

ОБ УЧЕТЕ МИКРОВАРАЩЕНИЙ ЧАСТИЦ УПРУГОЙ СРЕДЫ ПО УПРОЩЕННОЙ ТЕОРИИ КОССЕРА ПРИ РАСПРОСТРАНЕНИИ ЭЛЕКТРОУПРУГИХ ВОЛН В ПЬЕЗОЭЛЕКТРИКЕ КЛАССА *6mm*

© 2019 г. А. С. Аветисян^а, *, М. В. Белубекян^а, **

^аИнститут Механики НАН Армении, пр. Баграмяна, 24/2, Ереван, 0019 Армения

*e-mail: ara.serg.avetisyan@gmail.com

**e-mail: mbelubekyan@yahoo.com

Поступила в редакцию 17.05.2018 г.

После доработки 05.12.2018 г.

Принята к публикации 07.05.2019 г.

Выявлено влияние микрополярности материала на распространение одномерной электроупругой волны по разным срезам пьезокристалла класса *6mm*. Показано, что микрополярность приводит к дисперсии одномерной электроупругой волны и запрещает распространение высокочастотных волн упругого сдвига. В случае нормально падающей электромагнитной волны на поверхность пьезоэлектрического полупространства по направлению оси поляризации пьезокристалла, в полупространстве возникают три ветви локализованных у поверхности электроупругих волн. Из уравнения дисперсии найден частотный интервал существования этих волн. Численно исследовано поведение волновых характеристик и частотных зон в зависимости от микрополярности пьезоэлектрика.

Ключевые слова: микрополярная среда, континуум Коссера, электроакустическая волна, пьезоэлектрик, прозрачный материал, допустимая частота, поверхностная волна

DOI: 10.1134/S0320791919050058

ВВЕДЕНИЕ

В рамках классической теории упругости особенности распространения волновой энергии в средах с различными физическими свойствами подробно изложены в монографиях [1–3]. Однако, между результатами классической теории упругости и экспериментов во всех случаях появляется расхождение, когда изменения в микроструктуре тела существенны. Такие расхождения появляются также в случаях сыпучих сред и мультимолекулярных структур, в которых существенна микрополярность материала. Влияние микроструктуры особенно очевидно в случае упругих колебаний высокой частоты и малой длины волны.

Полная теория асимметричной упругости была разработана лишь в 1909 г. братьями Francois и Eugene Cosserat [4]. На данный момент имеется обширная литература по исследованию проблем механики на основе микрополярной теории упругости (на основе среды Коссера). Кроме обобщающих работ [5–7], в ряде публикаций последних лет дается обоснование эффективности использования таких моделей обобщенных (неклассических) континуумов (модель среды Коссера специального вида) для описания физико-

механических свойств наноматериалов и метаматериалов.

В публикации [8] рассматриваются результаты самых последних научных статей: новые модели, применение известных моделей для новых задач, микро и макро-аспекты, возможности определения конститутивных уравнений, или старые проблемы с неудовлетворительными решениями, основанными на классических предположениях о континууме. В публикациях [9, 10] внимание обращено на статьи, описывающие микро- и макropоведение, новые теоремы существования и единственности, формулировки многомасштабных проблем. Основное внимание уделено вопросам моделирования среды со значительной микроструктурой и свойствам обобщенного континуума в результате многомасштабных моделей. Книга [11] представляет собой сборник материалов по микрополярным, микроморфным и градиентным средам. Основное внимание уделяется распространению волн, проблемам стабильности, гомогенизации и отношениям между дискретными и непрерывными моделями. В сборнике [12] рассмотрены нестандартные методы описания материалов (обобщенная модель). Темы варьируются от микромеханических основ до инженерных при-

ложений, фокусируясь на новых моделях и применениях известных моделей для новых задач.

В статье [13] утверждается, что пьезоэлектрические материалы обладают такой кристаллической структурой, которая требует учета степени свободы вращения частиц. В согласии с этим, в настоящей статье предлагается, в отличие от [13], учесть микровращение на основе более простой модели, позволяющей получить аналитические результаты. При этом ограничиваемся рассмотрением некоторых модельных задач о распространении волн в наиболее исследованных на практике пьезоэлектриках класса *bmm* гексагональной симметрии.

1. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИКА КЛАССА *bmm* С УЧЕТОМ УПРОЩЕННОЙ МОДЕЛИ СРЕДЫ КОССЕРА

В прямоугольной декартовой системе координат $\{x_i\}$ для упрощенной модели Коссера применяются известные линейные уравнения движения классической теории упругости [14, 15]

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad i, j \in \{1; 2; 3\}. \quad (1)$$

В предположении, что пьезоэлектрический материал принадлежит к классу *bmm* и поляризован по направлению координатной оси $0x_3$, материальные уравнения электромеханических осевых напряжений запишутся в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= c_{11}\epsilon_{11} + c_{12}\epsilon_{22} + c_{13}\epsilon_{33} - e_{13}E_3, \\ \sigma_{22} &= c_{12}\epsilon_{11} + c_{11}\epsilon_{22} + c_{13}\epsilon_{33} - e_{13}E_3, \\ \sigma_{33} &= c_{13}\epsilon_{11} + c_{12}\epsilon_{22} + c_{33}\epsilon_{33} - e_{33}E_3. \end{aligned} \quad (2)$$

С учетом микрополяриности материала касательные напряжения уже не являются симметричными и определяются следующим обобщением материальных уравнений:

$$\begin{aligned} \sigma_{12} &= (c_{11} - c_{12})\epsilon_{12} + J \frac{\partial^2 \omega_{12}}{\partial t^2}, \\ \sigma_{21} &= (c_{11} - c_{12})\epsilon_{12} + J \frac{\partial^2 \omega_{21}}{\partial t^2}, \\ \sigma_{13} &= 2c_{44}\epsilon_{13} - e_{15}E_1 + J \frac{\partial^2 \omega_{13}}{\partial t^2}, \\ \sigma_{31} &= 2c_{44}\epsilon_{31} - e_{15}E_1 + J \frac{\partial^2 \omega_{31}}{\partial t^2}, \\ \sigma_{23} &= 2c_{44}\epsilon_{23} - e_{15}E_2 + J \frac{\partial^2 \omega_{23}}{\partial t^2}, \\ \sigma_{32} &= 2c_{44}\epsilon_{32} - e_{15}E_2 + J \frac{\partial^2 \omega_{32}}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (3)$$

