, \eta) = \frac{1}{\sqrt{1-\eta^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1-\eta}{1+\eta}\right)^{i\lambda} \times \sum_{n=0}^{\infty} A_n(\lambda) F_n(\lambda, s) \frac{W[F_n, G_n^+](t_0)}{\dot{G}_n^+(\lambda, t_0)} d\lambda. \quad (31)$$

Здесь точкой обозначена производная функции G_n^+ по ее аргументу t , $W[F_n, G_n^+] = F_n \dot{G}_n^+ - \dot{F}_n G_n^+$ – определитель Вронского функций F_n и G_n^+ , который, как известно, зависит от t_0 посредством множителя $1/\sqrt{t_0(t_0-1)}$.

В задаче дифракции на идеально мягкой поверхности будем вычислять нормальную производную поля на поверхности. При этом учтем, что

$$\frac{\partial}{\partial n} = \frac{2\sqrt{kp}}{p\sqrt{\chi}} \sqrt{\frac{t(t-1)}{(t-s)(1-\eta^2)}} \frac{\partial}{\partial t}. \quad (32)$$

В результате получаем

$$\frac{\partial u}{\partial n} = -\frac{2\sqrt{kp}e^{ikp\eta}}{p\sqrt{\chi}(1-\eta^2)} \sqrt{\frac{t_0^2-t_0}{t_0-s}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1-\eta}{1+\eta}\right)^{i\lambda} \times \sum_{n=0}^{\infty} A_n(\lambda) F_n(\lambda, s) \frac{W[F_n, G_n^+](t_0)}{G_n^+(\lambda, t_0)} d\lambda. \quad (33)$$

Для проведения расчетов по формулам (31), (33) необходимо решить задачу Штурма—Лиувилля для углового уравнения (12) и найти значения спектрального параметра $\alpha_n(\lambda)$ и собственные функции $F_n(\lambda, s)$. Отметим, что в [18] использована замена переменных, которая позволяет устранить одновременно обе особые точки. Однако, при этом получаются уравнения с неполиномиальными коэффициентами. С нашей точки зрения удобнее сделать более простые замены независимой переменной

$$F(s) = \frac{\Phi(\tau)}{\sqrt[4]{1-s}} = \frac{\Psi(\sigma)}{\sqrt[4]{s}}, \quad \tau = \sqrt{s}, \quad \sigma = \sqrt{1-s}. \quad (34)$$

Первую замену выполним для $s \in [0, 1/2]$, вторую для $s \in [1/2, 1]$. Для функций Φ и Ψ получим уравнения

$$\begin{aligned} \Phi''(\zeta) + Q(\lambda, \zeta)\Phi(\zeta) &= 0, \\ \Psi''(\zeta) + Q(-\lambda, \zeta)\Psi(\zeta) &= 0, \end{aligned} \quad (35)$$

где

$$Q(\lambda, \zeta) = \chi^2 \zeta^2 + 4\chi\lambda + \frac{4\alpha - 2\chi\lambda - \frac{1}{4}}{1 - \zeta^2} + \frac{3}{4} \frac{1}{(1 - \zeta^2)^2}. \quad (36)$$

Отсутствие первой производной в (36) позволяет применить численную схему Нумерова. Введем равномерную сетку $\{\zeta_j\}_{j=0,1,\dots,N}$ с шагом h на интервале $[0, \sqrt{2}/2]$ и вектор неизвестных $\mathbf{F} = (\Phi(0), \Phi(\zeta_1), \dots, \Phi(\zeta_{N-1}), \Phi(\sqrt{2}/2), \Psi(\zeta_{N-1}), \dots, \Psi(\zeta_1), \Psi(0))^T$. Уравнения метода Нумерова записываются в виде

$$A\mathbf{F} = 0$$

с трехдиагональной матрицей

$$A_{0,0} = -1 + \frac{1}{3}Q(\lambda, 0)h^2, \quad A_{0,1} = 1 + \frac{1}{6}Q(\lambda, h)h^2,$$

