Письма в ЖЭТФ, том 117, вып. 7, с. 487 – 491 © 2023 г. 10 апреля

Новые объекты в теории рассеяния с симметриями[1)]

А. С. Лосев[+∗ 2)], *Т. В. Сулимов*[× 2)]

[+]*Wu Wen-Tsun Key Lab of Mathematics, Chinese Academy of Sciences, Hefei, 230026 Hefei, China*

[∗]*Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики", 119048 Москва, Россия*

[×]*Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН, 191023 С.-Петербург, Россия*

Поступила в редакцию 20 февраля 2023 г.
После переработки 3 марта 2023 г.
Принята к публикации 3 марта 2023 г.

Рассматривается одномерная квантовомеханическая задача рассеяния, определяемая гамильтонианом с симметриями. Показывается, что рассмотрение симметрий в духе гомологической алгебры приводит к новым объектам, обобщающим T- и K-матрицы. Эти новые объекты объединены со старыми внутри дифференциала, порождаемого гомотопическим трансфером взаимодействия и симметрий, действующих на решениях свободной задачи. Таким образом, новые и старые объекты удовлетворяют интересным квадратичным уравнениям, нетривиальность которых демонстрируется на примере суперсимметричной задачи на окружности.

DOI: 10.31857/S1234567823070017, EDN: jfgnqc

1. Введение и результаты. Рассмотрим нерелятивистскую одномерную квантовомеханическую задачу о частице со внутренними степенями свободы, такими как спин или изоспин. Пространство состояний частицы описывается тензорным произведением пространства функций на прямой ($\mathbb{R}$) или на окружности радиуса R (S^1_R) и конечномерного пространства внутренних степеней свободы I. Гамильтониан представим в виде $H = H_0 + V$, где H_0 – *свободный гамильтониан*, действующий на функции как $-\partial_x^2$, а на I действующий тривиально; и V – *взаимодействие*, меняющее I, и как обобщенная функция имеющее

- ограниченный носитель (для задачи на $\mathbb{R}$);
- носитель с мерой меньше $2\pi R$ (для задачи на S^1_R).

Мы будем решать задачу пертурбативно, т.е. начнем с решения свободной задачи и рассмотрим соответствующее решение полной задачи как ряд по взаимодействию. Поскольку нас интересуют решения свободной задачи с фиксированной энергией E, удобно определить сдвинутый гамильтониан $H_{0,E} = H_0 - E$.

Рассмотрим задачу на $\mathbb{R}$. Матричный элемент *пертурбативной T-матрицы* между двумя состояниями непрерывного спектра с энергией E $|\varphi_\alpha\rangle, |\varphi_\beta\rangle \in \ker H_{0,E}$ определяется как

$$T_{\beta,\alpha} = \langle\varphi_\beta|T|\varphi_\alpha\rangle = \\ = \langle\varphi_\beta|V + VG_{\text{caus}}V + VG_{\text{caus}}VG_{\text{caus}}V + \ldots|\varphi_\alpha\rangle, \tag{1}$$

где G_{caus} – *причинная функция Грина*

$$G_{\text{caus}} = \lim_{\varepsilon\to 0+}(E - H_0 + \mathrm{i}\varepsilon)^{-1}. \tag{2}$$

Как известно, T является пертурбативным решением уравнения Липмана–Швингера на (непертурбативную) Т-матрицу T^{np}:

$$T^{\text{np}} = V + VG_{\text{caus}}T^{\text{np}}. \tag{3}$$

В свою очередь T^{np}, как и функция Грина полной задачи

$$G^{\text{full}}_{\text{caus}} = \lim_{\varepsilon\to 0+}(E - H + \mathrm{i}\varepsilon)^{-1}, \tag{4}$$

содержит в себе всю информацию о рассеянии частиц, а также связных состояниях (см., например, [1]).

Пусть $\mathfrak{g}$ – (супер)алгебра симметрий H с генераторами S_a:

$$[S_a, H] = 0, \qquad \{S_a, S_b\} = f^d_{ab}S_d, \tag{5}$$

где $\{,\}$ обозначает суперкоммутатор. Заметим, что сам гамильтониан тоже является симметрией, поскольку $[H,H] = 0$. Логично спросить, как симметрии гамильтониана отражены в симметриях T^{np} или, по крайней, мере в симметриях T.

