

# Декомпозиция статического потенциала в $SU(3)$ глюодинамике

В. Г. Борняков<sup>1)</sup>, И. Е. Кудров

Федеральное государственное бюджетное учреждение Институт физики высоких энергий имени А. А. Логунова  
Национального исследовательского центра “Курчатовский институт”, 142281 Протвино, Россия

Поступила в редакцию 3 февраля 2023 г.

После переработки 3 февраля 2023 г.

Принята к публикации 6 февраля 2023 г.

После фиксации максимальной абелевой калибровки в решеточной  $SU(3)$  глюодинамике мы раскладываем неабелево калибровочное поле на абелево поле, созданное абелевыми монополями, и модифицированное неабелево поле с удаленными монополями. Затем мы вычисляем соответствующие статические потенциалы в фундаментальном представлении и показываем, что сумма этих потенциалов аппроксимирует неабелевый статический потенциал с хорошей точностью на всех рассматриваемых расстояниях. Проводится сравнение с другими способами разложения.

DOI: 10.31857/S1234567823050026, EDN: pwqwkD

**1. Введение.** Мы численно исследуем решеточную  $SU(3)$  глюодинамику в максимальной абелевой калибровке (МАК) и рассматриваем декомпозицию решеточного калибровочного поля  $U_\mu(x) \in SU(3)$

$$U_\mu(x) = U_\mu^{\text{mod}}(x)U_\mu^{\text{mon}}(x), \quad (1)$$

где  $U_\mu^{\text{mon}}(x)$  – компонента калибровочного поля, создаваемая абелевыми монополями (определение будет дано позже) и  $U_\mu^{\text{mod}}(x)$  – соответственно, компонента без монополей, которую мы называем модифицированным калибровочным полем. Под модификацией мы понимаем удаление абелевых монополей.

Этот вид разложения изучался ранее в  $SU(2)$  глюодинамике в работе [1]. Было показано, что в то время как монополярная компонента  $U_\mu^{\text{mon}}(x)$  воспроизводит линейную часть статического потенциала, безмонополярная компонента  $U_\mu^{\text{mod}}(x)$  создает чисто кулоновский потенциал, и их сумма обеспечивает хорошее приближение исходного статического потенциала на всех расстояниях:

$$V(R) \approx V_{\text{mod}}(R) + V_{\text{mon}}(R). \quad (2)$$

Недавно в работе [2] было показано, что это приближение становится лучше, когда шаг решетки уменьшается, указывая на возможность того, что соотношение (2) становится точным в континуальном пределе. Также было показано, что (2) удовлетворяется и в  $SU(2)$  КХД. В настоящей работе мы расширяем исследование разложения (1) на более реалистичный случай –  $SU(3)$  глюодинамику.

Хорошо известно [3–7], что после выполнения абелевой проекции в МАК [8, 9], абелево натяжение струны, полученное из абелева статического потен-

циала очень близко к неабелеву натяжению струны. Это наблюдение, подтвержденное в глюодинамике и в КХД, подтверждает концепцию абелевой доминантности (обзор см., например, [10–12]). Далее было обнаружено [5, 13, 14], что так называемый монополярный статический потенциал также имеет натяжение струны, близкое к неабелеву. Эти наблюдения согласуются с предположением, что монополярные степени свободы ответственны за конфайнмент [15, 16].

Интересный вопрос заключается в том, какова роль других, т.е. безмонополярных, степеней свободы. Результаты, полученные в  $SU(2)$  глюодинамике, позволяют предположить, что они ответственны за кулоновскую часть статического потенциала как на малых, так и на больших расстояниях. Это говорит о том, что если на малых расстояниях  $U_\mu^{\text{mod}}(x)$  дает пертурбативный вклад в статический потенциал, то на больших расстояниях он дает непертурбативный вклад.

Следует отметить, что калибровочно ковариантное разложение было введено в работах [17] и [18] и развито далее в работах [19–24], см. обзор [25]. Численные результаты, демонстрирующие аналоги абелевой доминантности и монополярной доминантности в рамках этого подхода были получены в [26]. Было бы интересно проверить, работает ли разложение на монополярные и безмонополярные компоненты в этом подходе.