$$A_{j,j-1} = 1 + \frac{1}{12}Q(\lambda, (j-1)h)h^2,$$

$$A_{j,j} = -2 + \frac{5}{6}Q(\lambda, jh)h^2,$$

$$A_{j,j+1} = 1 + \frac{1}{12}Q(\lambda, (j+1)h)h^2,$$

$$j = 1, 2, \dots, N-1,$$

$$A_{N,n-1} = -1 - \frac{1}{6}Q(\lambda, (N-1)h)h^2,$$

$$A_{N,N} = 2 + \sqrt{2}h - \frac{1}{3}(Q(\lambda, Nh) + Q(\lambda, Nh)),$$

$$A_{N,N+1} = -1 - \frac{1}{6}Q(-\lambda, (N-1)h)h^2,$$

$$A_{j,j-1} = 1 + \frac{1}{12}Q(-\lambda, (2N-j+1)h)h^2,$$

$$A_{j,j} = -2 + \frac{5}{6}Q(-\lambda, (2N-j)h)h^2,$$

$$A_{j,j+1} = 1 + \frac{1}{12}Q(-\lambda, (2N-j-1)h)h^2,$$

$$j = N+1, N+2, \dots, 2N-1,$$

$$A_{2N,2N-1} = 1 + \frac{1}{6}Q(-\lambda, h)h^2,$$

$$A_{2N,2N} = -1 + \frac{1}{3}Q(-\lambda, 0)h^2.$$

Нахождение собственных чисел производилось методом стрельбы, т.е. выбирая $\Phi(0) = 1$, что влияет лишь на нормировку, и, последовательно используя $2N-1$ уравнение системы, определялись компоненты вектора \mathbf{F} . Параметр α , играющий роль пристрелочного параметра, находился из требования, чтобы выполнялось последнее уравнение системы.

Нормировочные интегралы (18) и интегралы в формулах (30) для коэффициентов $A_n(\lambda)$ вычислялись по составным квадратурным формулам трапеций. Проверка условий ортогональности (18) и независимости правых частей (30) от t дают возможность дополнительной проверки точности вычислений.

После того как собственные числа α_n найдены, необходимо решить радиальные уравнения (12) и найти функции $G_n^+(\lambda, t)$. Функции $G_n^+(\lambda, t)$ фиксируются своим поведением на бесконечности. Поэтому радиальное уравнение решалось в отрицательном направлении независимой переменной. Для того чтобы задать начальные данные для задачи Коши, можно воспользоваться решениями Томе (19). Несложно установить, что коэффициенты c_j^+ асимптотического ряда удовлетворяют трехчленным рекуррентным уравнениям

$$\begin{aligned} c_{n+2} &= \frac{i}{\chi(n+2)}(n+1-i\lambda)\left(n+\frac{1}{2}-i\lambda\right)c_n - \\ &- \frac{i}{\chi(n+2)}\left[\left(n+\frac{3}{2}-i\lambda\right)^2 + i\chi\left(n+\frac{5}{4}-i\lambda\right) - \alpha\right]c_{n+1}, \end{aligned} \quad (37)$$

в которых надо положить $c_{-1} = 0$.

Ряд в (19), как уже отмечалось выше, расходится и может использоваться лишь как асимптотический. Поэтому будем рассматривать конечный отрезок ряда и использовать его при достаточно большом значении ζ^* , которое и будет начальным значением независимой переменной в задаче Коши для $G_n^+(\zeta)$. Отметим, что ввиду наличия множителей χ^{-1} в формулах (37) значение ζ^* приходится брать тем большим, чем меньше значе-