В (3) к известным функциональным связям электроупругости [14] добавлены слагаемые, обусловленные инерцией вращений частиц по упрощенной модели Коссера [16, 17]. Здесь J – коэффициент, характеризующий инерцию поворота частиц, а связь линейных деформаций и поворотов через компоненты вектора упругого перемещения следующая:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad \omega_{ij} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j}. \quad (4)$$

Наряду с линейными уравнениями движения классической теории упругости, решаются также уравнения электродинамики

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \mathbf{D} &= 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Приведенные уравнения для пьезоэлектрика класса *bmm* связаны посредством материальных соотношений электромагнитного поля

$$\begin{aligned} D_1 &= 2e_{15}\epsilon_{13} + \epsilon_1 E_1, \quad D_2 = 2e_{15}\epsilon_{23} + \epsilon_1 E_2, \\ D_3 &= e_{13}(\epsilon_{11} + \epsilon_{22}) + e_{33}\epsilon_{33} + \epsilon_3 E_3, \\ B_1 &= \mu_1 H_1; \quad B_2 = \mu_1 H_2; \quad B_3 = \mu_3 H_3. \end{aligned} \quad (6)$$

В приведенных соотношениях (1)–(6) фигурируют физико-механические постоянные: ρ – плотность среды, c_{ij} – модули упругости, e_{mn} – пьезоэлектрические модули, коэффициенты ϵ_k – диэлектрической и μ_m – магнитной проницаемостей материала. В дальнейшем для индексов будем пользоваться также подобием $i; j; k; m; n \in \{1; 2; 3\} \Leftrightarrow \{x; y; z\}$.

2. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ОДНОМЕРНЫХ ЭЛЕКТРОУПРУГИХ ВОЛН В МИКРОПОЛЯРНОМ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИКЕ КЛАССА *bmm* С УПРОЩЕННОЙ СТРУКТУРОЙ СРЕДЫ КОССЕРА

Поскольку пьезоэлектрики – анизотропные упругие среды, исследование распространения одномерных волн для приведенной выше среды приводит к различным случаям в зависимости от выбора направления распространения и типа (продольная или поперечная) волны.

Наиболее простой случай, когда требуется учет влияния обоих эффектов, – это поперечная волна (волна с единственной компонентой перемещения).

2.1. Одномерная волна сдвига с вектором перемещения, параллельным оси поляризации пьезокристалла $\{0, 0, w(x, t)\}$, распространяется в плоскости изотропии пьезокристалла по произвольной оси Ox

Пусть характеристики волнового поля не зависят от остальных координат ($\partial/\partial y \equiv 0$; $\partial/\partial z \equiv 0$). При указанных ограничениях из системы уравнений (1) и (5) с использованием материальных уравнений (2), (3), (4) и (6) получается:

$$c_{44} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - e_{15} \frac{\partial E_x}{\partial x} + J \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(e_{15} \frac{\partial w}{\partial x} + \epsilon_1 E_x \right) = 0.$$

Из (7) следует, что при возбуждении упругих перемещений $w(x, t)$ появляется сопутствующее электрическое поле. В случае гармоничных колебаний из системы (7) можно вывести уравнение для упругой сдвиговой волны

$$c_{44} (1 + \chi^2) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + J \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (8)$$

где $\chi^2 = e_{15}^2 / \epsilon_1 c_{44}$ – коэффициент электромеханической связи материала.

Если решение (8) представить в виде нормальной волны $w(x, t) = S \exp i(\omega t - kx)$, то для фазовой скорости получится

$$V_\phi(k) = \omega/k = \sqrt{(1 + \chi^2) c_t^2 / (1 + \beta k^2)}, \quad (9)$$

где $c_t^2 = c_{44} / \rho$ – скорость упругой сдвиговой волны, $\beta = J / \rho$ – параметр микрополярности.

Следовательно, учет пьезоэлектрического эффекта материала приводит к увеличению фазовой скорости, а учет микроращения частиц приводит к дисперсии сдвиговой волны и уменьшению ее скорости.

Из выражения (9) легко получить частотную характеристику этой волны

$$\lambda(\omega) = (2\pi/\omega) \sqrt{\tilde{c}_t^2 - \beta \omega^2}, \quad (10)$$

здесь $\tilde{c}_t^2 = (1 + \chi^2) c_t^2$.

На рис. 1 приведены графики изменения длины волны упругого сдвига при учете и при неучете микрополярности и/или пьезоэлектрического эффекта материала. Приведенные кривые соответствуют следующим случаям: линия $\lambda_1(\omega)$ – не учитывается микрополярность среды, а коэффициент электромеханической связи $\chi^2 = 0.41$; линия $\lambda_2(\omega)$ – не учитываются и микрополярность, и пьезоэлектрический эффект среды; линия $\lambda_3(\omega)$ – учитываются и микрополярность, и пьезоэлектрический эффект среды, причем коэффициент электромеханической связи $\chi^2 = 0.41$, а па-

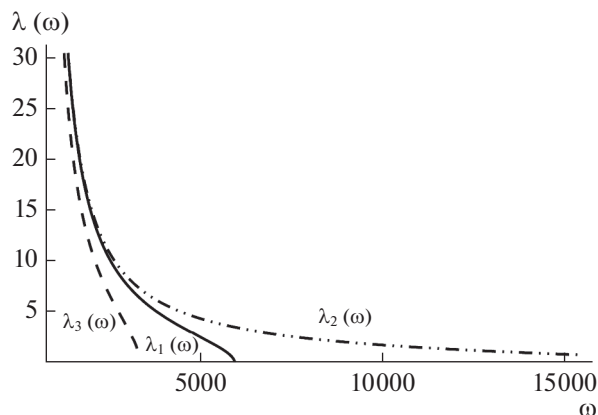


Рис. 1. Изменение длины одномерной волны упругого сдвига $\{0, 0, w(x, t)\}$ в пьезоэлектрике окиси цинка ZnO : $c_t = 2.735 \times 10^3$ м/с, $\chi^2 = 0.41$, при разных значениях микрополярности материала: $\beta_1 = 0.35$, $\beta_2 = 0.025$, $\beta_3 = 1.0$.

