АКУСТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, 2019, том 65, № 5, с. 650–661

АКУСТИКА ОКЕАНА. ГИДРОАКУСТИКА

УДК 534.231

ЗВУКОВОЕ ПОЛЕ В МОРСКОМ ВОЛНОВОДЕ С ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ НЕОДНОРОДНОСТЬЮ

Ю. И. Папкова[a], *, С. О. Папков[a]

[a]Севастопольский государственный университет, ул. Университетская 33, Севастополь, 299053 Россия

*e-mail: yulia.papkova@gmail.com

Поступила в редакцию 11.12.2018 г.
После доработки 17.04.2019 г.
Принята к публикации 07.05.2019 г.

Построено трехмерное аналитическое решение для модели неоднородного гидроакустического волновода с цилиндрической неоднородностью внутри осадочного слоя. Предложен численно-аналитический метод нахождения потенциала скоростей, при котором неопределенные коэффициенты при нормальных модах определяются из соответствующей бесконечной системы линейных алгебраических уравнений. Исследовано асимптотическое поведение амплитудных коэффициентов в системе. Проведено численное исследование звуковых полей при варьировании параметров задачи.

Ключевые слова: трехмерное аналитическое решение, неоднородный гидроакустический волновод, бесконечная система линейных алгебраических уравнений, звуковое поле в морской среде

DOI: 10.1134/S0320791919050174

ВВЕДЕНИЕ

Исследование процессов распространения акустических волн в неоднородных гидроакустических волноводах представляет интерес в связи с потребностями дистанционного зондирования ресурсов, структуры дна и мониторинга океана, поэтому актуальным является учет различных факторов при моделировании распространения звука в волноводе, влияющих на изменение характеристик звукового поля с расстоянием.

В настоящее время для компьютерного моделирования звуковых полей в неоднородных волноводах в качестве основы используют модели плоскослоистых волноводов [1, 2], где наибольший интерес представляет слой неконсолидированных осадков и газонасыщенный осадочный слой [3]. Характерной особенностью данного слоя является присутствие неоднородностей природного и антропогенного свойства, вызывающих локальные нестратифицированные возмущения акустического поля в волноводе. Для оценки влияния таких физических особенностей в волноводе разработано большое количество вычислительных алгоритмов, например, в работах [4, 5] при численном исследовании влияния цилиндрической неоднородности на звуковое поле препятствие моделируется как жидкое тело с гладкой границей и с иными, чем в остальном волноводе плотностью и скоростью звука. Решение задачи сводится к системе интегральных уравнений, требующих, по словам авторов [4, 5], при решении существенных временных затрат.

В данной статье также рассматривается трехмерная модель волновода с цилиндрической неоднородностью внутри осадочного слоя. В отличие от [4], представленный подход позволяет получить решение не только в волноводе с цилиндрической неоднородностью с гладкой границей, но и при резком скачке параметров (инженерная конструкция), т.е. учитывает особенности поля в окрестности ребер и угловых точек. Кроме этого, при построении решения учитываются все граничные условия задачи, которые выполняются посредством решения бесконечных систем линейных уравнений.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим в качестве основы плоскослоистую модель морского акустического волновода на твердом основании постоянной глубины h. Водный слой характеризуется скоростью звука $c_0(z)$ и постоянной плотностью ρ_0, слой донных осадков является однородным с плотностью ρ_1 и постоянной скоростью звука c_1. Предположим, что имеется некоторое твердое тело, погруженное в слой осадков. Возникает вопрос, каким образом данная неоднородность меняет картину звуково-

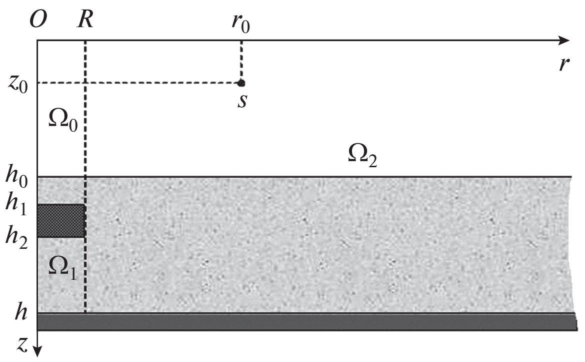

Рис. 1. Сечение гидроакустического волновода в азимутальной плоскости $\varphi = \varphi_0$.

го поля в волноводе для точечного источника? Для ответа на этот вопрос, положим, что данная неоднородность имеет форму кругового цилиндра, которую удобно моделировать в цилиндрической системе координат с началом в точке на поверхности волновода на оси цилиндрической неоднородности, ось Oz ориентирована в направлении дна (рис. 1). Геометрия модели волновода позволяет его разбить на три цилиндрические области: область Ω_0 – расположенную над неоднородностью, область Ω_1 – расположенную под неоднородностью и внешнюю область Ω_2. Точечный гармонический источник звука с координатами $S(r_0, z_0, \varphi_0)$, излучающий волну круговой частоты $\omega = 2\pi f$, может быть расположен в произвольной точке волновода, однако наибольший интерес вызывает случай, когда источник звука находится во внешней области Ω_2. В силу того, что размеры неоднородности по сравнению с размерами волновода малы, то можно предположить, что скорость звука имеет одинаковое распределение $c(z)$ по всей трассе.

Как известно [1], звуковое поле в волноводе, содержащем точечный гармонический источник, может быть описано при помощи скалярной функции $\Phi(r, z, \varphi)$ – амплитуды потенциала скоростей, удовлетворяющей уравнению Гельмгольца:

$$\Delta\Phi + \frac{\omega^2}{c^2(z)}\Phi = -\frac{\delta(r - r_0)\delta(z - z_0)\delta(\varphi - \varphi_0)}{r}, \quad (1)$$

где $\Delta\Phi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа; δ – дельта функция Дирака.

Для представленного на рис. 1 волновода звуковое поле в области Ω_2 удовлетворяет неоднородному уравнению (1); в областях волновода Ω_0 и Ω_1 амплитуда потенциала скоростей каждой области $\Phi(r, z, \varphi)$ удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца:

$$\Delta\Phi + \frac{\omega^2}{c^2(z)}\Phi = 0. \quad (2)$$

На границах волновода используем условия полного поглощения звука поверхностью волновода и условие полного отражения от его дна, при этом на цилиндрической неоднородности также ставится условие полного отражения от его поверхности. Обозначая как Φ_0, Φ_1 и Φ_2 значения амплитуды потенциала скоростей в областях Ω_0, Ω_1 и Ω_2 соответственно, получаем граничные условия для уравнений (1) и (2):

$$\Phi_0\big|_{z=0} = 0, \quad \frac{\partial\Phi_0}{\partial z}\bigg|_{z=h_1} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial z}\bigg|_{z=h_2} = 0, \quad \frac{\partial\Phi_1}{\partial z}\bigg|_{z=h} = 0, \quad (4)$$

$$\Phi_2\big|_{z=0} = 0, \quad \frac{\partial\Phi_2}{\partial z}\bigg|_{z=h} = 0. \quad (5)$$

Условия непрерывности звукового поля на стыке областей Ω_0, Ω_1 и Ω_2 при $r = R$ и условия жесткого дна для неоднородности можно объединить следующим образом

$$\Phi_0\big|_{r=R} = \Phi_2\big|_{r=R}, \quad 0 \le z \le h_1, \quad (6)$$

$$\Phi_1\big|_{r=R} = \Phi_2\big|_{r=R}, \quad h_2 \le z \le h, \quad (7)$$

$$\frac{\partial\Phi_2}{\partial r}\bigg|_{r=R} = \begin{cases} \frac{\partial\Phi_0}{\partial r}\Big|_{r=R}, & 0 \le z < h_1, \\ 0, & h_1 < z < h_2, \\ \frac{\partial\Phi_1}{\partial r}\Big|_{r=R}, & h_2 < z \le h. \end{cases} \quad (8)$$

ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Пусть источник звука расположен во внешней области (рис. 1) в точке с координатами (r_0, z_0, φ_0). Следуя методике [6], построим общее решение краевой задачи (1)–(8) в каждой j-ой области Ω_j ($j = 0, 1, 2$), удовлетворяющее граничным условиям на горизонтальных стенках волновода и условию излучения, в виде суммы нормальных мод с неопределенными коэффициентами X_{mn}, Y_{mn} и Z_{mn}:

$$\Phi_0(r,z,\varphi)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}X_{mn}\psi_{0,n}(z)J_m(\xi_{0,n}r)\theta_m(\varphi), \quad (9)$$

$$\Phi_1(r,z,\varphi)=\sum_{m=0}^{\infty}\Big(Y_{m0}J_m(k_1r)+ +\sum_{n=1}^{\infty}Y_{mn}\psi_{1,n}(z)J_m(\xi_{1,n}r)\Big)\theta_m(\varphi), \quad (10)$$

$$\Phi_2(r,z,\varphi)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\psi_{2,n}(z)\big(B_{mn}J_m(\xi_{2,n}r)+ + Z_{mn}H_m^{(1)}(\xi_{2,n}r)\big)\theta_m(\varphi), \quad r\le r_0, \quad (11)$$

$$\Phi_2(r,z,\varphi)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\psi_{2,n}(z)\left(B_{mn}\frac{J_m(\xi_{2,n}r_0)}{H_m^{(1)}(\xi_{2,n}r_0)}\times \times H_m^{(1)}(\xi_{2,n}r)+Z_{mn}H_m^{(1)}(\xi_{2,n}r)\right)\theta_m(\varphi), \quad r>r_0, \quad (12)$$

где $\{\xi_{j,n}\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\psi_{j,n}(z)\}_{n=1}^{\infty}$ – собственные числа и собственные функции краевых задач:

$$\frac{d^2\psi_{0,n}}{dz^2}+\left(\frac{\omega^2}{c^2(z)}-\xi^2\right)\psi_{0,n}=0, \quad \psi_{0,n}(0,\xi)=0,\quad \psi'_{0,n}(h_1,\xi)=0, \quad (13)$$

$$\frac{d^2\psi_{1,n}}{dz^2}+\left(\frac{\omega^2}{c^2(z)}-\xi^2\right)\psi_{1,n}=0, \quad \psi'_{1,n}(h_2,\xi)=0,\quad \psi'_{1,n}(h,\xi)=0, \quad (14)$$

$$\frac{d^2\psi_{2,n}}{dz^2}+\left(\frac{\omega^2}{c^2(z)}-\xi^2\right)\psi_{2,n}=0, \quad \psi_{2,n}(0,\xi)=0,\quad \psi'_{2,n}(h,\xi)=0, \quad (15)$$

$H_m^{(1)}(z)=J_m(z)+iY_m(z)$ – функция Ханкеля 1-го рода порядка m, $J_m(z)$ и $Y_m(z)$ – функции Бесселя первого и второго рода соответственно.

В силу того, что горизонтальные стенки волновода в области Ω_1 являются полностью отражающими и скорость звука в данной области постоянна c_1, то выражение для общего решения (10) содержит слагаемое, отвечающее постоянной нулевой вертикальной моде $\psi_{1,0}(z)=1$, при этом отвечающее данной функции собственное значение будет совпадать с соответствующим волновым числом $\xi_{1,0}=k_1\left(k_1=\dfrac{\omega}{c_1}\right)$.

Заметим, что среди краевых задач (13)–(15) лишь задача (14) является классической задачей Штурма–Лиувилля в предположении, что слой донных осадков под телом (Ω_1) будет однородным. Для областей Ω_0 и Ω_2 на границе слоев $z=h_0$ должны выполняться условия непрерывности звукового поля

$$\lim_{z\to h_{0-}}\rho_0\Phi=\lim_{z\to h_{0+}}\rho_1\Phi,\quad \lim_{z\to h_{0-}}\frac{\partial\Phi}{\partial z}=\lim_{z\to h_{0+}}\frac{\partial\Phi}{\partial z}. \quad (16)$$

Используя данные условия, находим собственные функции и собственные числа задач (13)–(15). Аналитическое представление собственных функций данных краевых задач тесно связано с разрешимостью соответствующих дифференциальных уравнений, что возможно лишь для некоторых специально подобранных профилей скорости звука [7]. В частности, если профиль скорости звука в водном слое постоянный c_0, то собственные числа и функции задачи (13) в области Ω_0 будут иметь вид

$$\psi_{0,n}=\begin{cases}\dfrac{\rho_1}{\rho_0}\dfrac{\cos\left(\mu_{1,n}^0(h_1-h_0)\right)}{\sin\left(\mu_{0,n}^0h_0\right)\cos\left(\mu_{1,n}^0h_1\right)}\sin\left(\mu_{0,n}^0z\right), & z<h_0,\\ \dfrac{\cos\left(\mu_{1,n}^0(h_1-z)\right)}{\cos\left(\mu_{1,n}^0h_1\right)}, & z>h_0,\end{cases} \quad (17)$$

где $\mu_{j,n}^0=\sqrt{k_j^2-\xi_{0n}^2}$, $k_j=\dfrac{\omega}{c_j}$ $(j=0,1)$, а собственные числа являются корнями дисперсионного уравнения

$$\operatorname{tg}\left(\mu_{0,n}^0h_0\right)\operatorname{tg}\left(\mu_{1,n}^0(h_1-h_0)\right)=\frac{\rho_1}{\rho_0}\frac{\mu_{0,n}^0}{\mu_{1,n}^0}. \quad (18)$$

В области Ω_1 получаем в силу однородности слоя донных осадков под телом

$$\xi_{1,n}=\sqrt{k_1^2-\left(\frac{\pi n}{h-h_2}\right)^2},\quad \psi_{1,n}=\cos\frac{\pi n(z-h_2)}{h-h_2}. \quad (19)$$

Во внешней области Ω_2 собственные функции будут иметь вид

$$\psi_{2,n}=\begin{cases}\dfrac{\rho_1}{\rho_0}\dfrac{\cos\left(\mu_{1,n}(h-h_0)\right)}{\sin\left(\mu_{0,n}h_0\right)\cos\left(\mu_{1,n}h\right)}\sin\left(\mu_{0,n}z\right), & z<h_0,\\ \dfrac{\cos\left(\mu_{1,n}(h-z)\right)}{\cos\left(\mu_{1,n}h\right)}, & z>h_0,\end{cases} \quad (20)$$

где $\mu_{j,n}=\sqrt{k_j^2-\xi_{2,n}^2}$ – собственные числа, которые являются корнями дисперсионного уравнения

$$\operatorname{tg}\left(\mu_{0,n}h_0\right)\operatorname{tg}\left(\mu_{1,n}(h-h_0)\right)=\frac{\rho_1}{\rho_0}\frac{\mu_{0,n}}{\mu_{1,n}}. \quad (21)$$

Доказано, что при отсутствии затухания в волноводе среди собственных чисел краевых задач (13)–(15) будет конечное число вещественных значений, отвечающих распространяющимся модам в волноводе, и бесконечное число чисто мнимых, отвечающих затухающим модам, при этом собственные функции каждой из задач (13)–(15) являются ортогональными в пространстве интегрируемых с квадратом функций L_2 с весом $\rho(z)$. Для удобства обозначим нормирующие коэффициенты для собственных функций в каждой области как

$$\gamma_{0,n}=\int_0^{h_1}\rho(z)\psi_{0,n}^2(z)dz,\quad \gamma_{1,n}=\int_{h_2}^{h}\rho_1\psi_{1,n}^2(z)dz,$$
$$\gamma_{2,n}=\int_0^{h}\rho(z)\psi_{2,n}^2(z)dz. \tag{22}$$