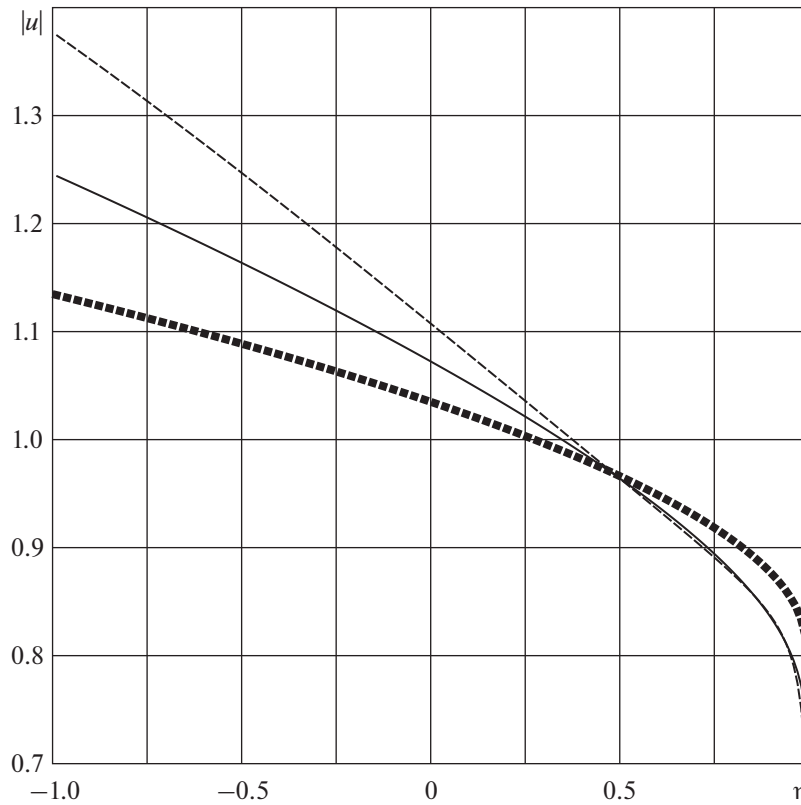


Рис. 1. Амплитуда поля в сечении $x = 0$ на жестком сфероиде с полуосями $200k^{-1}$ и $10k^{-1}$ (сплошная линия) и на эллипсоидах с полуосями $200k^{-1}$, $10k^{-1}$ и $20k^{-1}$ (штриховая линия) и $200k^{-1}$, $10k^{-1}$ и $5k^{-1}$ (пунктир).

ние параметра χ . При приближении к сингулярной точке $\zeta = 1$ для повышения точности вычислений и исключения особенности в $\zeta = 0$ можно произвести замену независимой переменной

$$G^+(\zeta) = \frac{\Upsilon(\tau)}{\sqrt[4]{t}}, \quad \tau = \sqrt{\zeta - 1}, \quad (38)$$

которая приводит к уравнению

$$\Upsilon'''(\tau) + \left[\chi^2 \tau^2 + 4\chi\lambda + \frac{\frac{1}{4} - 4\alpha - 2\chi\lambda}{1 + \tau^2} - \frac{3}{4} \frac{1}{(1 + \tau^2)^2} \right] \Upsilon(\tau) = 0. \quad (39)$$

Как показывает численный счет, подынтегральные выражения в (31) и (33) быстро убывают при $\lambda \rightarrow \pm\infty$, а заметный вклад в сумму дают лишь слагаемые с $n = 0$ и $n = 1$.

С точки зрения физики процесса дифракции вызывает интерес изучение поперечной структуры дифракционного поля. Как уже отмечалось выше, приближение Фока имеет двумерный характер и на границе свет-тень на поверхности жесткого тела дает значение амплитуды полного поля, равное 1.399. Таким образом, согласно это-

му приближению зависимости от поперечной координаты нет. В реальности, такая зависимость присутствует и полученные здесь асимптотические представления позволяют ее выявить. Рассмотрим сечение $x = 0$ и будем сравнивать распределение поля в этом сечении с распределением поля на поверхности сфероида, которое может быть рассчитано по асимптотическим формулам, полученным в [6]. На рис. 1 это распределение показано сплошной линией. Для эллипсоида с меньшей поперечной кривизной распределение поля показано штриховой линией, а для эллипсоида с большей кривизной — пунктиром. Расчеты показывают, что поперечная кривизна влияет на распределение поля двояким образом. Во-первых, при увеличении поперечной кривизны эллипсоид становится более плоским, что приводит к уменьшению амплитуды рассеянного поля (на жестком эллиптическом диске, являющемся предельным случаем эллипсоида, рассеянное поле отсутствует). Во-вторых, большая поперечная кривизна снижает скорость затухания поля в тени, что выражается меньшим наклоном у пунктирной кривой и большим у штриховой.

Сравнивая поля в сечениях $x = 0$ и $y = 0$ (см. рис. 2) можно сделать вывод о том, что ам-