раметр микрополярности $\beta = 1.0$. Отсюда находим зону допустимых частот для волновых сигналов упругого сдвига

$$0 < \omega < \sqrt{\tilde{c}_t^2 / \beta}. \quad (11)$$

Результат, аналогичный (10)-(11), получается, если волна распространяется по направлению координаты Oy и $\partial/\partial x = 0$, $\partial/\partial z = 0$, поскольку пьезоэлектрик класса *btt* трансверсально изотропная среда с плоскостью изотропии Oxz .

2.2. Одномерная волна сдвига с вектором перемещения, лежащим в плоскости изотропии пьезокристалла $\{u(z, t), 0, 0\}$, распространяется по направлению оси поляризации пьезокристалла Oz

Наиболее общий случай получается, если поперечная волна распространяется по координатной оси Oz :

$$c_{44} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - e_{15} \frac{\partial E_x}{\partial z} + J \frac{\partial^2 u}{\partial z^2 \partial t^2} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial z} = -\epsilon_1 \frac{\partial E_x}{\partial t} - e_{15} \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial t}, \quad (12)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu_1 \frac{\partial H_y}{\partial t}.$$

Отыскиваем решение системы (12) в виде плоских гармоничных волн

$$u(z, t) = F \exp i(\omega t - pz),$$

$$E_x(z, t) = C \exp i(\omega t - pz), \quad (13)$$

$$H_y(z, t) = D \exp i(\omega t - pz).$$

Подставляя решения (13) в уравнения (12) и приравнивая нулю детерминант полученной си-

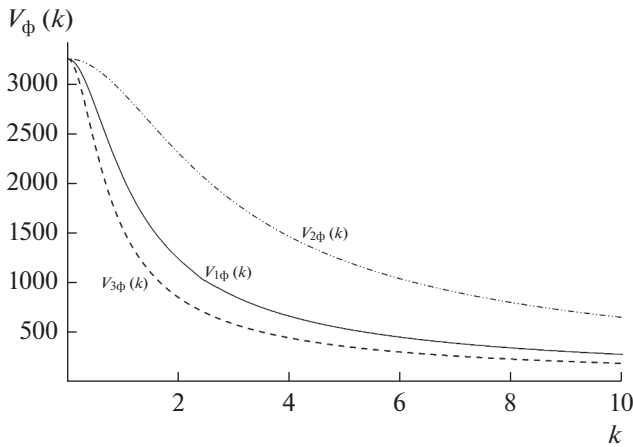


Рис. 2. Изменение фазовой скорости одномерной волны упругого сдвига $\{u(z, t), 0, 0\}$ в пьезоэлектрике окиси цинка ZnO: $c_t = 2.735 \times 10^3$ м/с, $\chi^2 = 0.41$, при разных значениях микрополярности материала: $\beta_1 = 1.5$, $\beta_2 = 0.25$, $\beta_3 = 3.5$.

стемы линейных алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных C , D , F , получаем характеристическое уравнение

$$\begin{aligned} (\omega^2 - p^2 c_1^2) [\omega^2 + \beta p^2 \omega^2 - c_t^2 p^2] - \\ - \chi^2 \omega^2 p^2 c_1^2 = 0, \end{aligned} \quad (14)$$

где $c_1 = c_{10} / \sqrt{\epsilon_1 \mu_1}$ — скорость электромагнитных волн в пьезоэлектрической среде, $c_{10} \approx 3 \times 10^8$ м/с — скорость света в вакууме, диэлектрическая проницаемость вакуума $\epsilon_{10} \approx 8.8542 \times 10^{-12}$ Ф/м, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ Гн/м — магнитная постоянная (магнитная проницаемость вакуума), μ_1 — относительная и $\mu_a = \mu_1 \mu_0$ — абсолютная магнитная проницаемости среды.

В квазистатическом приближении ($\omega^2 / (p^2 c_1^2) \rightarrow 0$) взаимодействие упругого сдвига с сопутствующими электромагнитными колебаниями будет характеризоваться уравнением

$$\omega^2 / p^2 - (c_t^2 - \omega^2 / \beta) = 0, \quad (15)$$

откуда находим фазовую скорость $V(\omega) = \omega / p = c_t \sqrt{1 - \omega^2 / \beta c_t^2}$. Очевидно, что в квазистатическом приближении пьезоэлектрический эффект на распространение одномерной сдвиговой волны не влияет. Однако, микрополярность материала приводит к возникновению дисперсии.

В общем случае, из уравнения (14) получим две пары корней для фазовой скорости $\pm V_\phi(\omega)$

$$\begin{aligned} V_\phi^2(\omega) = (\omega / p_{1\pm})^2 = \frac{c_1^2 + (\tilde{c}_t^2 - \beta \omega^2)}{2} + \\ + \sqrt{\left(\frac{c_1^2 - (\tilde{c}_t^2 + \beta \omega^2)}{2} \right)^2 + \frac{\chi^2 (c_t^2 / c_1^2)}{4}}, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} V_\phi^2(\omega) = (\omega / p_{2\pm})^2 = \frac{c_1^2 + (\tilde{c}_t^2 - \beta \omega^2)}{2} - \\ - \sqrt{\left(\frac{c_1^2 - (\tilde{c}_t^2 + \beta \omega^2)}{2} \right)^2 + \frac{\chi^2 (c_t^2 / c_1^2)}{4}}. \end{aligned} \quad (17)$$

Из полученных решений следует, что при неучете микрополярности материала, когда $\beta \equiv 0$, распространяются взаимосвязанные ветви упругого сдвига и электромагнитной волны с фазовыми скоростями. В квазистатическом приближении, когда $\tilde{c}_t^2 / c_1^2 \ll 1$ и $\beta \omega^2 / c_1^2 \ll 1$, эти ветви волн отдельно распространяются со скоростями $V_{1\phi}(\omega) = \omega / p_1 = c_1$ и $V_{2\phi}(\omega) = \omega / p_2 = \tilde{c}_t$ соответственно. В отличие от предыдущей задачи, здесь зоны запрета частот не существуют. Изменение фазовой скорости одномерной волны упругого сдвига $\{u(z, t), 0, 0\}$ при разных значениях микрополярности материала показано на рис. 2.