Разложение, отличное от уравнения (1), было рассмотрено в  $SU(3)$  глюодинамике после фиксации МАК [7]. Использовалось обычное разложение калибровочного поля на абелевы и недиагональные компоненты:

<sup>1)</sup>e-mail: vitaly.borniyakov@ihep.ru

$$U_\mu(x) = U_\mu^{\text{offd}}(x)U_\mu^{\text{Abel}}(x) \quad (3)$$

и было проверено соответствующее разложение для статического потенциала:

$$V(R) \approx V_{\text{offd}}(R) + V_{\text{Abel}}(R). \quad (4)$$

Мы сравним наши результаты для декомпозиции (4) с результатами из работы [7] в разделе 3.

Разложение, подобное (2) для статического потенциала в максимальной центральной калибровке,

$$V(R) \approx V_{\text{cent}}(R) + V_{\text{mod,cent}}(R), \quad (5)$$

соответствующее разложению калибровочного поля на центральную и модифицированную (безвихревую) компоненты:

$$U_\mu(x) = U_\mu^{\text{mod,cent}}(x)U_\mu^{\text{cent}}(x), \quad (6)$$

было впервые проверено в решеточной  $SU(2)$  глюодинамике [1] и недавно изучено в решеточной КХД [27]. Мы прокомментируем эти численные результаты позже в разделе 3.

**2. Декомпозиция калибровочного поля.** Мы рассматриваем решеточную  $SU(3)$  глюодинамику после фиксации МАК. Мы используем определение МАК, введенное для решеточной  $SU(N)$  теории в [28] и позже уточненное для  $SU(3)$  группы в [29]. МАК фиксируется путем максимизации функционала

$$F = \frac{1}{8V} \sum_{x,\mu} \left[ |U_\mu^{(11)}(x)|^2 + |U_\mu^{(22)}(x)|^2 + |U_\mu^{(33)}(x)|^2 - 1 \right] \quad (7)$$

относительно локальных калибровочных преобразований  $g(x)$  решеточного калибровочного поля,

$$U_\mu(x) \rightarrow U_\mu^g(x) = g(x)^\dagger U_\mu(x) g(x + \hat{\mu}). \quad (8)$$

Для фиксации калибровки был использован алгоритм имитированного отжига с тремя случайными калибровочными копиями. Этот алгоритм был впервые использован для фиксации МАК в случае  $SU(2)$  глюодинамики [5] и затем был распространен на  $SU(3)$  группу в [30]. Детали реализации алгоритма имитированного отжига в случае калибровочной группы  $SU(3)$  можно найти в работе [31]. Для функционала  $F$  мы получили среднее значение  $\langle F \rangle = 0.73388(1)$ , которое можно сравнить со значением  $\langle F \rangle = 0.7322(2)$ , приведенным в [7, 32]. Чем больше значение максимизированного функционала, тем лучше фиксация калибровки. Разница в  $\langle F \rangle$  обусловлена эффектами грибовских копий и подразумевает, что различие между нашими результатами и

результатами из работы [7] для калибровочно зависимых величин, таких как абелево натяжение струны, может быть существенным, как подробно обсуждается в [31].

Абелева проекция означает разложение (3) неабелева решеточного калибровочного поля  $U_\mu(x) \in SU(3)$  на абелево поле  $U_\mu^{\text{Abel}}(x) \in U(1) \times U(1)$  и неабелево поле  $U_\mu^{\text{offd}}(x) \in SU(3)/U(1) \times U(1)$ . Абелево поле  $U_\mu^{\text{Abel}}(x)$  определяется как

$$U_\mu^{\text{Abel}}(x) = \text{diag} \left( u_\mu^{(1)}(x), u_\mu^{(2)}(x), u_\mu^{(3)}(x) \right), \quad (9)$$