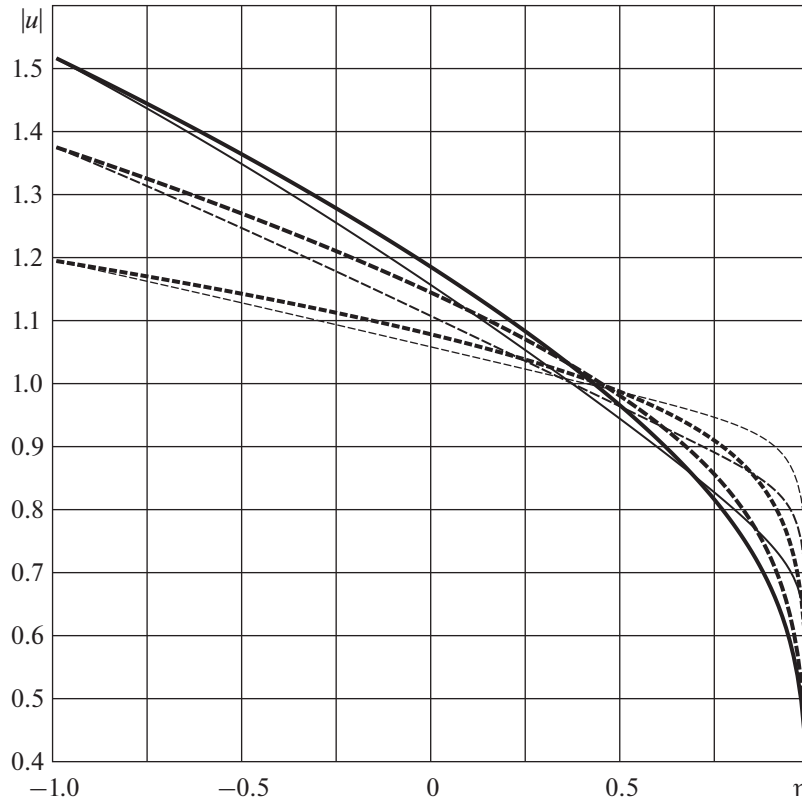


Рис. 2. Амплитуда поля в сечениях $x = 0$ (жирные линии) и $y = 0$ (тонкие линии) на эллипсоидах с полуосями $200k^{-1}$, $20k^{-1}$ и $15k^{-1}$ (сплошная линия), $200k^{-1}$, $20k^{-1}$ и $10k^{-1}$ (штриховая линия), $200k^{-1}$, $20k^{-1}$ и $5k^{-1}$ (пунктир).

плитуда поля в более вытянутом сечении оказывается меньше, чем в менее вытянутом.

При дифракции на идеально мягкой поверхности удобно ввести величину

$$v = \sqrt{\frac{p}{k}} \sqrt{1 - \eta^2} \frac{\partial u}{\partial n},$$

которая в старшем порядке не зависит от асимптотического параметра kp . Расчеты по формуле

(33) представлены на рис. 3. Влияние поперечной кривизны на распределение поля оказывается сходным. Однако (см. рис. 4), по сравнению с задачей дифракции на жесткой поверхности амплитуда v оказывается больше в более вытянутом сечении, чем в менее вытянутом. Кроме того, влияние поперечной кривизны проявляется сильнее, чем в случае жесткой поверхности. Этот факт в некотором смысле неожиданный, так как при использовании стандартного метода параболического уравнения поправка на поперечную кривизну для дифракции на идеально мягкой поверхности появляется лишь в третьем члене асимптотики [3], в то время как в случае жесткой поверхности уже во втором [19].

Таблица 1. Значения $|v|$ на эллипсоидах, длины двух полуосей которых имеют фиксированные значения $200k^{-1}$ и $20k^{-1}$, а длина третьей (a_x) меняется

Полуось (k^{-1})	$ v(0, t_0, 0) $	$ v(1, t_0, 0) $
15	1.2625695	1.6000447
10	1.1161410	2.0459228
5	0.9662729	3.4741242
1	0.8487356	15.1752945
0.2	0.8258801	73.6736424
0.02	0.8207700	731.9964218
0.002	0.8202608	7315.2478423

Особый интерес вызывает исследование предела при превращении эллипсоида в сильно вытянутый эллиптический диск. В случае жесткого диска рассеянное поле отсутствует, а в случае мягкого наблюдается усиление поля на кромке диска. Рассчитанные значения величины $|v|$ на границе свет–тень в сечениях $x = 0$ и $y = 0$ приведены в табл. 1.

При уменьшении толщины эллипсоида величина v в сечении $y = 0$ стремится к пределу