Общее решение в виде (11)–(12) будет удовлетворять условию в источнике во внешней области, если положить [8]:

$$B_{mn}=\frac{\pi i}{2}\frac{\rho(z_0)\psi_{2,n}(z_0)\theta_m(\varphi_0)}{\gamma_{2,n}}H_m^{(1)}\left(\xi_{2,n}r_0\right). \tag{23}$$

В силу симметрии задачи относительно плоскости, содержащей вертикальную ось координат, азимутальные собственные функции $\left\{\theta_m(\varphi)\right\}_{m=0}^{\infty}$ выбираются в виде

$$\theta_m(\varphi)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}, & m=0,\\ \dfrac{\cos m(\varphi-\varphi_0)}{\sqrt{\pi}}, & m=1,2,\ldots\end{cases}$$

Азимутальные собственные функции являются ортонормированными

$$\int_{-\pi}^{\pi}\theta_m(\varphi)\theta_n(\varphi)d\varphi=\delta_{mn},$$

где δ_{mn} – символ Кронекера.

Входящие в выражения амплитуд потенциалов (9)–(12) неопределенные коэффициенты X_{mn}, Y_{mn} и Z_{mn} позволяют выполнить условия непрерывности звукового поля на стыке областей Ω_0, Ω_1 и Ω_2 при $r=R$ и условия жесткого дна для неоднородности (6)–(8). Действительно, получаем из (7) для $0\le z\le h_1$:

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}X_{mn}\psi_{0,n}(z)J_m\left(\xi_{0,n}R\right)\theta_m(\varphi)=$$
$$=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\psi_{2,n}(z)\left(B_{mn}J_m\left(\xi_{2,n}R\right)+\right.$$
$$\left.+Z_{mn}H_m^{(1)}\left(\xi_{2,n}R\right)\right)\theta_m(\varphi).$$

Данное равенство распадается в последовательность равенств при каждой азимутальной собственной функции $\left\{\theta_m(\varphi)\right\}_{m=0}^{\infty}$ следующего вида

$$\sum_{n=1}^{\infty}X_{mn}\psi_{0,n}(z)J_m\left(\xi_{0,n}R\right)=$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_{2,n}(z)\left(B_{mn}J_m\left(\xi_{2,n}R\right)+\right. \tag{24}$$
$$\left.+Z_{mn}H_m^{(1)}\left(\xi_{2,n}R\right)\right),\quad m=0,1,\ldots$$

Далее, используя свойство ортогональности собственных функций $\left\{\psi_{0,n}(z)\right\}_{n=1}^{\infty}$ в пространстве $L_2[0;h_1]$ применительно к каждому из уравнений (24), получаем следующие алгебраические соотношения

$$\gamma_{0,k}X_{mk}J_m(\xi_{0,k}R)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(B_{mn}J_m(\xi_{2,n}R)+\right.$$
$$\left.+Z_{mn}H_m^{(1)}(\xi_{2,n}R)\right)\int_0^{h_1}\rho(z)\psi_{2,n}(z)\psi_{0,k}(z)dz, \tag{25}$$
$$m=0,1,\ldots;\quad k=1,2,\ldots$$

Аналогичным образом, из условий (7) находим следующие функциональные соотношения на отрезке $h_2\le z\le h$

$$Y_{m0}J_m\left(k_1R\right)+\sum_{n=1}^{\infty}Y_{mn}\psi_{1,n}(z)J_m\left(\xi_{1,n}R\right)=$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_{2,n}(z)(B_{mn}J_m\left(\xi_{2,n}R\right)+$$
$$\left.+Z_{mn}H_m^{(1)}\left(\xi_{2,n}R\right)\right),\quad m=0,1,\ldots$$

Откуда, в силу ортогональности и полноты тригонометрической системы функций (19), следуют алгебраические равенства:

$$\begin{cases} \rho_1(h-h_2)Y_{m0}J_m\left(k_1R\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(B_{mn}J_m\left(\xi_{2,n}R\right) + Z_{mn}H_m^{(1)}\left(\xi_{2,n}R\right)\right)\int\limits_{h_2}^{h}\rho_1\psi_{2,n}(z)dz, \\ Y_{mk}\gamma_{1,k}J_m\left(\xi_{1k}R\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(B_{mn}J_m\left(\xi_{2,n}R\right) + Z_{mn}H_m^{(1)}\left(\xi_{2,n}R\right)\right)\int\limits_{h_2}^{h}\rho(z)\psi_{2,n}(z)\psi_{1,k}(z)dz, \quad k=1,2,\ldots, \quad m=0,1,\ldots \end{cases} \tag{26}$$

Из системы условий на нормальную производную (8) можно найти, что

$$\begin{gathered} \gamma_{2,k}\left(B_{mn}\left(\frac{m}{R}J_m\left(\xi_{2,k}R\right) - \xi_{2,k}J_{m+1}\left(\xi_{2,k}R\right)\right) + \right. \\ \left. + Z_{mn}\left(\frac{m}{R}H_m^{(1)}\left(\xi_{2,k}R\right) - \xi_{2,k}H_{m+1}^{(1)}\left(\xi_{2,k}R\right)\right)\right) = \\ = \sum_{n=1}^{\infty}X_{mn}\left(\frac{m}{R}J_m\left(\xi_{0,n}R\right) - \xi_{0,n}J_{m+1}\left(\xi_{0,n}R\right)\right)\times \\ \times\int\limits_0^{h_1}\rho(z)\psi_{0,n}(z)\psi_{2,k}(z)dz + \\ + Y_{m0}\left(\frac{m}{R}J_m\left(k_1R\right) - k_1J_{m+1}\left(k_1R\right)\right)\int\limits_{h_2}^{h}\rho(z)\psi_{2,k}(z)dz + \\ + \sum_{n=1}^{\infty}Y_{mn}\left(\frac{m}{R}J_m\left(\xi_{1,n}R\right) - \xi_{1,n}J_{m+1}\left(\xi_{1,n}R\right)\right)\times \\ \times\int\limits_{h_2}^{h}\rho(z)\psi_{1,n}(z)\psi_{2,k}(z)dz, \quad m=0,1,\ldots \end{gathered} \tag{27}$$

Система равенств (25)–(27) дает бесконечную систему линейных алгебраических уравнений для нахождения неопределенных коэффициентов X_{mn}, Y_{mn} и Z_{mn}. Данную систему можно записать более компактно, если ввести дополнительные обозначения для неизвестных амплитудных коэффицентов

$$\begin{aligned} x_{m,k} &= X_{mk}J_m(\xi_{0,k}R), \\ y_{m,1} &= Y_{m0}J_m(k_1R), \\ y_{m,k+1} &= Y_{mk}J_m(\xi_{1,k}R), \quad (k=1,2,\ldots) \\ z_{m,k} &= B_{mn}J_m(\xi_{2,k}R) + Z_{mn}H_m^{(1)}(\xi_{2,k}R) \end{aligned} \tag{28}$$

и для входящих в уравнения интегралов

$$\begin{aligned} I_{n,k}^{(1)} &= \int\limits_0^{h_1}\rho(z)\psi_{0,k}(z)\psi_{2,n}(z)dz, \\ I_{n,k}^{(2)} &= \int\limits_{h_2}^{h}\rho(z)\psi_{1,k}(z)\psi_{2,n}(z)dz. \end{aligned} \tag{29}$$