где

$$u_\mu^{(a)}(x) = e^{i\theta_\mu^{(a)}(x)} \quad (10)$$

с

$$\theta_\mu^{(a)}(x) = \arg \left( U_\mu(x) \right)_a - \frac{1}{3} \sum_{b=1}^3 \arg \left( U_\mu(x) \right)_b \Big|_{\text{mod } 2\pi} \quad (11)$$

такой, что

$$\theta_\mu^{(a)}(x) \in \left[ -\frac{4}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi \right]. \quad (12)$$

Это определение абелевой проекции  $u_\mu(x)$  максимизирует выражение  $|\text{Tr} (U_\mu^\dagger(x) u_\mu(x))|^2$  [33]. Абелевы калибровочные поля, в свою очередь, могут быть разложены на монопольную (сингулярную) и фотонную (обычную) компоненты:

$$\theta_\mu^{(a)}(x) = \theta_\mu^{(a)\text{mon}}(x) + \theta_\mu^{(a)ph}(x). \quad (13)$$

Монопольная компонента определяется следующим образом [34]:

$$\theta_\mu^{(a)\text{mon}}(x) = 2\pi \sum_y D(x-y) \partial_\alpha^- m_{\alpha\mu}^{(a)}(y), \quad (14)$$

где целые числа  $m_{\mu\nu}^{(a)}(x)$  обозначают сингулярную часть абелевого плакета (дираковский плакет),  $\partial_\alpha^-$  – обратная решеточная производная, а  $D(x)$  обозначает решеточный кулоновский пропагатор. Тогда  $U_\mu^{\text{mon}}(x)$ , введенная в (1), определяется как

$$U_\mu^{\text{mon}}(x) = \text{diag} \left( e^{i\theta_\mu^{(1)\text{mon}}(x)}, e^{i\theta_\mu^{(2)\text{mon}}(x)}, e^{i\theta_\mu^{(3)\text{mon}}(x)} \right). \quad (15)$$

**3. Декомпозиция статического потенциала.** Мы вычислили  $R \times T$  прямоугольные вильсоновские петли  $W(R, T)$ ,  $W_{\text{mon}}(R, T)$  и  $W_{\text{mod}}(R, T)$  с использованием решеточных калибровочных полей  $U_\mu(x)$ ,  $U_\mu^{\text{mon}}(x)$ ,  $U_\mu^{\text{mod}}(x)$ , введенных выше. Для вычисления соответствующих статических потенциалов  $V(R)$ ,  $V_{\text{mon}}(R)$  и  $V_{\text{mod}}(R)$  была использована

процедура сглаживания [35]. Вычисления проводились с решеточным действием Вильсона при  $\beta = 6.0$  на решетках  $24^4$  с использованием 5000 статистически независимых конфигураций решеточного калибровочного поля. Шаг решетки при таком значении голой константы связи определяется значением  $a/r_0 = 0.186(4)$  [36], где  $r_0 = 0.5 \Phi\text{М}$  называется параметром Зоммера. На рисунке 1 и в табл. 1

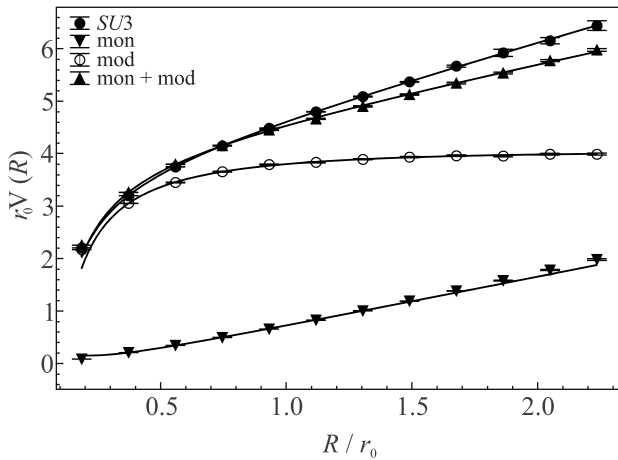


Рис. 1. Сравнение неабелевого потенциала  $V(R)$  (заполненные кружки) с суммой  $V_{\text{mod}}(R) + V_{\text{mon}}(R)$  (заполненные треугольники) для  $\beta = 6.0$ .  $V_{\text{mod}}(r)$  (пустые кружки) и  $V_{\text{mon}}(r)$  (заполненные перевернутые треугольники) также изображены. Сплошные кривые показывают подгонку к корнелльскому потенциалу  $V_0 + \alpha/R + \sigma R$