[1)]См. дополнительный материал к данной статье на сайте нашего журнала www.jetpletters.ac.ru

[2)]e-mail: aslosev2@yandex.ru; optimus260@gmail.com

В этой работе мы постараемся ответить на этот вопрос. Для формулировки довольно нетривиального ответа нам потребуется ввести *новые объекты*, не рассмотренные ранее в теории рассеяния, насколько нам известно. Мы также покажем, что эти объекты связаны квадратичными соотношениями. В нашем текущем понимании, эти объекты можно получить из задачи на S^1_R в пределе $R \to \infty$. Мы предполагаем, что их можно определить и сразу на $\mathbb{R}$, но над этим способом мы еще работаем.

Для начала, от T-матрицы мы перейдем к K-матрице (см., например, [2]), определяемой соотношением

$$K = T + \frac{\mathrm{i}}{2\sqrt{E}} TK. \tag{6}$$

Пример. Рассмотрим $V(x) = \lambda\delta(x)$. T-матрицу легко вычислить по любой из формул выше:

$$T(p,q) = \frac{\lambda}{1 - \frac{\lambda}{2\mathrm{i}\kappa}}, \tag{7}$$

где $\kappa = \sqrt{E}$, а от внешних импульсов зависимости нет. По формуле (6) мы получаем

$$K(p,q) = \lambda. \tag{8}$$

K оказалась равна V, что в общем случае, разумеется, будет не так.

Ряд теории возмущений для K получается из (1) заменой причинной функции Грина на функцию Грина стоячей волны.

Затем мы введем *духи*, соответствующие симметриям. Духи c^a – это координаты на $\mathfrak{g}$ с измененной четностью. Проще говоря, если S_a четная, то c^a нечетный, и наоборот. Нечетный дух, отвечающий гамильтониану, обозначим c, а остальные духи обозначим $\tilde{c}^a$.

Оказывается, K суть одна из компонент дифференциала Q_{ind}, действующего на пространстве $\ker H_{0,E} \otimes \mathbb{C}[[c^a, R^{-1}]]$. Переменная R^{-1} четная и приходит из задачи на S^1_R, разбираемой в секциях 3.2 и 3.3. Квадратичные уравнения же имеют вид

$$Q^2_{\mathrm{ind}} = 0. \tag{9}$$

Перейдем к построению Q_{ind} из симметрий. Мы предполагаем, что, подобно гамильтониану, каждая симметрия S_a разделяется на две части:

$$S_a = S_{0,a} + S_{1,a}, \tag{10}$$

где $S_{0,a}$ – симметрия свободной задачи, а $S_{1,a}$ – обобщенная функция с теми же условиями, что и на V.

Теперь мы конструируем Q_{ind} с помощью процедуры *гомотопического трансфера* (применяется в секции 2.1, подробнее см. [3] и [4]). В виде ряда по духам дифференциал имеет вид

$$Q_{\mathrm{ind}} = \tfrac{1}{2} f^d_{ab} c^a c^b \partial_{c^d} + c^a S_a(R^{-1}) + c^a c^b S_{ab}(R^{-1}) + \ldots \tag{11}$$

В нулевом порядке по R^{-1} второе слагаемое в разложении содержит все симметрии H_0, суженные на $\ker H_{0,E}$

$$Q^{(0)}_{\mathrm{ind}} = \tfrac{1}{2} f^d_{ab} c^a c^b \partial_{c^d} + c^a S_{0,a}\big|_{\ker H_{0,E}}. \tag{12}$$

В первом порядке по R^{-1} имеем

$$\begin{aligned} Q^{(1)}_{\mathrm{ind}} &= c^a S^{(1)}_a + c^a c^b S^{(1)}_{ab} + \ldots = \\ &= cK + \tilde{c}^a S^{(1)}_a + c^a c^b S^{(1)}_{ab} + \ldots \end{aligned} \tag{13}$$

Как было заявлено выше, K-матрица появляется как коэффициент при выделенном духе c, в то время как остальные члены разложения это *новые объекты* (операторы на $\ker H_{0,E}$). Насколько нам известно, высшие порядки по R^{-1} также не встречались раньше в литературе. Все эти новые объекты, а также квадратичные уравнения, связывающие их между собой и с K-матрицей, составляют главный результат данной работы.