Тогда бесконечная система преобразуется к виду

$$\begin{cases} x_{m,k} = \dfrac{1}{\gamma_{0,k}}\sum\limits_{n=1}^{\infty}I_{n,k}^{(1)}z_{m,n}, \\ y_{m,k} = \dfrac{1}{\gamma_1(1+\delta_{k1})}\sum\limits_{n=1}^{\infty}I_{n,k-1}^{(2)}z_{m,n}, \\ z_{m,k} = \dfrac{1}{\gamma_{2,k}}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\dfrac{m}{R} - \xi_{0,n}\dfrac{J_{m+1}\left(\xi_{0,n}R\right)}{J_m\left(\xi_{0,n}R\right)}}{\dfrac{m}{R} - \xi_{2,k}\dfrac{J_{m+1}\left(\xi_{2,k}R\right)}{J_m\left(\xi_{2,k}R\right)}}I_{k,n}^{(1)}x_{m,n} + \\ + \dfrac{1}{\gamma_{2,k}}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\dfrac{m}{R} - \xi_{1,n-1}\dfrac{J_{m+1}\left(\xi_{1,n-1}R\right)}{J_m\left(\xi_{1,n-1}R\right)}}{\dfrac{m}{R} - \xi_{2,k}\dfrac{J_{m+1}\left(\xi_{2,k}R\right)}{J_m\left(\xi_{2,k}R\right)}}I_{k,n-1}^{(2)}y_{m,n} + \\ + \dfrac{2i}{\pi R}\dfrac{B_{mk}}{\left(\dfrac{m}{R}H_m^{(1)}\left(\xi_{2,k}R\right) - \xi_{2,k}H_{m+1}^{(1)}\left(\xi_{2,k}R\right)\right)}, \\ m=0,1,\ldots; \quad k=1,2,\ldots \end{cases} \tag{30}$$

При записи (30) также используется символ Кронекера δ_{k1} и тот факт, что в области Ω_1 нормирующие коэффициенты для собственных функций являются постоянными величинами

$$\gamma_{1,n} = \int\limits_{h_2}^{h}\rho_1\psi_{1,n}^2(z)dz = \rho_1\frac{h-h_2}{2},$$

что позволяет при их записи опустить зависимость от индекса n.

Для любой зависимости скорости звука в водном слое $c_0(z)$ интегралы (29) вычисляются точно интегрированием по частям

$$I_{n,k}^{(1)} = \rho_1\frac{\psi_{0,k}(h_1)\psi'_{2,n}(h_1)}{\xi_{2,n}^2 - \xi_{0,k}^2},$$

$$I_{n,k}^{(2)} = -\frac{\rho_1\psi_{1,k}(h_2)\psi'_{2,n}(h_2)}{\xi_{2,n}^2 - \xi_{1,k}^2}.$$

В случае, когда скорость звука в водном слое постоянна $c_0(z) = c_0$, можно явно найти остальные величины, входящие в систему

$$I_{n,0}^{(2)} = \frac{\rho_1\sin\mu_{1,n}(h-h_2)}{\mu_{1,n}\cos\mu_{1,n}h},$$

$$\gamma_{0,k} = \frac{\rho_1}{2\cos^2\mu^0_{1,n} h_1}\left(\frac{\rho_1\cos^2\mu^0_{1,n}(h_1-h_0)}{\rho_0\sin^2\mu^0_{0,n}h_0}\times\right.$$
$$\left.\times\left(h_0-\frac{\sin 2\mu^0_{0,n}h_0}{2\mu^0_{0,n}}\right)+h_1-h_0+\frac{\sin 2\mu^0_{1,n}(h_1-h_0)}{2\mu^0_{1,n}}\right),$$

$$\gamma_{2,k} = \frac{\rho_1}{2\cos^2\mu_{1,n} h}\left(\frac{\rho_1\cos^2\mu_{1,n}(h-h_0)}{\rho_0\sin^2\mu_{0,n}h_0}\times\right.$$
$$\left.\times\left(h_0-\frac{\sin 2\mu_{0,n}h_0}{2\mu_{0,n}}\right)+h-h_0+\frac{\sin 2\mu_{1,n}(h-h_0)}{2\mu_{1,n}}\right).$$

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ АМПЛИТУДНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ В БЕСКОНЕЧНОЙ СИСТЕМЕ УРАВНЕНИЙ

Модель гидроакустического волновода (рис. 1) содержит в любом азимутальном сечении $\varphi = \varphi^*$ две угловые точки (R, h_1, φ^*) и (R, h_2, φ^*), соответствующие ребрам цилиндрической неоднородности. Несмотря на то, что наличие подобных точек является, как правило, следствием излишней идеализации модели, в данном случае априорное знание характера особенности в поле скоростей в окрестности этих точек позволяет найти асимптотику решения системы (30) и улучшить качество представленного подхода. Следуя подходу [9], учтем, что в окрестности ребер должно выполняться условие Мейкснера для звукового давления и компонентов колебательной скорости при $\tau \to 0$

$$p \sim C_{1j} + C_{2j}\tau^{\frac{\pi}{\alpha}},\quad v_r \sim C_{3j}\tau^{\frac{\pi}{\alpha}-1},\quad j = 1,2, \tag{31}$$

где $\tau = \sqrt{(r-R)^2 + (z-h_j)^2 + (\varphi-\varphi^*)^2}$; C_{kj} – величины, не зависящие от τ; $\alpha = 3\pi/2$ – внешний угол, охватывающий острую кромку акустически жесткого тела. Данное условие показывает, что звуковое давление остается на ребре ограниченным, и реального физического источника энергии на ребре нет. Появление бесконечно больших колебательных скоростей вблизи ребра объясняться поведением градиентов поля в этой области. В рассматриваемом случае колебательная скорость имеет степенную особенность вблизи верхнего и нижнего ребер порядка $\frac{\pi}{\alpha} - 1 = -\frac{1}{3}$.

Тогда на границе раздела областей $r = R$ поведение колебательной скорости v_r или нормальной производной потенциала $\frac{\partial\Phi}{\partial r}$ вблизи угловых точек описывается выражениями:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial r} \sim A_1(\varphi^*)(h_1^2 - z^2)^{-1/3},\quad z \to h_1 - 0 \quad \text{и}$$
$$\frac{\partial\Phi}{\partial r} \sim A_2(\varphi^*)(H_2^2 - (z-h)^2)^{-1/3},\quad z \to h_2 + 0,$$

где $H_2 = h - h_2$ – глубина осадков под телом, при этом коэффициенты, описывающие особенности $A_j(\varphi^*)$, являются непрерывными величинами в силу непрерывности звукового поля в области волновода.

Если ввести вспомогательные функции – носители отрезка

$$e_<(z) = \begin{cases}1, & z \in [0;\ h_1],\\ 0, & z \notin [0;\ h_1],\end{cases}$$
$$e_>(z) = \begin{cases}1, & z \in [h_2;\ h],\\ 0, & z \notin [h_2;\ h],\end{cases}$$

то следующая разность уже не имеет особенности для всех $z \in [0;\ h]$ при фиксированном значении азимутальной координаты $\varphi = \varphi^*$

$$f(z,\varphi^*) = \left.\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right|_{r=R} - e_<(z)A_1(\varphi^*)(h_1^2 - z^2)^{-1/3} - \\ - e_>(z)A_2(\varphi^*)\left(H_2^2 - (z-h)^2\right)^{-1/3}. \tag{32}$$

Следовательно, данная функция может быть разложена в ряд Фурье

$$f(z,\varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} f_m(z)\theta_m(\varphi),$$

где коэффициенты Фурье $f_m(z) = \int\limits_0^{2\pi} f(z,\varphi)\theta_m(\varphi)d\varphi$ также не имеют особенности в угловых точках и непрерывно-дифференцируемы на отрезке $z \in [0;\ h]$ за исключением точек $z = h_j$ $(j = 1,2)$. Действительно, вычитаемые функции на своих отрезках-носителях являются непрерывными, при этом $f(z,\varphi^*) = 0$ для $z \in (h_1;\ h_2)$ согласно условию (8). Таким образом, по построению функция (32) имеет в угловых точках скачки.