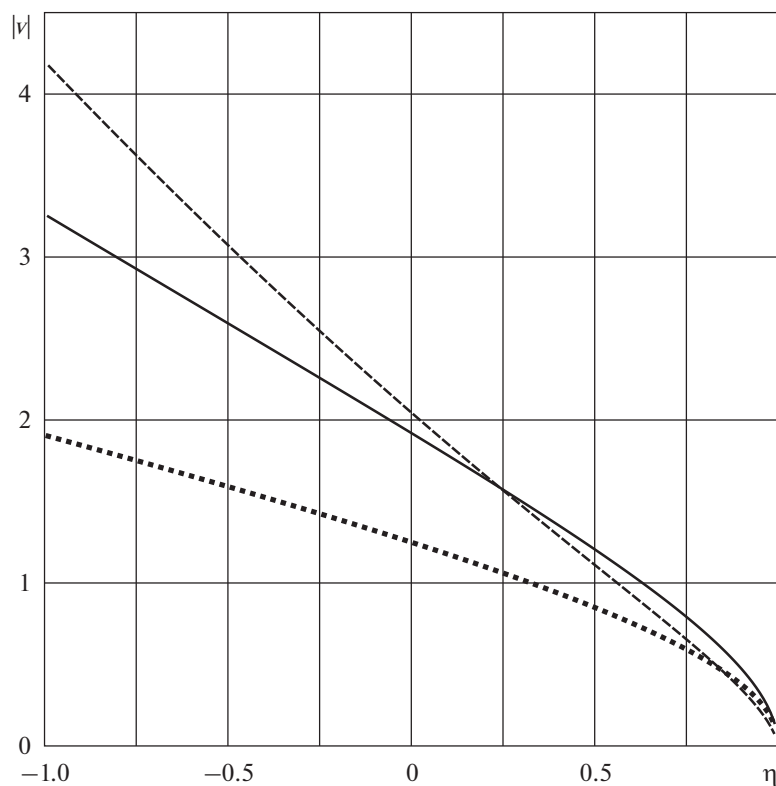


Рис. 3. Амплитуда $|v|$ в сечении $x = 0$ на мягком сфероиде с полуосями $200k^{-1}$ и $10k^{-1}$ (сплошная линия) и на эллипсоидах с полуосями $200k^{-1}$, $10k^{-1}$ и $20k^{-1}$ (штриховая линия) и $200k^{-1}$, $10k^{-1}$ и $5k^{-1}$ (пунктир).

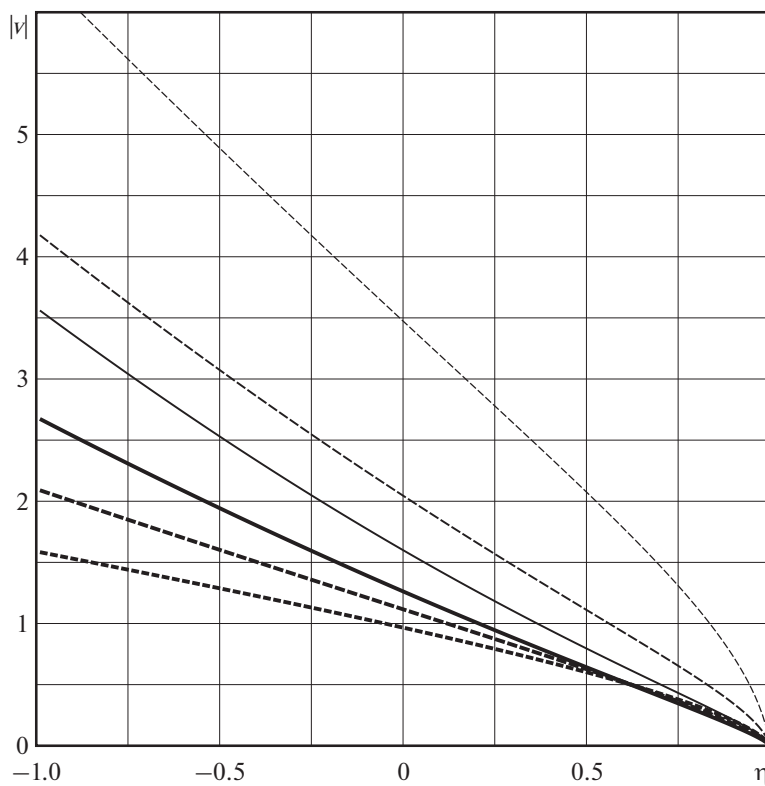


Рис. 4. Амплитуда $|v|$ в сечениях $x = 0$ (жирные линии) и $y = 0$ (тонкие линии) на эллипсоидах с полуосями $200k^{-1}$, $20k^{-1}$ и $15k^{-1}$ (сплошная линия), $200k^{-1}$, $20k^{-1}$ и $10k^{-1}$ (штриховая линия), $200k^{-1}$, $20k^{-1}$ и $5k^{-1}$ (пунктир).