Уравнения (12) также показывают, что падающая на тело из пьезоэлектрического микрополярного материала электромагнитная волна может привести к появлению упругой сдвиговой волны.

3. БЕСКОНТАКТНОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ ВОЛНЫ УПРУГОГО СДВИГА

Пусть на полупространство из пьезоэлектрического микрополярного материала класса *btt* падает нормальная электромагнитная волна $\{E_x^0(z, t), 0, 0\} \cup \{0, H_y^0(z, t), 0\}$ в направлении координатной оси $0z$. Согласно уравнениям электродинамики в вакууме, падающая нормальная электромагнитная волна определяется из

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_x^{(0)}}{\partial z} = -\mu_0 \frac{\partial H_y^{(0)}}{\partial t}, \quad \frac{\partial H_y^{(0)}}{\partial z} = -\epsilon_0 \frac{\partial E_x^{(0)}}{\partial t}, \\ -\infty < z < 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Уравнения волн, распространяющихся в среде $0 < z < \infty$, даются уравнением (12) при условиях на границе раздела:

$$\begin{aligned} E_x^{(0)}(0, t) = E_x(0, t), \quad H_y^{(0)}(0, t) = H_y(0, t), \\ \sigma_{zx}(0, t) = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

или вместо условия механически свободной поверхности $\sigma_{zx}(0, t) = 0$ условие жесткой заделки поверхности $u(0, t) = 0$.

Согласно (18) падающая волна задается следующим образом:

$$\begin{aligned} E_x^{(0)}(z, t) &= A \exp i(\omega t - p_0 z), \\ H_y^{(0)}(z, t) &= \sqrt{\epsilon_0/\mu_0} A \exp i(\omega t - p_0 z), \end{aligned} \quad (20)$$

где $p_0 = \sqrt{\epsilon_0\mu_0} \omega$ – волновое число падающей волны. Соответствующие выражения для отраженной электромагнитной волны будут

$$\begin{aligned} E_{x0}^{(0)}(z, t) &= B \exp i(\omega t + p_0 z), \\ H_{y0}^{(0)} &= -\sqrt{\epsilon_0/\mu_0} B \exp i(\omega t + p_0 z), \end{aligned} \quad (21)$$

где амплитуда B подлежит определению.

Согласно решению системы (12) вида (13) и значениям корней характеристического уравнения (14) выражения для преломленных волн получаются в виде

$$\begin{aligned} H_y(z, t) &= (1/\mu_1\omega) [p_1 C_1 \exp i(\omega t - p_1 z) + \\ &+ p_2 C_2 \exp i(\omega t - p_2 z)], \\ E_x(z, t) &= C_1 \exp i(\omega t - p_1 z) + \\ &+ C_2 \exp i(\omega t - p_2 z), \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} u(z, t) &= \left[\frac{\omega^2 - p_1^2 c_1^2}{p_1 \omega^2} C_1 \exp i(\omega t - p_1 z) + \right. \\ &\left. + \frac{\omega^2 - p_2^2 c_1^2}{p_2 \omega^2} C_2 \exp i(\omega t - p_2 z) \right]. \end{aligned} \quad (23)$$

Подстановка (20) и (23) в граничные условия (19), с учетом структуры электромагнитного поля

$$\begin{aligned} E_x^{(0)}(0, t) &= E_x^{(0)}(0, t) + E_{x0}^{(0)}(0, t), \\ H_y^{(0)}(0, t) &= H_y^{(0)}(0, t) + H_{y0}^{(0)}(0, t), \end{aligned} \quad (24)$$

приводит к системе уравнений относительно искомых постоянных B, C_1, C_2 :

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 - B &= A, \quad (1/\mu_1\omega)(\epsilon_0/\mu_0)^{-1/2} \times \\ \times p_1 C_1 + (1/\mu_1\omega)(\epsilon_0/\mu_0)^{-1/2} p_2 C_2 + B &= A, \\ \frac{\tilde{c}_1^2 - \beta\omega^2}{c_1^2} \frac{\omega^2 - p_1^2 c_1^2}{\omega^2} C_1 + \frac{\tilde{c}_1^2 - \beta\omega^2}{c_1^2} \times \\ \times \frac{\omega^2 - p_2^2 c_1^2}{\omega^2} C_2 &= 0. \end{aligned} \quad (25)$$

В случае, когда граница полупространства закреплена $u(0, t) = 0$, последнее уравнение из (25) замещается уравнением

$$p_2(\omega^2 - p_1^2 c_1^2) C_1 + p_1(\omega^2 - p_2^2 c_1^2) C_2 = 0. \quad (26)$$

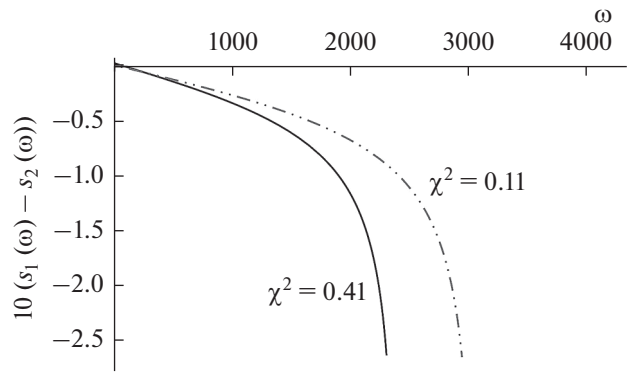


Рис. 3. Поведение коэффициента прозрачности $s_1(\omega) - s_2(\omega)$ для разных пьезоматериалов с коэффициентами электромеханической связи $\chi_1^2 = 0.11$ и $\chi_2^2 = 0.41$.