Запишем данные коэффициенты более подробно в виде, учитывающем разбиение волновода на части: при $z < h_1$, $r \to R - 0$ (подходим к верхней угловой точке из области Ω_0)

$$f_m(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{m}{R} - \xi_{0,n}\frac{J_{m+1}(\xi_{0,n}R)}{J_m(\xi_{0,n}R)}\right)\times \\ \times x_{m,n}\psi_{0,n}(z) - A_{1m}\left(h_1^2 - z^2\right)^{-1/3},$$

при $z > h_2$, $r \to R - 0$ (подходим к нижней угловой точке из области Ω_1)

$$f_m(z) = \left(\frac{m}{R} - k_1 \frac{J_{m+1}(k_1 R)}{J_m(k_1 R)}\right) y_{m,1} +$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{m}{R} - \xi_{1,n} \frac{J_{m+1}(\xi_{1,n} R)}{J_m(\xi_{1,n} R)}\right) y_{m,n+1} \psi_{1,n}(z) -$$
$$- A_{2m}(H_2^2 - (z-h)^2)^{-1/3},$$

при $r \to R + 0$ (подходим к угловым точкам из области Ω_2)

$$f_m(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{m}{R} - \xi_{2,n} \frac{H_{m+1}^{(1)}(\xi_{2,n} R)}{H_m^{(1)}(\xi_{2,n} R)}\right) z_{m,n} - \right.$$
$$\left. - \frac{2iB_{mn}}{\pi R H_m^{(1)}(\xi_{2,n} R)} \right\} \psi_{2,n}(z) -$$
$$- A_{1m}(h_1^2 - z^2)^{-1/3} e_<(z) - A_{2m}\left(H_2^2 - (z-h)^2\right)^{-1/3} e_>(z),$$

где $A_{jm} = \int\limits_0^{2\pi} A_j(\varphi)\theta_m(\varphi) d\varphi,\ j = 1, 2.$

Используя явные представления для собственных функций краевых задач (13)–(15), оценим скорость убывания коэффициентов ряда Фурье функции f по системе собственных функций $\psi_{j,n}$. Согласно следствию из леммы Римана–Лебега получаем оценку для коэффициентов Фурье этих функций при $n \to \infty$:

$$\left(\frac{m}{R} - \xi_{0,n} \frac{J_{m+1}(\xi_{0,n} R)}{J_m(\xi_{0,n} R)}\right) x_{m,n} \gamma_{0,n} =$$
$$= A_{1m} \int\limits_0^{h_1} \left(h_1^2 - z^2\right)^{-1/3} \psi_{0,n}(z) dz + O\left(\frac{1}{n}\right),$$
$$\left(\frac{m}{R} - \xi_{1,n} \frac{J_{m+1}(\xi_{1,n} R)}{J_m(\xi_{1,n} R)}\right) y_{m,n+1} \gamma_{1,n} =$$
$$= A_{2m} \int\limits_{h_2}^{h} \left(H_2^2 - (h-z)^2\right)^{-1/3} \psi_{1,n}(z) dz + O\left(\frac{1}{n}\right), \tag{33}$$
$$\left(\frac{m}{R} - \xi_{2,n} \frac{H_{m+1}^{(1)}(\xi_{2,n} R)}{H_m^{(1)}(\xi_{2,n} R)}\right) z_{m,n} \gamma_{2,n} =$$
$$= A_{1m} \int\limits_0^{h_1} \left(h_1^2 - z^2\right)^{-1/3} \psi_{2,n}(z) dz A_{2m} +$$
$$+ \int\limits_{h_2}^{h} \left(H_2^2 - (h-z)^2\right)^{-1/3} \psi_{2,n}(z) dz + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Далее, на основе точных значений интегралов [11]:

$$\int\limits_0^a (a^2 - x^2)^{\beta-1} \sin bx dx =$$
$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\frac{2a}{b}\right)^{\beta-1/2} \Gamma(\beta) \mathrm{H}_{\beta-1/2}(ab),$$
$$a,\ \mathrm{Re}\beta > 0,\ |\arg b| < \pi,$$
$$\int\limits_0^a (a^2 - x^2)^{\beta-1} \cos bx dx =$$
$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\frac{2a}{b}\right)^{\beta-1/2} \Gamma(\beta) J_{\beta-1/2}(ab),$$
$$a,\ \mathrm{Re}\beta > 0,\ |\arg b| < \pi,$$

и асимптотик функций Струве и Бесселя первого и второго рода [12]:

$$\mathrm{H}_\nu(z) = Y_\nu(z) + \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\Gamma(k + 1/2)}{\Gamma(\nu + 1/2 - k)(z/2)^{2k-\nu+1}} +$$
$$+ O(|z|^{\nu-2m-1}),\quad z \to \infty,$$
$$J_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}(\cos(z - \nu\pi/2 - \pi/4) + e^{|\mathrm{Im}\, z|} O(|z|^{-1})),$$
$$z \to \infty,$$
$$Y_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}(\sin(z - \nu\pi/2 - \pi/4) + e^{|\mathrm{Im}\, z|} O(|z|^{-1})),$$
$$z \to \infty,$$

можно оценить значения интегралов в (33):

$$\int\limits_0^a (a^2 - z^2)^{-1/3} \sin bx dx =$$
$$= \frac{\Gamma(2/3)}{\sqrt[3]{2a}} \frac{\sin(ab - \pi/3)}{b^{2/3}} + O\left(\frac{1}{b}\right),$$
$$\int\limits_0^a (a^2 - z^2)^{-1/3} \cos bx dx = \tag{34}$$
$$= \frac{\Gamma(2/3)}{\sqrt[3]{2a}} \frac{\cos(ab - \pi/3)}{b^{2/3}} + O\left(\frac{1}{b}\right),\ b \to \infty.$$

Асимптотические формулы (34), вместе с асимптотиками отношений функций Бесселя и Ханкеля

$$\frac{J_{m+1}(\xi_{0,n} R)}{J_m(\xi_{0,n} R)} = i,\quad \frac{H_{m+1}^{(1)}(\xi_{2,n} R)}{H_m^{(1)}(\xi_{2,n} R)} = i,\quad n \to \infty,$$

позволяют получить из (33) асимптотические формулы для неизвестных амплитудных коэффициентов в бесконечной системе

$$\left(\frac{m}{R} + |\xi_{0,n}|\right) \gamma_{0,n} x_{m,n} =$$
$$= \frac{\Gamma(2/3) A_{1m}}{2\sqrt[3]{2h_1}\, |\xi_{0,n}|^{2/3} \cos \mu_{1,n}^0 h_1} + O\left(\frac{1}{n}\right), \tag{35}$$

Таблица 1. Первые амплитудные коэффициенты в бесконечной системе (30) для волновода с параметрами: $c_0 = 1450$ м/с, $c_1 = 1600$ м/с, $\rho_0 = 1.0$ кг/м^3, $\rho_1 = 1.8$ кг/м^3, $\omega = 100$ Гц, $h_0 = 50$ м, $h = 100$ м; параметры неоднородного тела: $h_1 = 60$ м, $h_2 = 65$ м, $R = 5$ м; источник расположен в точке $r_0 = 20$ м, $z_0 = 10$ м, $\varphi_0 = 0$