2. Теория.

2.1. Гомотопический трансфер. Суть гомотопического трансфера состоит в следующем. Пусть даны два комплекса, цепное отображение между ними и гомотопия в первом из них. Тогда по деформации дифференциала в первом комплексе можно построить соответствующую деформацию во втором. Вместо того, чтобы формулировать эту процедуру во всей общности (см. [4]), мы рассмотрим ее на конкретном примере.

Мы проиллюстрируем идеи секции 1 на простейшем нетривиальном примере $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричной квантовой механики на S^1_R. Кроме того, мы рассмотрим алгебру, состоящую только из гамильтониана и одной симметрии, квадрат которой равен нулю:

$$[S, H] = 0, \qquad S^2 = 0. \tag{14}$$

Таким образом, все структурные константы f^d_{ab} равны нулю, и первое слагаемое в разложении (11) пропадет.

Соответствующие духи обозначим c и $\tilde{c}$. Их свойства:

1. c – нечетный, $\tilde{c}$ четный;

2. c антикоммутирует с S.

С их помощью построим дифференциалы

$$Q_0 = cH_{0,E} + \tilde{c}S_0, \quad Q_1 = cV + \tilde{c}S_1, \quad Q = Q_0 + Q_1. \tag{15}$$

Из соотношений (14) и свойств духов следует, что

$$Q_0^2 = Q^2 = 0, \tag{16}$$

а Q_1 решает уравнение Мауэра–Картана

$$\{Q_0, Q_1\} + Q_1^2 = 0. \tag{17}$$

Пусть $\mathscr{H}$ обозначает исходное гильбертово пространство. Определим $U = \mathscr{H} \otimes \mathbb{C}[c, \tilde{c}]$ и разобьем это пространство на два

$$U = U_0 \oplus U_{\mathrm{ac}}, \qquad U_0 = \ker H_{0,E} \otimes \mathbb{C}[c, \tilde{c}]. \tag{18}$$

Введем естественные операции проекции и включения

$$\pi : U \to U_0, \qquad i : U_0 \to U. \tag{19}$$

Также построим *гомотопию*

$$h = G_{\mathrm{st}}\partial_c, \quad G_{\mathrm{st}}|\varphi\rangle = \begin{cases} (E - H_0)^{-1}|\varphi\rangle, & |\varphi\rangle \notin U_0, \\ 0, & |\varphi\rangle \in U_0, \end{cases} \tag{20}$$

где $\partial_c = \frac{\partial}{\partial c}$.

Замечание. В физике G_{st} иногда называют функцией Грина стоячей волны, но в духе гомологической алгебры надо было бы назвать ее *гомотопической* функцией Грина.

Проекцию на U_0 можно записать двумя способами:

$$\Pi_{U_0} = i\pi = 1 + \{h, Q_0\}. \tag{21}$$

Теперь мы можем явно указать, к чему мы применяем гомотопический трансфер. Первый комплекс – это (U, Q_0) с гомотопией h и деформацией Q_1. Второй комплекс – это $(U_0, \pi Q_0 i)$, а цепное отображение – это π. Тогда соответствующий деформированный или *индуцированный* дифференциал, согласно гомотопическому трансферу, равен

$$Q_{\mathrm{ind}} = \pi Q_0 i + \pi Q_1 i + \pi Q_1 h Q_1 i + \pi Q_1 h Q_1 h Q_1 i + \ldots. \tag{22}$$

Подставляя и приводя подобные слагаемые, несложно привести это к виду

$$Q_{\mathrm{ind}} = \tilde{c}S_0 + cV_{\mathrm{ind}} + c\partial_c\tilde{c}S_{\mathrm{R}} + \partial_c c\tilde{c}S_{\mathrm{L}} - \partial_c\tilde{c}^2 S_{\mathrm{LR}}, \tag{23}$$