Здесь, для примера, коэффициенты отраженной B и преломленных C_1, C_2 волн приведены для варианта закрепленного края

$$\begin{aligned} B = \frac{s_1 - s_2}{s_1 + s_2} A, \quad C_1 &= \frac{2p_1(1 - p_2^2 c_1^2/\omega^2)}{(p_1 - p_2)(s_1 + s_2)} A, \\ C_2 &= -\frac{2p_2(1 - p_1^2 c_1^2/\omega^2)}{(p_1 - p_2)(s_1 + s_2)} A, \end{aligned} \quad (27)$$

где

$$\begin{aligned} s_1(\omega) &= 1 + p_1 p_2 c_1^2/\omega^2, \\ s_2(\omega) &= \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} [(p_1 + p_2)/\mu_1\omega]. \end{aligned} \quad (28)$$

С учетом фазовых значений $s_1(\omega)$ и $s_2(\omega)$ из (28) условие, при котором электромагнитная волна не отражается, $B \equiv 0$ приводится к виду

$$1 + p_1 p_2 c_1^2/\omega^2 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} [(p_1 + p_2)/\mu_1\omega]. \quad (29)$$

Аналогичное уравнение прозрачности среды также получается в случае механически свободной поверхности раздела $\sigma_{zx}(0, t) = 0$:

$$\begin{aligned} \left[(p_1 + p_2)(c_1^2/\omega^2) - (1/\mu_1\omega)(\epsilon_0/\mu_0)^{-1/2} \times \right. \\ \left. \times (p_1 p_2 (c_1^2/\omega^2) + 1) \right] (p_1 - p_2) = 0. \end{aligned} \quad (30)$$

Значения волновых параметров $p_1(\beta; \chi^2; \omega)$ и $p_2(\beta; \chi^2; \omega)$ определяются по (16) и (17) соответственно.

При падении на полупространство из пьезоэлектрического микрополярного материала класса *btt* нормальной электромагнитной волны, частотные зоны прозрачности материала определяются коэффициентом $[s_1(\omega) - s_2(\omega)]/[s_1(\omega) + s_2(\omega)]$. Закономерность изменений этого коэффициента приведена на рис. 3. Приведенные на

рисунке графики показывают, что частотные зоны прозрачности пьезоэлектрического материала, с учетом также его микрополяриности для обоих случаев поверхностных условий $\sigma_{zx}(0, t) = 0$ и $u(0, t) = 0$, отсутствуют.

4. УРАВНЕНИЯ ДВУМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИКА С УЧЕТОМ МИКРОПОЛЯРНОСТИ СРЕДЫ

Из приведенных основных трехмерных соотношений для пьезоэлектрика класса *bmm* с учетом упрощенной модели среды Коссера, при предположении независимости искомых величин волнового поля от координаты z ($\partial/\partial z = 0$), как и для классических задач теории упругости изотропного тела [18], получаем разделенные уравнения плоской и антиплоской деформаций.

Уравнение задачи плоской деформации:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial y} &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial E_3}{\partial y} &= -\frac{\partial B_1}{\partial t}, \quad \frac{\partial E_3}{\partial x} = \frac{\partial B_2}{\partial t}, \quad \frac{\partial H_2}{\partial x} - \frac{\partial H_1}{\partial y} = \frac{\partial D_3}{\partial t}. \end{aligned} \quad (31)$$

Функциональные связи:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= c_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + c_{12} \frac{\partial v}{\partial y} - e_{13} E_3, \\ \sigma_{12} &= \frac{c_{11} - c_{12}}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + J \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right), \\ \sigma_{21} &= \frac{c_{11} - c_{12}}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - J \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right), \\ \sigma_{22} &= c_{12} \frac{\partial u}{\partial x} + c_{11} \frac{\partial v}{\partial y} - e_{13} E_3, \\ \sigma_{33} &= c_{13} \frac{\partial u}{\partial x} + c_{12} \frac{\partial v}{\partial y} - e_{33} E_3, \\ B_1 &= \mu_1 H_1, \quad B_2 = \mu_1 H_2, \\ D_3 &= e_{13} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \varepsilon_3 E_3. \end{aligned} \quad (32)$$

С учетом (32) первые два уравнения системы (41) приводятся к уравнениям относительно перемещений $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$ и компоненты электрического поля $E_3(x, y, t)$

$$\begin{aligned} \frac{c_{11} - c_{12}}{2} \Delta u + \frac{c_{11} + c_{12}}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= \\ = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + e_{13} \frac{\partial E_3}{\partial x} - J \frac{\partial^3}{\partial y \partial t^2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right), \\ \frac{c_{11} - c_{12}}{2} \Delta v + \frac{c_{11} + c_{12}}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= \\ = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + e_{13} \frac{\partial E_3}{\partial y} - J \frac{\partial^3}{\partial x \partial t^2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (33)$$

Из остальных уравнений системы (31) можно исключить компоненты магнитного поля H_1 и H_2 , что дает

$$\Delta E_3 = \mu_1 \varepsilon_3 \frac{\partial^2 E_3}{\partial t^2} + \mu_1 e_{13} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right). \quad (34)$$

Таким образом, уравнения задачи плоской деформации свелись к системе трех уравнений относительно трех искомых функций $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$, $E_3(x, y, t)$. При помощи преобразований Ламе [18]

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (35)$$

система из уравнений (33)–(34) приводится к следующему виду:

$$\begin{aligned} \Delta \Phi &= (\rho/c_{11}) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + (e_{13}/c_{11}) E_3, \\ \Delta \Psi &= (\rho/c_{66}) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} - (J/c_{66}) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta \Psi, \\ \Delta E_3 &= \mu_1 \varepsilon_3 \frac{\partial^2 E_3}{\partial t^2} + \mu_1 e_{13} \Delta \Phi. \end{aligned} \quad (36)$$

Из разделенных уравнений (36) следует, что учет пьезоэлектрического эффекта материала приводит к влиянию поперечного электрического поля $E_3(x, y, t)$ на обе компоненты перемещения $u(x, y, t)$ и $v(x, y, t)$ посредством потенциальной функции $\Phi(x, y, t)$ Ламе. Учет же микровращения в материале приводит к изменению обеих компонент перемещения $u(x, y, t)$ и $v(x, y, t)$ посредством функции вращения $\Psi(x, y, t)$ Ламе.