Неизвестные	$m = 0$	$m = 1$	$m = 4$
x_{m1}	$-0.000356 + 0.002459i$	$0.000413 + 0.000240i$	$1.3 \times 10^{-6} + 9.7 \times 10^{-11}i$
y_{m1}	$0.000904 - 0.004260i$	$-0.000636 - 0.000413i$	$-1.8 \times 10^{-6} - 1.6 \times 10^{-10}i$
z_{m1}	$-0.000458+0.004346i$	$0.000784 + 0.000425i$	$2.7 \times 10^{-6} + 1.7 \times 10^{-10}i$
x_{m2}	$-0.000137 - 0.000062i$	$-0.000050 - 0.000006i$	$-2.9 \times 10^{-7} - 2.6 \times 10^{-12}i$
y_{m2}	$-0.001724 + 0.001835i$	$0.000027 + 0.000184i$	$-2.1 \times 10^{-8} + 7.6 \times 10^{-11}i$
z_{m2}	$-0.000127 + 0.000001i$	$-0.000033 - 1.7 \times 10^{-7}i$	$-1.8 \times 10^{-7} - 9.1 \times 10^{-14}i$
x_{m3}	$-0.000026 + 0.000022i$	$-0.000004 + 0.000002i$	$-7.6 \times 10^{-8} + 9.6 \times 10^{-13}i$
y_{m3}	$-0.000236 + 0.000365i$	$0.000004 + 0.000036i$	$-4.4 \times 10^{-8} + 1.5 \times 10^{-11}i$
z_{m3}	$0.000426 - 0.000023i$	$0.000142 - 0.000002i$	$1.2 \times 10^{-6} - 7.9 \times 10^{-13}i$

$$\left(\frac{m}{R} + \left|\xi_{1,n}\right|\right) y_{m,n+1} = \sqrt[3]{\frac{\pi}{2H_2^2}}\frac{\Gamma(2/3)A_{2m}}{\rho_1 \pi n^{2/3}} + O\left(\frac{1}{n}\right), \tag{36}$$

$$\left(\frac{m}{R} + \left|\xi_{2,n}\right|\right) z_{m,n}\gamma_{2,n} = \frac{\Gamma(2/3)}{\left|\xi_{2,n}\right|^{2/3}\cos\mu_{1,n}h} \times \left(\frac{A_{1m}}{2\sqrt[3]{2h_1}} + \frac{A_{2m}}{\sqrt[3]{2H_2}}\cos\left(\mu_{1,n}H_2 - \frac{\pi}{3}\right)\right) + O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{37}$$

С учетом асимптотик величин $\gamma_{j,n}$ и корней дисперсионных уравнений $\xi_{j,n}$ для областей Ω_0 и Ω_2, представленных в Приложении А, формулы (35)–(37) позволяют оценить характер поведения неизвестных амплитудных коэффициентов в бесконечной системе, что дает возможность использовать при численном решении бесконечной системы более эффективный, по сравнению с методом простой редукции алгоритм улучшенной редукции.

Заметим при этом, что на низких частотах с увеличением m (т.е. по азимутальной координате), неизвестные амплитудные коэффициенты в x_{mn}, y_{mn} и z_{mn} достаточно быстро убывают (табл. 1). При $m > 5$ данные величины уже фактически не влияют на звуковое поле.

ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Численная реализация предложенного алгоритма проводилась в среде пакета Mathematica, при этом бесконечная система линейных алгебраических уравнений решалась при помощи метода улучшенной редукции, согласно которому приближенное решение бесконечной системы находится из конечной системы относительно первых неизвестных амплитудных коэффициентов, а остатки бесконечных рядов сворачивались на основе формул (35)–(37) (метод асимптотических свойств [12]). Аналогично [12] замечено, что использование метода простой редукции также дает решение с соответствующими асимптотическими свойствами неизвестных.

Как известно, изменение амплитуды поля в волноводе характеризуется величиной потерь при распространении (интенсивность):

$$TL = -20\lg\left|\frac{\Phi}{\tilde{\Phi}}\right|,$$

где $\tilde{\Phi} = \dfrac{Qe^{ikr}}{4\pi r}$ – амплитуда потенциала скоростей, создаваемая точечным источником звука на расстоянии $r = 1$ м в безграничной среде; Q – объемная колебательная скорость. На рис. 2 показано изменение TL (r, z_0, φ) в плоскости координат $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ для волновода с параметрами $c_0 = 1450$ м/с, $c_1 = 1600$ м/с, $\rho_0 = 1.0$ кг/м^3, $\rho_1 = 1.8$ кг/м^3, $f = 16$ Гц, $h_0 = 50$ м, $h = 100$ м и неоднородностью $h_1 = 60$ м, $h_2 = 80$ м, $R = 20$ м, гармонический точечный источник звука находится во внешней области на различных расстояниях от неоднородности ($r_0 = 25$ м, $z_0 = 45$ м, $\varphi_0 = 0$ и $r_0 = 45$ м, $z_0 = 25$ м, $\varphi_0 = 0$). Из рис. 2 видно, что в обоих случаях наблюдается область повышенного звукового давления вблизи неоднородного тела (проекция – круг), но при удалении источника звука от тела интенсивность TL (r, z_0, φ) в этой области заметно меньше и имеет иной качественный характер. Заметим также, что возникают области повышенного звукового давления по бокам от неоднородности.

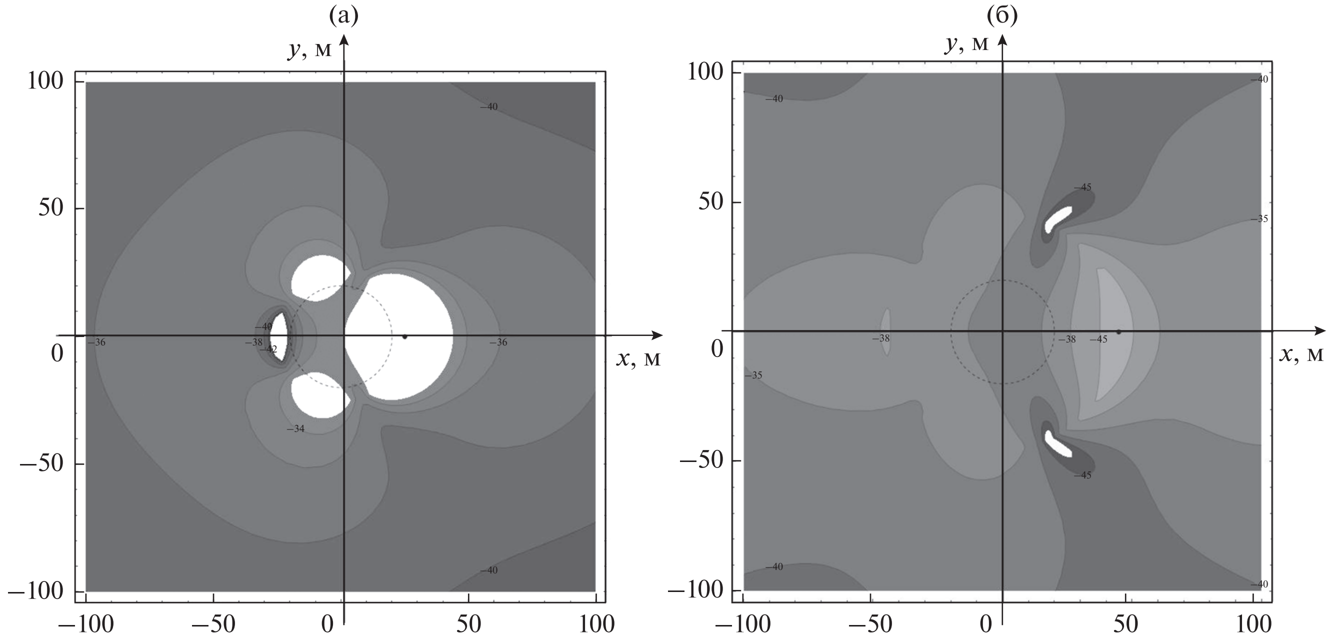

Рис. 2. Изменение TL (r, z_0, φ) в плоскости координат $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ для волновода с цилиндрическим телом (c_0 = 1450 м/с, c_1 = 1600 м/с, f = 16 Гц, h_0 = 50 м, h = 100 м, h_1 = 60 м, h_2 = 80 м, R = 20 м) (а) – при r_0 = 25 м, z_0 = 45 м, φ_0 = 0 и (б) – при r_0 = 45 м, z_0 = 25 м, φ_0 = 0.