$v_0 \approx 0.82$, а в сечении $x = 0$ неограниченно возрастает примерно пропорционально отношению a_y/a_x .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной статье мы построили и исследовали высокочастотную асимптотику поля дифракции на сильно вытянутом трехосном эллипсоиде для случая падения плоской волны вдоль большой полуоси эллипсоида. При этом учитывалось лишь поле прямой волны, описываемой в приближении модифицированного метода параболического уравнения. Подобно тому, как это было сделано в случае дифракции на сильно вытянутом сфероиде, в дальнейшем предполагается распространить результаты анализа на падение под углом, на другие виды падающих полей, а также включить в рассмотрение “обратную” волну, формирующуюся вследствие огибания рассеянным полем теневого конца эллипсоида. Общая идея указанных обобщений повторяет случай сфероида, однако на пути их реализации ожидаются определенные трудности. Во-первых, усложнение интеграла (28) приводит к проблеме сведения его к известным специальным функциям. Во-вторых, нет явных выражений для асимптотик функций класса Гойна, использование которых необходимо при получении амплитуды “обратной” волны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фок В.А. Новые методы в теории дифракции // Вестник Ленинградского университета. 1947. № 4. С. 5–11.
2. Белкина М.Г. Характеристики излучения вытянутого эллипсоида вращения // Дифракция электромагнитных волн на некоторых телах вращения, М.: Советское радио, 1957. С. 126–147.
3. Кирпичникова Н.Я., Попов М.М. Метод параболического уравнения Леонтовича–Фока в задаче дифракции на вытянутых телах // Зап. научн. семинаров ПОМИ. 2012. Т. 409. № 42. С. 55–79.
4. Корольков А.И., Шанин А.В., Белоус А.А. Дифракция на вытянутом теле вращения с импедансными границами. Метод граничного интегрального параболического уравнения // Акуст. журн. 2019. Т. 65. № 3. С. 440–447.
5. Клеев А.И., Кюркчан А.Г. Использование метода диаграммных уравнений в сфероидальных координатах для решения задач дифракции на сильно вытянутых рассеивателях // Акуст. журн. 2015. Т. 61. № 1. С. 21–29.
6. Андронов И.В. Дифракция на сильно вытянутом теле вращения // Акуст. журн. 2011. Т. 57. № 2. С. 147–152.
7. Андронов И.В. Дифракция плоской волны, падающей под малым углом к оси вращения сильно вытянутого сфероида // Акуст. журн. 2012. Т. 58. № 5. С. 571–579.
8. Andronov I.V. High-frequency acoustic scattering from prolate spheroids with high aspect ratio // J. Acoust. Soc. Am. 2013. V. 134. № 6. P. 4307–4316.
9. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 3. М.: Наука, 1967. 300 с.
10. Федорюк М.В. Дифракция звуковых волн на трехосном эллипсоиде // Акуст. журн. 1988. Т. 34. № 1. С. 160–164.
11. Chernokozhin E.V., Andronov I.V., Boag A. Mutual Validation of a Fast Solver Based on the Multilevel Non-uniform Grid Approach and an Asymptotic Approximation for High-frequency Scattering by Strongly Elongated Spheroids // 2020 XXXIIIrd General Assembly and Scientific Symposium of the International Union of Radio Science. <https://doi.org/10.23919/URSIGASS49373.2020.9231997>
12. Морс Ф.М., Фейсбах Г. Методы теоретической физики. Т. 1. М.: ИЛ, 1958. 931 с.
13. Петров В.Э. Обобщенное сингулярное уравнение Трикоми как уравнение свертки // Доклады Акад. наук. 2006. Т. 411(2). С. 1–5.
14. Федорюк М.В. Асимптотические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1983. 352 с.
15. Славянов С.Ю., Лай В. Специальные функции: единая теория, основанная на анализе особенностей. С.-Петербург: Невский Диалект, 2002. 312 с.
16. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963. 1100 с.
17. Andronov I.V., Vouche D. Asymptotic of creeping waves on a strongly prolate body // Ann. Télécommun. 1994. V. 49. № 3–4. P. 205–210.
18. Абрамов А.А., Дышко А.Л., Конюхова Н.Б., Левитина Т.В. О численно-аналитическом исследовании задач дифракции плоской звуковой волны на идеальных вытянутых сфероидах и трехосных эллипсоидах // Журн. вычислит. матем. и матем. физики. 1995. Т. 35. № 9. С. 1374–1400.
19. Hong S. Asymptotic theory of electromagnetic and acoustic diffraction by smooth convex surfaces of variable curvature // J. Math. Physics. 1967. V. 8. P. 1223–1232.