**Таблица 1.** Параметры потенциала, полученные фитированием функцией  $V_0 + \alpha/R + \sigma R$

Потенциал	$\sigma r_0^2$	$\alpha$	$r_0 V_0$
$V(R)$	1.34(2)	-0.34(1)	3.61(2)
$V_{\text{mon}}(R)$	0.99(1)	0.09(1)	-0.36(2)
$V_{\text{mod}}(R)$	0	-0.42(1)	4.22(1)
$V_{\text{mon}}(R) + V_{\text{mod}}(R)$	0.94(1)	-0.39(1)	3.98(2)

представлены наши результаты. Видно, что аналогично  $SU(2)$  глюодинамике [2], монополярный потенциал  $V_{\text{mon}}(R)$  почти идеально линейный с небольшой кривизной на малых расстояниях, в то время как модифицированный потенциал  $V_{\text{mod}}(R)$  хорошо описывается кулоновским потенциалом. Также видно, что соотношение (2) справедливо на всех расстояниях с наиболее существенным расхождением около 10% на больших расстояниях. Очевидно, что это расхождение в основном связано с довольно низким наклоном  $V_{\text{mon}}(R)$ . Как мы уже упоминали, в  $SU(2)$  глюодинамике было обнаружено, что с уменьшением шага

решетки согласие в (2) улучшается существенно. В будущем это следует проверить в  $SU(3)$  глюодинамике.

Далее мы переходим к нашим результатам для разложения (4), предложенного в работе [7]. Эти результаты представлены на рис. 2. На этом рисунке

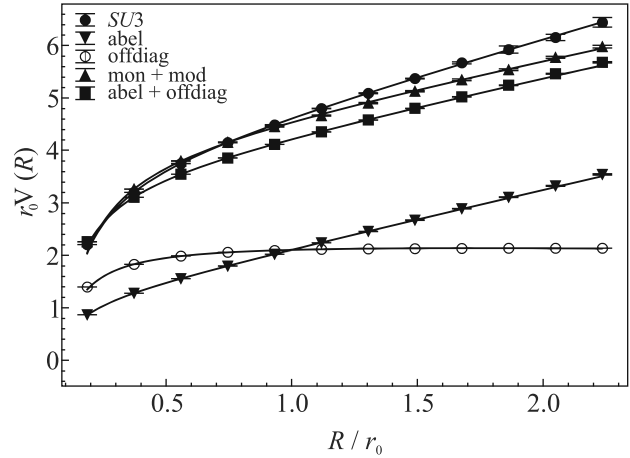


Рис. 2. Сравнение неабелева потенциала  $V(R)$  (заполненные кружки) с суммой  $V_{\text{mod}}(R) + V_{\text{mon}}(R)$  (заполненные треугольники) и суммой  $V_{\text{Abel}}(R) + V_{\text{offd}}(R)$  (заполненные квадраты). Также изображены  $V_{\text{offd}}(r)$  (заполненные перевернутые треугольники) и  $V_{\text{Abel}}(r)$  (пустые кружки). Сплошные кривые показывают подгонку к корнелльскому потенциалу

мы сравниваем исходный потенциал  $V(R)$  с разложениями (2) и (4). Можно видеть, что разложение (2) явно работает лучше. Оба разложения должны быть проверены в пределе нулевого шага решетки. В любом случае, наши результаты явно противоречат заключению, сделанному в работе [7], что разложение (4) удовлетворяется очень хорошо уже при  $\beta = 6.0$ . Сравнивая наши результаты, представленные в данной работе, с результатами, полученными на решетках  $16^4$ , мы обнаружили, что эффекты конечного объема малы и не могут быть причиной отличия наших результатов от результатов работы [7]. Следует отметить, что в работе [7] использовалась несколько иная процедура абелевой проекции, но, как утверждалось в работе [37], различия между этими двумя процедурами абелевой проекции пренебрежимо малы. Таким образом, мы понимаем, что причиной полученного расхождения с результатами работы [7] является разница в качестве фиксации калибровки. В прошлом было показано, что эффекты грибовских копий для калибровочно инвариантных величин могут быть весьма существенными [31, 37].