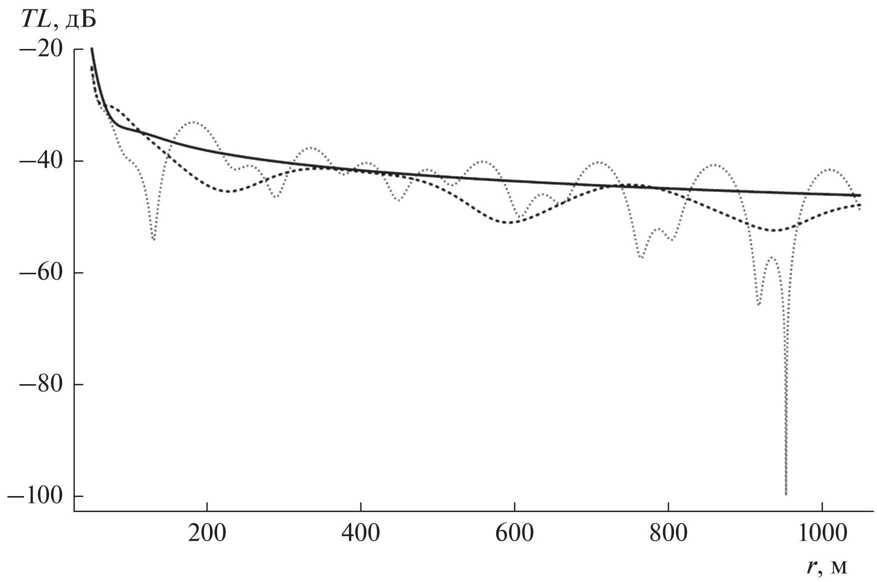

Рис. 3. Изменение TL (r, z_0, φ_0) на расстоянии r для волновода с цилиндрическим телом в донном слое в зависимости от частоты f (—— – 16 Гц; - - - – 32 Гц; ····· – 48 Гц).

На рис. 3 представлено изменение TL (r, z_0, φ_0) на расстоянии r от 50 м до 1000 м для волновода с теми же параметрами в зависимости от частоты f. Из данных рис. 3 следует, что с увеличением частоты поведение давления определяется распространяющимися модами в волноводе; если при частоте f = 16 Гц величина TL (r, z_0, φ_0) с расстоянием убывает почти монотонно, то для более высоких частот наблюдается осцилляция с локальными максимумами и минимумами.

Рис. 4 демонстрирует, как положение конечного тела в донном слое влияет на изменение

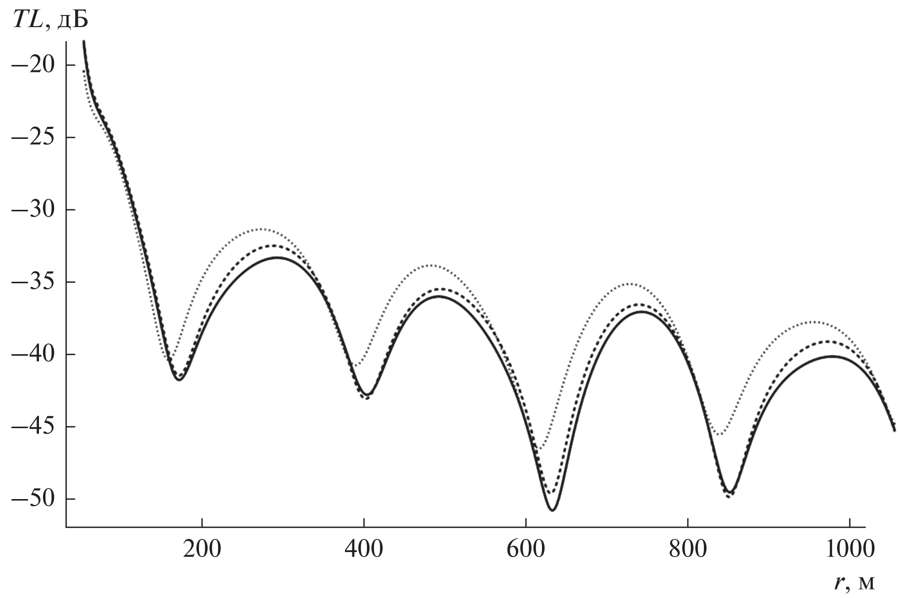

Рис. 4. Изменение TL (r, z_0, φ_0) на расстоянии r для волновода с цилиндрическим телом радиуса R = 30 м и высотой $h_2 - h_1$ = 30 м в донном слое (—— h_1 = 60 м; - - - – 55 м, ····· – 50.5 м).

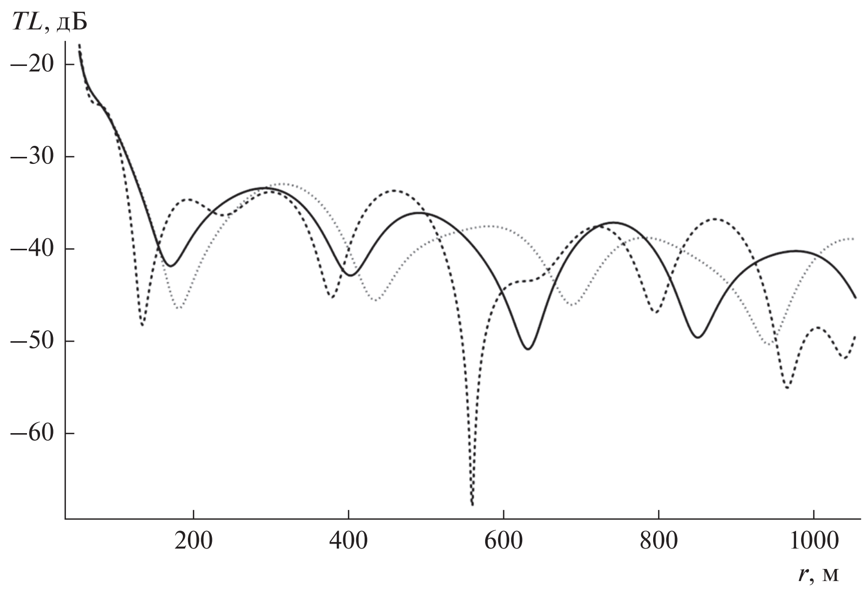

Рис. 5. Изменение TL (r, z_0, φ_0) на расстоянии r для волновода с цилиндрическим телом радиуса R = 30 м, h_1 = 55 м, h_2 = 85 м в донном слое при разных значениях акустических параметров донного слоя (—— c_1 = 1450 м/с, ρ_1 = 1.0 кг/м^3; - - - – c_1 = 1600 м/с, ρ_1 = 1.8 кг/м^3, ····· – c_1 = 1550 м/с, ρ_1 = 2.0 кг/м^3).

TL (r, z_0, φ_0) на расстоянии r от 50 до 1000 м при частоте f = 32 Гц. Здесь волновод имеет параметры c_0 = 1450 м/с, c_1 = 1600 м/с, ρ_0 = 1.0 кг/м^3, ρ_1 = = 1.8 кг/м^3, h_0 = 50 м, h = 100 м, гармонический точечный источник звука находится в точке r_0 = = 50 м, z_0 = 15 м, φ_0 = 0. В крайних положениях неоднородное тело находится практически на жестком основании и на поверхности донного слоя. Можно увидеть, что лишь в случае, когда цилиндрическое тело почти соприкасается с водным слоем, происходит изменение в поведении звукового давления, в противном случае она мало заметна на больших расстояниях.