где S_0, строго говоря, стоит вместо $S_0\big|_{\ker H_{0,E}}$, но поскольку $[S_0, H_0] = 0$, мы упростили обозначения. Кроме того,

$$V_{\mathrm{ind}} = \pi\,(V + VG_{\mathrm{st}}V + VG_{\mathrm{st}}VG_{\mathrm{st}}V + \ldots)\,i, \tag{24}$$

$$S_{\mathrm{R}} = \pi\,(S + VG_{\mathrm{st}}S + VG_{\mathrm{st}}VG_{\mathrm{st}}S + \ldots)\,i, \tag{25}$$

$$S_{\mathrm{L}} = \pi\,(S + SG_{\mathrm{st}}V + SG_{\mathrm{st}}VG_{\mathrm{st}}V + \ldots)\,i, \tag{26}$$

$$S_{\mathrm{LR}} = \tag{27}$$
$$= \pi\,(SG_{\mathrm{st}}S + SG_{\mathrm{st}}VG_{\mathrm{st}}S + SG_{\mathrm{st}}VG_{\mathrm{st}}VG_{\mathrm{st}}S + \ldots)\,i.$$

Теперь мы можем воспользоваться главным результатом гомотопического трансфера. Поскольку $Q^2 = 0$, по теореме Кадеишвили имеем

$$Q_{\mathrm{ind}}^2 = 0. \tag{28}$$

В развернутой форме это уравнение имеет вид

$$\begin{aligned} Q_{\mathrm{ind}}^2 = c\tilde{c}[V_{\mathrm{ind}}, S_0] + c\partial_c\tilde{c}^2\{S_0, S_{\mathrm{R}}\} + \\ + \partial_c c\tilde{c}^2\{S_0, S_{\mathrm{L}}\} + \partial_c\tilde{c}^3[S_0, S_{\mathrm{LR}}] + \\ + c\tilde{c}\,(V_{\mathrm{ind}}S_{\mathrm{L}} - S_{\mathrm{R}}V_{\mathrm{ind}}) + \\ + \tilde{c}^2\Big(c\partial_c(S_{\mathrm{R}}^2 - V_{\mathrm{ind}}S_{\mathrm{LR}}) + \partial_c c(S_{\mathrm{L}}^2 - S_{\mathrm{LR}}V_{\mathrm{ind}})\Big), \end{aligned} \tag{29}$$

из чего следует

$$\begin{cases} [V_{\mathrm{ind}}, S_0] + V_{\mathrm{ind}}S_{\mathrm{L}} - S_{\mathrm{R}}V_{\mathrm{ind}} = 0, & (30) \\ \{S_0, S_{\mathrm{R}}\} + S_{\mathrm{R}}^2 - V_{\mathrm{ind}}S_{\mathrm{LR}} = 0, & (31) \\ \{S_0, S_{\mathrm{L}}\} + S_{\mathrm{L}}^2 - S_{\mathrm{LR}}V_{\mathrm{ind}} = 0, & (32) \\ [S_0, S_{\mathrm{LR}}] = 0. & (33) \end{cases}$$

Уточним, что S_{L}, S_{R} и S_{LR} – операторы на $\ker H_{0,E}$, описывающие симметрии K-матрицы, которая входит в V_{ind}. Насколько нам известно, это новые объекты в теории рассеяния. Кроме того, V_{ind} содержит, помимо K-матрицы, и другие слагаемые, которые появятся в конце секции 3.2. Эти слагаемые играют важную роль в описании симметрий K-матрицы и тоже раньше не описывались.

3. Примеры новых объектов и их связь с данными рассеяния.

3.1. Суперсимметричная квантовая механика. $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричная квантовая механика определяется набором следующих операторов:

$$Q_+ = \mathrm{d} + \mathrm{d}W, \quad Q_- = (\mathrm{d} - \mathrm{d}W)^*, \quad H = \{Q_+, Q_-\}, \tag{34}$$

где W – функция, $\mathrm{d} = \psi\partial_x$ – дифференциал де Рама, $\psi^* = -\partial_\psi$ и ψ – грассманова переменная, ассоциированная с суперсимметрией (общий обзор и историю предмета см. в [5]).

Замечание. И Q_+, и Q_- – симметрии полного гамильтониана, но не отдельных его частей.