Далее мы хотим сделать замечание о декомпозиции (5). Впервые это соотношение было изучено в [1] с использованием прямой центральной калибровки в  $SU(2)$  глюодинамике. Был сделан вывод, что это разложение выполняется с существенно меньшей точностью, чем разложение (2), прежде всего, из-за малого значения натяжения струны, обеспечиваемого центральной вихревой компонентой. Для решения проблемы низкого натяжения струны, полученного после центральной проекции, был сформулирован новый подход к определению центральной калибровки и успешно применен к  $SU(2)$  глюодинамике в работе [38]. Недавно это разложение было изучено в решеточной КХД с легкими кварками [27]. Было обнаружено, что в этой теории натяжение струны в центральной проекции находится в очень хорошем согласии с физическим натяжением струны. С другой стороны, модифицированная компонента  $U_{\mu}^{\text{mod,cent}}(x)$  создает статический потенциал, который не совместим с кулоновским потенциалом. Таким образом, разложение (5) не работает на малых расстояниях.

**4. Выводы.** Есть несколько предложений по разложению калибровочного поля на компоненты, описывающие (в основном) либо инфракрасную, либо ультрафиолетовую физику. К ним относятся калибровочно ковариантная декомпозиция Чо [17–24], два разложения в МАК – уравнения (1) и (3) и одно разложение в максимальной центральной калибровке (6). В этой работе мы расширили наше исследование разложения в МАК на монополярную и модифицированную (безмонополярную) компоненты в  $SU(2)$  глюодинамике и  $SU(2)$  КХД [2] на случай  $SU(3)$  глюодинамики. Мы представили наши результаты для одного значения шага решетки, чтобы продемонстрировать, что разложение работает достаточно хорошо. Наши результаты, полученные в [2] для  $SU(2)$  глюодинамики, дают надежду, что разложение (1) будет работать еще лучше, когда шаг решетки будет уменьшен.

Наши результаты для другого разложения в МАК, (3), противоречат результатам из работы [7] и также показывают, что разложение (1) работает лучше. Есть еще одна причина считать разложение (1) лучше мотивированным физически, чем разложение (3). Разложение (1) отделяет монополярную компоненту  $U_{\mu}^{\text{mon}}(x)$ , которая отвечает за линейную часть статического потенциала, а также за нарушение киральной симметрии. Модифицированная (безмонополярная) компонента  $U_{\mu}^{\text{mod}}(x)$  дает чисто кулоновский потенциал, который согласуется с исходной кулоновской частью как на малых, так и на больших

расстояниях. В то же время в разложении (3) кулоновская часть распределяется неестественным образом между двумя компонентами: абелевой и недиагональной.

Очевидно, что изучение обоих разложений для разных значений шага решетки необходимо для того, чтобы понять их судьбу в пределе нулевого шага решетки (континуальном пределе). Это тема нашей будущей работы.

Компьютерное моделирование проводилось на Центральном Linux-кластере Федерального государственного бюджетного учреждения Институт физики высоких энергий имени А.А. Логунова Национального исследовательского центра “Курчатовский институт” (Протвино) и Linux-кластере Курчатовского комплекса теоретической и экспериментальной физики Национального исследовательского центра “Курчатовский институт” (Москва).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант # 20-02-00737 А.