На рис. 5 представлено, как акустические параметры донного слоя c_1 и ρ_1 волновода глубины $h = 100$ м с водным слоем $h_0 = 50$ м и скоростью звука $c_0 = 1450$ м/с влияют на $TL(r, z_0, \varphi_0)$ с увеличением расстояния r при частоте $f = 32$ Гц. В качестве расчетных параметров брались следующие: 1) $c_1 = 1450$ м/с, $\rho_1 = 1.0$ кг/м^3; 2) $c_1 = 1600$ м/с, $\rho_1 = 1.8$ кг/м^3; 3) $c_1 = 1550$ м/с, $\rho_1 = 2.0$ кг/м^3. Таким образом, в расчетном случае 1) донный слой осадков отсутствует, здесь неоднородное тело плавает внутри водного слоя, в двух других случаях брались параметры, характерные для донного слоя природных волноводов. Можно заметить, что в отличие от рис. 4 характеристики донного слоя имеют значительное влияние на величину звукового давления.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлен аналитико-численный подход к построению решения для слоистого волновода с локальной неоднородностью в виде акустически жесткого цилиндра, расположенного в донном слое. Использование свойства ортогональности вертикальных собственных функций волновода позволяет свести задачу к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно неопределенных коэффициентов при модах. Исследуются асимптотические свойства величин, входящих в представленное решение. Данный подход легко обобщается на случай, когда неоднородность в волноводе моделируется некоторым жидким объемом (для этого достаточно состыковать две цилиндрические области в волноводе с различными параметрами), при этом, в отличие от метода многоуровневой выборки, численно-аналитическое решение задачи не требует значительных вычислительных ресурсов.

Характеристики дна, как и ожидалось, существенно влияют на волноводное распространение звука, наличие неоднородности меняет звуковое поле в некоторой окрестности тела, на дальних расстояниях наличие неоднородного тела может незначительно сказываться на картине звукового поля. В частности, это может наблюдаться, если тело расположено в непосредственной близости к поверхности водного слоя.

Представленный подход может быть полезен как первое аналитическое приближение в исследовании волноводов с неоднородностью конечных размеров в донном слое, а также при тестировании программ, реализующих численные методы.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и города Севастополь в рамках научного проекта № 18-42-920001.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

АНАЛИЗ ДИСПЕРСИОННОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ДВУХСЛОЙНОГО ВОЛНОВОДА

Рассмотрим поведение корней дисперсионных уравнений (18)–(21) при $n \to \infty$. С учетом того факта, что при возрастании порядкового номера n, если затухание в слое осадков отсутствует, собственные значения становятся чисто мнимыми $\xi_{j,n} = iw$ $(j = 0, 2)$, оба данных уравнения могут быть записаны в форме

$$\operatorname{tg}\sqrt{k_0^2 + w^2}h_0 \operatorname{tg}\sqrt{k_1^2 + w^2}H = \frac{\rho_1}{\rho_0}\sqrt{\frac{k_0^2 + w^2}{k_1^2 + w^2}}, \qquad (A1)$$

где h_0 – толщина водного слоя, H – толщина донного слоя.

В силу того, что собственные значения возрастают с порядковым номером, т.е. $w^2 \to +\infty$, получаем асимптотическое приближение для уравнения (А1)

$$\operatorname{tg} w_n h_0 \operatorname{tg} w_n H = \frac{\rho_1}{\rho_0}. \qquad (A2)$$

Далее, предположим, что глубины водного и донного слоев могут быть представлены через некоторый характерный размер a следующим образом

$$h_0 = Ma, \quad H = La, \quad M, L \in \mathbf{N},$$

тогда уравнение (А2) может быть решено точно. Действительно, в этом случае уравнение (А2) можно записать как

$$\operatorname{tg} Mt \operatorname{tg} Lt = \frac{\rho_1}{\rho_0}, \qquad (A3)$$

где $t = aw$. Однако, в силу формул тригонометрии

$$\operatorname{tg} Mt = \frac{\sum_{k=0}^{\left[\frac{M-1}{2}\right]} (-1)^k C_M^{2k+1} \operatorname{tg}^{2k+1} t}{\sum_{k=0}^{\left[\frac{M}{2}\right]} (-1)^k C_M^{2k} \operatorname{tg}^{2k} t}, \qquad (A4)$$

($[x]$ означает целую часть действительного x) уравнение (А3) приводится подстановкой $\operatorname{tg} t = Z$ к рациональному уравнению вида

$$\rho_0 \sum_{k=0}^{\left[\frac{M-1}{2}\right]} (-1)^k C_M^{2k+1} Z^{2k+1} \sum_{k=0}^{\left[\frac{L-1}{2}\right]} (-1)^k C_L^{2k+1} Z^{2k+1} = \\ = \rho_1 \sum_{k=0}^{\left[\frac{M}{2}\right]} (-1)^k C_M^{2k} Z^{2k} \sum_{k=0}^{\left[\frac{L}{2}\right]} (-1)^k C_L^{2k} Z^{2k}. \quad (A5)$$

Уравнение (A5) является алгебраическим уравнением порядка $(M + L)$, если четность чисел M и L совпадает, и в противном случае порядка $(M + L - 1)$. Обозначим порядок данного уравнения как p. Как известно, данное уравнение не может иметь более p действительных корней, тогда если $\{Z_l\}$ ($l = 1, 2, \ldots, q$; $q \le p$) — действительные корни (A5), то получаем, что имеется следующий набор корней (A2):

$$w_{l,n} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg} Z_l + \frac{\pi n}{a}$$

или с учетом того, что $a = \dfrac{M}{h_0} = \dfrac{L}{H}$, получаем асимптотику для собственных чисел

$$\xi_{j,n} = \frac{i\pi M}{h_0 q} n + O(1), \quad n \to \infty. \quad (A6)$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бреховских Л.М.* Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 343 с.
2. *Кацнельсон Б.Г., Петников В.Г.* Акустика мелкого моря. М.: Наука, 1997. 191 с.
3. *Григорьев В.А., Петников В.Г., Шатравин А.В.* Звуковое поле в мелководном волноводе арктического типа с дном, содержащим газонасыщенный осадочный слой // Акуст. журн. 2017. Т. 63. № 4. С. 389–405.
4. *Liu K., Xu Y., Zou J.* A multilevel sampling method for detecting sources in a stratified ocean waveguide // J. Comput. and Appl. Math. 2017. V. 309. P. 95–110.
5. *Liu K., Xu Y., Zou J.* A parallel radial bisection algorithm for inverse scattering problem // Inverse Prob. Sci. Eng. 2013. V. 21. P. 197–209.
6. *Папкова Ю.И.* Звуковое поле в гидроакустическом волноводе с неровным жестким дном // Акуст. журн. 2017. Т. 63. № 1. С. 50–58.
7. *Толстой И., Клей К.С.* Акустика океана. М.: Мир, 1969. 301 с.
8. *Luo W., Schmidt H.* Three-dimensional propagation and scattering around a conical seamount // J. Acoust. Soc. Am. 2009. № 1. P. 52–65.
9. *Шендеров Е.Л.* Излучение и рассеяние звука. Л. Судостроение, 1989. 304 с.
10. *Прудников А.П.* Интегралы и ряды. Элементарные функции / Под ред. Прудникова А.П., Брычкова Ю.А., Маричева О.И. М.: Наука. Глав. ред. физ.-мат. лит-ры, 1981, 800 с.
11. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. Пер. с анг. / Под ред. Абрамовица М., Стиган И. М.: Наука, 1979. 831 с.
12. *Гринченко В.Т., Вовк И.В.* Волновые задачи рассеяния звука на упругих оболочках. К.: Наук. думка, 1986. 240 с.