Уравнения задачи антиплоской деформации:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial y} &= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial E_2}{\partial x} - \frac{\partial E_1}{\partial y} = -\frac{\partial B_3}{\partial t}, \\ \frac{\partial H_3}{\partial y} &= \frac{\partial D_1}{\partial t}, \quad \frac{\partial H_3}{\partial x} = -\frac{\partial D_2}{\partial t}. \end{aligned} \quad (37)$$

Функциональные связи:

$$\begin{aligned} \sigma_{23} &= c_{44} \frac{\partial w}{\partial y} - e_{15} E_2 + J \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial t^2}, \\ \sigma_{13} &= c_{44} \frac{\partial w}{\partial x} - e_{15} E_1 + J \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2}, \\ \sigma_{32} &= c_{44} \frac{\partial w}{\partial y} - e_{15} E_2 - J \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial t^2}, \\ \sigma_{31} &= c_{44} \frac{\partial w}{\partial x} - e_{15} E_1 - J \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2}, \\ D_1 &= e_{15} \frac{\partial w}{\partial x} + \varepsilon_1 E_1, \quad D_2 = e_{15} \frac{\partial w}{\partial y} + \varepsilon_1 E_2, \\ B_3 &= \mu_3 H_3. \end{aligned} \quad (38)$$

Подстановка (38) в уравнение (37) и исключение компонент электрического поля $E_1(x, y, t)$ и $E_2(x, y, t)$ из уравнений электродинамики приводит к

$$c_{44}\Delta w - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = e_{15} \left(\frac{\partial E_1}{\partial x} + \frac{\partial E_2}{\partial y} \right) - J \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial t^2}, \quad (39)$$

$$\Delta H_3 = \varepsilon_1 \mu_3 \frac{\partial^2 H_3}{\partial t^2}, \quad (40)$$

$$\frac{1}{\varepsilon_1} \frac{\partial H_3}{\partial y} = \frac{\partial E_1}{\partial t} + \frac{e_{15}}{\varepsilon_1} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t}, \quad (41)$$

$$\frac{1}{\varepsilon_1} \frac{\partial H_3}{\partial x} = -\frac{\partial E_2}{\partial t} - \frac{e_{15}}{\varepsilon_1} \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t}.$$

Из уравнений (41) следует уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial E_1}{\partial x} + \frac{\partial E_2}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{e_{15}}{\varepsilon_1} \Delta w \right), \quad (42)$$

то есть уравнения относительно упругого сдвига $w(x, y, t)$ и дивергенции электрического поля $\partial E_1/\partial x + \partial E_2/\partial y$ разделяются. Для задач гармонических колебаний ($e^{i\omega t}$) уравнение (42) упрощается

$$\frac{\partial E_1}{\partial x} + \frac{\partial E_2}{\partial y} = -\frac{e_{15}}{\varepsilon_1} \Delta w \quad (43)$$

и уравнение (39) приводится к автономному виду

$$c_{44} (1 + \chi^2) \Delta w + J \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial t^2} = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \quad (44)$$

Таким образом, для гармонических колебаний антиплоская задача приводится к решению автономных уравнений (40) и (44) относительно $H_3(x, y, t)$ и $w(x, y, t)$.

5. ВОЛНА ГУЛЯЕВА–БЛЮСТЕЙНА В ПЬЕЗОЭЛЕКТРИКЕ КЛАССА bmm С УЧЕТОМ УПРОЩЕННОЙ МОДЕЛИ СРЕДЫ КОССЕРА

На основе приведенных уравнений антиплоской задачи можно рассмотреть задачу распространения волн в полупространстве – аналог волн Гуляева–Блюстейна [19]. Пусть полупространство из пьезоэлектрического материала класса bmm занимает область $-\infty < x < \infty, 0 \leq y < \infty, -\infty < z < \infty$.

Предполагается, что граница полупространства свободна от механических напряжений и заземлена

$$\sigma_{23}(x, 0, t) = 0, \quad E_1(x, 0, t) = 0. \quad (45)$$

Требуется найти решение уравнений антиплоской задачи, удовлетворяющих условиям

$$\lim_{y \rightarrow \infty} w(x, y, t) = 0, \quad \lim_{y \rightarrow \infty} E_1(x, y, t) = 0. \quad (46)$$

Решение уравнений (40) и (44) представляется в виде

$$w(x, y, t) = f(y) \exp i(\omega t - kx), \quad (47)$$

$$H_3(x, y, t) = g(y) \exp i(\omega t - kx).$$

С учетом (47) из уравнений (41) получаются компоненты электрического поля

$$E_1(x, y, t) = i \left[\frac{e_{15}}{\varepsilon_1} k f(y) - \frac{1}{\varepsilon_1 \omega} g'(y) \right] \exp i(\omega t - kx), \quad (48)$$

$$E_2(x, y, t) = - \left[\frac{k}{\varepsilon_1 \omega} g(y) - \frac{e_{15}}{\varepsilon_1} f'(y) \right] \exp i(\omega t - kx).$$