Выпишем гамильтониан и его симметрии явно:

$$H = -\partial_x^2 + W'^2 - W''(1 - 2\psi\partial_\psi), \tag{35}$$

$$Q_+ = \psi(\partial_x + W'), \qquad Q_- = \partial_\psi(-\partial_x + W'). \tag{36}$$

Замечание. Данную формулировку нетрудно расширить на случаи, когда W и W' – обобщенные функции. Это можно сделать с помощью последовательности функций, сходящейся к требуемой обобщенной функции. Например, $W' = \mathrm{sgn} x$ можно получить как предел $W'_A = \tanh Ax$ (и, соответственно, $W_A = A^{-1} \ln\cosh Ax$) при $A \to \infty$.

Примем $S = Q_+$. Ясно, что $S_{\mathrm{LR}} \sim \psi^2 = 0$, поэтому уравнения (31)–(33) не будут представлять интереса. Уравнение (30) же описывает интересную симметрию V_{ind}, который, как мы показывали ранее, напрямую связан с K-матрицей.

Замечание. Если бы мы рассмотрели $S = Q_+ + Q_-$, S_{LR} непременно бы возникла.

Далее мы изучим это уравнение для конкретного потенциала на S^1_R и получим результат для задачи на $\mathbb{R}$ как предел $R \to \infty$.

3.2. Два δ-потенциала на S^1_R. Сразу отметим, что на S^1_R нельзя поставить задачу рассеяния в обычном смысле. Вместо этого, V_{ind} можно использовать, например, для пертурбативного вычисления сдвигов и расщеплений уровней энергии. Но это мы оставим для последующих работ, а сейчас рассмотрим V_{ind} само по себе.

В дальнейшем станет ясно, почему мы рассматриваем задачу на S^1_R, а не сразу на $\mathbb{R}$. Пока лишь скажем, что эта задача проще для понимания благодаря своему дискретному спектру. При работе с непрерывным спектром проекция на $\ker H_{0,E}$, состоящее из двух точек на оси импульса, требует более аккуратного рассмотрения.

Причина же рассматривать два δ-потенциала вместо одного в том, что один δ-потенциал нельзя породить периодической W'.

На S^1_R мы используем координату $x \in [-\pi R, \pi R)$. Рассмотрим

$$W'(x) = \frac{\lambda}{2}\mathrm{sgn}(a^2 - x^2), \tag{37}$$

где λ и a – фиксированные параметры, причем $0 < a < \pi R$.

Замечание. Внимательный читатель заметит, что такая W' соответствует непериодическому W. Но это лишь означает, что суперсимметрия спонтанно нарушена, т.е. e^{-W} не является волновой функцией связного состояния (см. [5]).

Согласно (35), такая W' порождает взаимодействие

$$\frac{\lambda^2}{4} + (-1)^F \lambda(\delta(x-a) - \delta(x+a)), \tag{38}$$

где F – фермионное число, т.е. $(-1)^F = 1 - 2\psi\partial_\psi$.

Ясно, что в таком виде потенциал неудобен для задачи рассеяния из-за постоянного сдвига $\frac{\lambda^2}{4}$. Мы перенесем его в "свободную часть" задачи, чтобы носитель взаимодействия был ограничен в пределе $R \to \infty$:

$$\begin{gathered} H_{0,E} = -\partial_x^2 - E - \frac{\lambda^2}{4}, \\ V(x) = (-1)^F \lambda(\delta(x-a) - \delta(x+a)). \end{gathered} \tag{39}$$

Аналогично поступаем и для симметрии:

$$S_0 = \psi(\partial_x - \tfrac{\lambda}{2}), \quad S_1 = \psi\lambda\theta(a^2 - x^2). \tag{40}$$

Условие периодичности волновых функций делает спектр свободной задачи дискретным:

$$E_n = k_n^2 - \frac{\lambda^2}{4}, \qquad k_n = \frac{n}{R}, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{41}$$

Зафиксируем отношение $\kappa = \frac{n_0}{R} > 0$.

Замечание. Это означает, что в дальнейшем R должно быть кратно $\frac{1}{\kappa}$.

Каждый уровень с положительным n дважды вырожден, поэтому $\ker H_{0,E}$ имеет размерность четыре.

Замечание. Мы не забываем, что бозонные и фермионные степени свободы нужно учитывать отдельно. Однако матрицы операторов получатся размера 2×2, а не 4×4, потому что мы используем для этого учета грассманову переменную ψ.