Подстановка $w(x, y, t)$ из (47) в уравнение (44) приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению относительно функции $f(y)$

$$f''(y) - k^2 r^2(\omega, k) f(y) = 0, \quad (49)$$

где

$$r^2(\omega, k) = \frac{1 - (1 + \beta^2 k^2) \eta^2(\omega, k)}{1 - \beta^2 k^2 \eta^2(\omega, k)}, \quad (50)$$

$$\eta^2(\omega, k) = \omega^2 / (k^2 \tilde{c}_t^2).$$

Уравнение (49) будет иметь затухающее по y решение, удовлетворяющее условию (46), если имеют место неравенства

$$0 < \omega < k \tilde{c}_t / \sqrt{1 + \beta^2 k^2}, \quad (51)$$

либо

$$\omega > \tilde{c}_t / \beta. \quad (52)$$

Из условия (51), в частном случае неучета внутреннего вращения $\beta \equiv 0$, получается известное условие существования поверхностной волны Гуляева–Блюстейна. Наличие микрополярности у материала приводит к сужению интервала возможных частот локализованных электроупругих волн (51). Условие (52) дает новый интервал частот возможных локализованных электроупругих волн, который исчезает при отсутствии микрополярности среды $\beta \equiv 0$.

Требование, чтобы искомая функция $H_3(x, y, t)$ из (47) удовлетворяла уравнению (40), дает

$$g'' - k^2 s^2 g = 0, \quad s^2(\omega, k) = 1 - \theta_2 \eta^2, \quad (53)$$

$$\theta_2 = \tilde{c}_t^2 c_1^{-2} < 1.$$

При выполнении условия (51) уравнение (53) также будет иметь затухающее решение. В случае “нереального” условия (52) необходимо дополнительное ограничение на длину (частоту) распространяющейся локализованной волны $\lambda(\omega) < 2\pi c_1/\omega$.

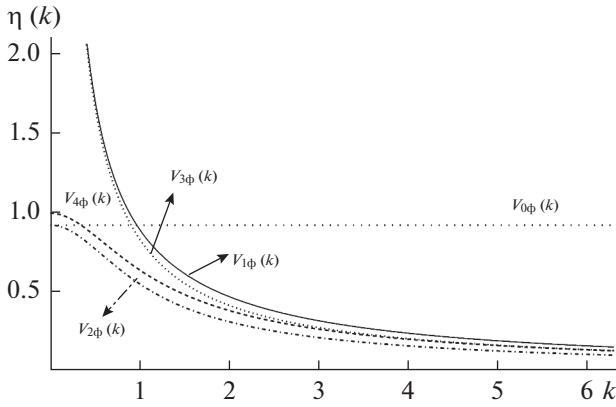


Рис. 4. Приведенная фазовая скорость квазистатической волны Гуляева–Блюстейна при разных значениях коэффициентов микрополярности и электро-механической связи пьезоэлектрика класса *bmm*.

В результате решения уравнений (49), (53), удовлетворяющие условиям затухания, будут иметь вид

$$f(y) = Ae^{-kry}, \quad g(y) = Be^{-ksy}. \quad (54)$$

Требование, чтобы решения (47)–(48) удовлетворяли граничным условиям (45), приводит к системе

$$\begin{aligned} r(\omega, k)(1 + \chi)(1 - \beta^2 k^2 \eta) A + \\ + (e_{15}/\varepsilon_1 \omega c_{44}) B = 0, \\ e_{15} \omega A + s(\omega, k) B = 0. \end{aligned} \quad (55)$$

Условие равенства нулю детерминанта этой системы приводит к уравнению, определяющему приведенную фазовую скорость поверхностной волны $\eta(\omega/k)$

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - (\tilde{c}_t^2/c_1^2)\eta^2} \sqrt{1 - \beta^2 k^2 \eta^2} \times \\ \times \sqrt{1 - (1 + \beta^2 k^2)\eta^2} = \chi_1^2, \end{aligned} \quad (56)$$

где $\chi_1^2 = \chi^2/(1 + \chi^2)$ – приведенный коэффициент электро-механической связи пьезоэлектрика, $\tilde{c}_t = c_t \sqrt{1 + \chi^2}$ – приведенная скорость объемных сдвиговых волн в пьезоэлектрике.

Из уравнения дисперсии (56) очевидно, что зона допустимых частот образуется согласно области определения независимой переменной ω

$$\begin{aligned} \omega \leq 2\pi \tilde{c}_t / \sqrt{\lambda^2 + 4\pi^2 \beta^2}, \\ \text{или } \tilde{c}_t / \beta < \omega \leq 2\pi c_1 / \lambda. \end{aligned} \quad (57)$$

Из (57) очевидно, что при неучете микрополярности материала ($\beta \equiv 0$) здесь, как и в квазистатическом приближении $\tilde{c}_t^2/c_1^2 \ll 1$, для связанного электроупругого поля получается решение

задачи Гуляева–Блюстейна: $0 < \omega_{wE} \leq \tilde{c}_t/\beta$, а для автономного магнитного поля получается $0 < \omega_H \leq 2\pi c_1/\lambda$.

При учете микрополярности материала ($\beta \neq 0$) в квазистатическом приближении $\tilde{c}_t^2/c_1^2 \ll 1$, дисперсионное уравнение (56) принимает вид

$$\sqrt{1 - \beta^2 k^2 \eta^2} \sqrt{1 - (1 + \beta^2 k^2)\eta^2} = \chi_1^2, \quad (58)$$

откуда получается влияние микрополярности пьезоэлектрического материала на поверхностную волну Гуляева–Блюстейна

$$\eta_{1,2}^2 = \frac{1 + 2\beta^2 k^2 \pm \sqrt{1 + 4\chi_1^4 (\beta^2 k^2 + \beta^4 k^4)}}{2\beta^2 k^2 (1 + \beta^2 k^2)}. \quad (59)$$