Нормированные волновые функции свободной задачи – это

$$\varphi_n(x) = \langle x|n\rangle = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_n x}}{\sqrt{2\pi R}}, \tag{42}$$

а функция Грина стоячей волны имеет вид

$$G_{\mathrm{st}} = \sum_{|n| \neq n_0} \frac{|n\rangle\langle n|}{E_{n_0} - E_n} = \sum_{|n| \neq n_0} \frac{|n\rangle\langle n|}{\kappa^2 - k_n^2}. \tag{43}$$

Нам понадобятся матричные элементы следующих операторов:

$$\begin{gathered} V_{n,m} = \frac{\mathrm{i}(-1)^F \lambda}{\pi R} \sin a(k_m - k_n), \\ G_{\mathrm{h},n,m} = \frac{\delta_{n,m}}{\kappa^2 - k_n^2}, \end{gathered} \tag{44}$$

$$\begin{gathered} S_{0,n,m} = \psi\left(\mathrm{i}k_n - \frac{\lambda}{2}\right)\delta_{n,m}, \\ S_{1,n,m} = \psi\frac{\lambda}{\pi R}\frac{\sin a(k_m - k_n)}{k_m - k_n}. \end{gathered} \tag{45}$$

Сужение на массовую поверхность тривиально: оператору A мы сопоставляем 2×2 матрицу

$$A\big|_{\ker H_{0,E}} = \pi A i = \begin{pmatrix} A_{n_0,n_0} & A_{n_0,-n_0} \\ A_{-n_0,n_0} & A_{-n_0,-n_0} \end{pmatrix}. \tag{46}$$

Замечание. Еще раз заметим, что элементы матрицы $A\big|_{\ker H_{0,E}}$ могут зависеть от ψ и ∂_ψ, как видно для V и S.

Эти выражения позволяют нам вычислить $V_{\rm ind}$, $S_{\rm L}$ и $S_{\rm R}$ в виде ряда по λ. Используя систему компьютерной алгебры, нам удалось произвести вычисления до порядка λ^3. Результаты вычислений приведены в дополнительном материале.

Важно отметить, что n-й член ряда оказывается многочленом по R^{-1} степени n. Поскольку соотношения суперсимметрии выполняются для произвольного радиуса R, каждой степени λ отвечают *несколько* уравнений. Обозначим слагаемое, пропорциональное $\lambda^\alpha R^{-\beta}$, индексом (α,β). Теперь уравнение (30) можно проверить пертурбативно:

$$(1,1):\quad [V_{\rm ind}^{(1,1)}, S_0^{(0,0)}] = 0, \tag{47}$$

$$(2,1):\quad [V_{\rm ind}^{(2,1)}, S_0^{(0,0)}] + [V_{\rm ind}^{(1,1)}, S_0^{(1,0)}] = 0, \tag{48}$$

$$(2,2):\quad [V_{\rm ind}^{(2,2)}, S_0^{(0,0)}] + V_{\rm ind}^{(1,1)} S_{\rm L}^{(1,1)} - S_{\rm R}^{(1,1)} V_{\rm ind}^{(1,1)} = 0, \tag{49}$$

$$(3,1):\quad [V_{\rm ind}^{(3,1)}, S_0^{(0,0)}] + [V_{\rm ind}^{(2,1)}, S_0^{(1,0)}] = 0, \tag{50}$$

$$\begin{aligned}(3,2):\quad &[V_{\rm ind}^{(3,2)}, S_0^{(0,0)}] + [V_{\rm ind}^{(2,2)}, S_0^{(1,0)}]\\ &+ V_{\rm ind}^{(1,1)} S_{\rm L}^{(2,1)} - S_{\rm R}^{(2,1)} V_{\rm ind}^{(1,1)}\\ &+ V_{\rm ind}^{(2,1)} S_{\rm L}^{(1,1)} - S_{\rm R}^{(1,1)} V_{\rm ind}^{(2,1)} = 0,\end{aligned} \tag{51}$$

$$\begin{aligned}(3,3):\quad &[V_{\rm ind}^{(3,3)}, S_0^{(0,0)}]\\ &+ V_{\rm ind}^{(1,1)} S_{\rm L}^{(2,2)} - S_{\rm R}^{(2,2)} V_{\rm ind}^{(1,1)}\\ &+ V_{\rm ind}^{(2,2)} S_{\rm L}^{(1,1)} - S_{\rm R}^{(1,1)} V_{\rm ind}^{(2,2)} = 0,\end{aligned} \tag{52}$$