Результаты сравнительного анализа фазового поведения волнового поля при учете разных свойств материала приведены на рис. 4. Из (59) легко получаются как фазовые скорости предельных волн (в случаях предельных значений характерных коэффициентов материала)

$$V_{0\phi}[k] = V_{\phi}[\chi_1^2; \beta; k] \Big|_{\beta=0} = \tilde{c}_t \sqrt{1 - \chi_1^4},$$

$$V_{3\phi}[k] = V_{\phi}[\chi_1^2; \beta; k] \Big|_{\chi_1^2=0} = c_t / (\beta k),$$

$$V_{4\phi}[k] = V_{\phi}[\chi_1^2; \beta; k] \Big|_{\chi_1^2=0} = c_t / \sqrt{1 + \beta^2 k^2},$$

так и фазовые скорости при ненулевых значениях характерных коэффициентов пьезоэлектрического микрополярного материала

$$V_{1\phi}[k] = V_{\phi}[\chi_1^2 = 0.12; \beta = 1.2; k],$$

$$V_{2\phi}[k] = V_{\phi}[\chi_1^2 = 0.12; \beta = 1.2; k].$$

Если вместо граничных условий (45) рассматривать граничные условия

$$\sigma_{23}(x, 0, t) = 0, \quad H_3(x, 0, t) = 0, \quad (60)$$

то получается, что поверхностная волна не существует. В квазистатическом приближении условие $H_3(x, 0, t) = 0$ соответствует условию электрически открытой границы $D_2(x, 0, t) = 0$ [20].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе приведенных основных уравнений электроупругости пьезоэлектрика класса *bmm* с учетом упрощенной модели среды Коссера изучены характерные явления при распространении сдвиговых волн.

Рассматривается влияние микрополярности на распространение одномерной электроупругой волны сдвига в разных кристаллических срезах пьезокристалла. Показывается, что микрополяр-

ность приводит к дисперсии и замедляет распространение волны.

Изучено явление бесконтактного возмущения электроупругой волны в пьезоэлектрике посредством электромагнитной волны. Выявлен характер возбужденного волнового поля в пьезоматериале и влияние учета микрополярности на него. Определены частотные зоны прозрачности материала.

Изучено влияние микрополярности материала по упрощенной модели среды Коссера на существование и распространение электроупругой поверхностной волны Гуляева–Блостейна. В случае нормально падающей магнитоупругой волны на поверхность пьезоэлектрического полупространства, по направлению оси поляризации пьезокристалла, в полупространстве возникают три ветви локализованных у поверхности электроупругих волн. Из уравнения дисперсии найден частотный интервал существования этих волн.

Найдены также зоны частот, при которых пьезоэлектрик становится прозрачным для данных магнитоупругих волн.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Achenbach J.D.* Wave Propagation in Elastic Solids. N.Y.: Elsevier, 1984. 364 p.
2. *Викторов И.А.* Звуковые поверхностные волны в твердых телах. М.: Наука, 1981. 287 с.
3. *Biryukov S.V., Gulyaev Y.V., Krylov V., Plessky V.* Surface acoustic waves in inhomogeneous media. Springer, Series on Wave Phenomena, 1995. V. 20. 388 p.
4. *Cosserat E., Cosserat F.* Théorie des corps déformables. Herrman A. Paris, 1909.
5. *Eringen A.C., Suhubi E.S.* Nonlinear theory of simple micro elastic solids // Int. J. Eng. Sci. 1964. Pt. I – V. 2(2). P. 189; Pt. 2 – V. 2(4). P. 389.
6. *Eringen A.S.* Micro continuum field theories. Foundation and Solids. N.Y.: Springer, 1998. V. 1. 325 p.
7. *Ерофеев В.И.* Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой. М.: Изд. МГУ, 1999. 327 с.
8. *Mechanics of Generalized Continua / Altenbach H., Maugin G., Erofeev V. (Editors).* Springer-Verlag. Berlin, Heidelberg, 2011. 359 p.
9. *Generalized Continua as Models for Materials / Altenbach H., Forest S., Krivtsov A. (Editors).* Springer-Verlag. Berlin-Heidelberg, 2013. 62 p.
10. *Generalized Continua as Models for Classical and Advanced Materials / Altenbach H., Forest S. (Editors).* Springer-Verlag: Berlin, Heidelberg, 2016. 463 p.
11. *Advanced in Mechanics of Micro structured Media and Structures / dell'Isola F., Eremeyev V., Porubov A. (Editors).* Springer. Cham. Switzerland, 2018. 374 p.
12. *Generalized Models and Non-Classical Approaches in Complex Materials. V. 1, 2 / Altenbach H., Pouget J., Rousseau M., Collet B., Michelitsch Th. (Editors).* Springer International Publishing AG, part of Springer Nature, 2018. 510 p.
13. *Zhilin P.A., Kolpakov Ya.E.* A Micro-Polar Theory for Piezoelectric Materials // Lecture at XXXIII Summer School – Conference 2005, “Advanced Problems in Mechanics”, S. Petersburg: Russia, 2006. P. 250–261.
14. *Партон В.З., Кудрявцев Б.А.* Электромагнитоупругость пьезо-электрических и электропроводных тел. М.: Наука, 1988. 472 с.
15. *Амбарцумян С.А., Белубекян М.В.* Некоторые задачи электромагнитоупругости пластин. Ереван: Изд. ЕГУ, 1991. 144 с.
16. *Амбарцумян С.А., Белубекян М.В., Аветисян А.С. (Ред.)* Прикладная микрополярная разномодульная теория оболочек и пластин. Palmariun academic publishing, 2016. 193 с.
17. *Ambartsumian S.A., Avetisyan A.S., Belubekyan M.V.* Propagation of elastic waves in a plane waveguide layer on the basis of a simplified model of the Cosserat continuum // Proc. of the NAS of Armenia. 2017. V. 70. № 2. P. 15–27.
18. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
19. *Балакирев М.К., Гилинский И.А.* Волны в пьезокристаллах. Новосибирск: Наука, 1982. 239 с.
20. *Белубекян М.В.* Экранированная поверхностная сдвиговая волна в пьезоактивном полупространстве гексагональной симметрии // В сб.: ”Проблемы взаимодействия деформируемых сред”. Ереван: Изд. НАН Армении, 2008. С. 125–130.