$$(4,1):\quad \ldots$$

$$\ldots$$

3.3. Предел $R \to \infty$. Чтобы глубже понять уравнения выше, полезно перейти к пределу окружности бесконечного радиуса. При $R \to \infty$ дискретизация уровней становится равной нулю и задача совпадает с задачей на $\mathbb{R}$. Чтобы восстановить стандартную нормировку состояний на δ-функцию, нужно домножить каждый $|n\rangle$ на $\sqrt{2\pi R}$, что приводит к следующему соотношению на матричные элементы операторов:

$$A^{\mathbb{R}}(k_n, k_m) = \lim_{R\to\infty} 2\pi R A_{n,m}^{S_R^1}. \tag{53}$$

Выражение (43) становится интегралом в смысле главного значения и

$$V_{\rm ind}^{\mathbb{R}} = 2\pi R (V_{\rm ind}^{(1,1)} + V_{\rm ind}^{(2,1)} + V_{\rm ind}^{(3,1)} + \ldots), \tag{54}$$

$$S_{\rm L}^{\mathbb{R}} = 2\pi R (S_{\rm L}^{(1,1)} + S_{\rm L}^{(2,1)} + S_{\rm L}^{(3,1)} + \ldots), \tag{55}$$

$$S_{\rm R}^{\mathbb{R}} = 2\pi R (S_{\rm R}^{(1,1)} + S_{\rm R}^{(2,1)} + S_{\rm R}^{(3,1)} + \ldots). \tag{56}$$

Слагаемые, приведенные в дополнительном материале, согласуются с точными формулами для $V_{\rm ind}^{\mathbb{R}}$, $S_{\rm L}^{\mathbb{R}}$ и $S_{\rm R}^{\mathbb{R}}$, которые нам удалось получить. Эти формулы также представлены в дополнительном материале.

Однако для S_0 предел в формуле (53) не существует. Это ожидаемо, поскольку попытка сузить

$$S_0(p,q) = (\mathrm{i}p - \tfrac{\lambda}{2})\delta(p-q) \tag{57}$$

на массовую поверхность приводит к сингулярности, и хорошо известно, что при регуляризации методом "ящика конечного размера" $\delta(0) \sim R$.

Кроме того, слагаемые степеней $(\cdot,\beta)$, $\beta > 1$ не появились бы, если бы мы проводили вычисления сразу на $\mathbb{R}$, без помощи S_R^1.

В итоге, на $\mathbb{R}$ нельзя простым образом записать такие уравнения, как (49), поскольку первое слагаемое является неопределенностью вида "$0\times\infty$". Именно поэтому мы начали с задачи на S_R^1, а не на $\mathbb{R}$.

3.4. Заключительное предположение. Мы предполагаем, что слагаемые степеней $(\cdot,\beta)$, $\beta > 1$ в $Q_{\rm ind}$ могут быть получены и без рассмотрения задачи на S_R^1, по крайней мере, пертурбативно по λ, как в формуле (24).

Исследование финансировалось в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ.

1. J. R. Taylor, *Scattering Theory: The Quantum Theory of Nonrelativistic Collisions*, John Wiley and Sons, Inc., N. Y. (1972), ch. 3 and 14 (section e).
2. R. G. Newton, *Scattering Theory of Waves and Particles*, Springer, Berlin, Heidelberg (1982), § 11.3.2.
3. A. Losev, *TQFT, homological algebra and elements of K. Saito's theory of Primitive form: an attempt of mathematical text written by mathematical physicist*, in *Primitive Forms and Related Subjects–Kavli IPMU 2014*, Mathematical Society of Japan (2019), p. 269; e-Print: 2301.01390.
4. A. S. Arvanitakis, O. Hohm, C. Hull, and V. Lekeu, Fortsch. Phys. **70**(2–3), 2200003 (2022); doi:10.1002/prop.202200003; arXiv:2007.07942 [hep-th].
5. F. Cooper, A. Khare, and U. Sukhatme, Phys. Rep. **251**, 267 (1995); doi:10.1016/0370-1573(94)00080-M; arXiv:hep-th/9405029 [hep-th].