1. V. G. Bornyakov, M. I. Polikarpov, G. Schierholz, T. Suzuki, and S. N. Syritsyn, Nucl. Phys. B Proc. Suppl. **153**, 25 (2006); arXiv:hep-lat/0512003 [hep-lat].
2. V. G. Bornyakov, I. Kudrov, and R. N. Rogalyov, Phys. Rev. D **105**(5), 054519 (2022); arXiv:2101.04196 [hep-lat].
3. T. Suzuki and I. Yotsuyanagi, Phys. Rev. D **42**, 4257 (1990).
4. S. Hioki, S. Kitahara, S. Kiura, Y. Matsubara, O. Miyamura, S. Ohno, and T. Suzuki, Phys. Lett. B **272**, 326 (1991); Erratum *ibid.*: Phys. Lett. B **281**, 416 (1992).
5. G. S. Bali, V. Bornyakov, M. Muller-Preussker, and K. Schilling, Phys. Rev. D **54** (1996) 2863.
6. V. Bornyakov and M. Muller-Preussker, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **106**, 646 (2002).
7. N. Sakumichi and H. Suganuma, Phys. Rev. D **90**(11), 111501 (2014).
8. A. S. Kronfeld, M. L. Laursen, G. Schierholz, and U. J. Wiese, Phys. Lett. B **198**, 516 (1987).
9. G. 't Hooft, Nucl. Phys. B **190**, 455 (1981).
10. M. N. Chernodub and M. I. Polikarpov, in *Confinement, Duality and Non-perturbative Aspects of QCD*, Plenum Press, Cambridge (1998), p. 387; hep-th/9710205.
11. R. W. Haymaker, Phys. Rept. **315**, 153 (1999).
12. J. Greensite, Prog. Part. Nucl. Phys. **51**, 1 (2003).
13. H. Shiba and T. Suzuki, Phys. Lett. B **333**, 461 (1994).
14. J. D. Stack, S. D. Neiman, and R. J. Wensley, Phys. Rev. D **50**, 3399 (1994).

15. G. 't Hooft, in *High Energy Physics*, ed. by A. Zichichi, EPS International Conference, Palermo (1975).
16. S. Mandelstam, *Phys. Rep.* **23**, 245 (1976).
17. Y.M. Cho, *Phys. Rev. D* **21**, 1080 (1980); doi:10.1103/PhysRevD.21.1080.
18. Y.S. Duan and M.L. Ge, *Sinica Sci.* **11**, 1072 (1979).
19. L. Faddeev and A.J. Niemi, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 1624 (1999).
20. L.D. Faddeev and A.J. Niemi, *Nucl. Phys. B* **776**, 38 (2007).
21. S.V. Shabanov, *Phys. Lett. B* **458**, 322 (1999).
22. S.V. Shabanov, *Phys. Lett. B* **463**, 263 (1999).
23. K.I. Kondo, T. Murakami, and T. Shinohara, *Prog. Theor. Phys.* **115**, 201 (2006).
24. S. Kato, K.I. Kondo, T. Murakami, A. Shibata, T. Shinohara, and S. Ito, *Phys. Lett. B* **632**, 326 (2006).
25. K.I. Kondo, S. Kato, A. Shibata, and T. Shinohara, *Phys. Rept.* **579**, 1 (2015).
26. S. Kato, K.I. Kondo, and A. Shibata, *Phys. Rev. D* **91**(3), 034506 (2015).
27. J.C. Biddle, W. Kamleh, and D.B. Leinweber, *Phys. Rev. D* **106**(5), 054505 (2022); doi:10.1103/PhysRevD.106.054505; arXiv:2206.00844 [hep-lat].
28. A.S. Kronfeld, G. Schierholz, and U.J. Wiese, *Nucl. Phys. B* **293**, 461 (1987).
29. F. Brandstater, U.J. Wiese, and G. Schierholz, *Phys. Lett. B* **272**, 319 (1991).
30. V. Bornyakov, G. Schierholz, and T. Streuer, *Nucl. Phys. B Proc. Suppl.* **106**, 676 (2002); doi:10.1016/S0920-5632(01)01813-8; arXiv:hep-lat/0111018 [hep-lat].
31. V.G. Bornyakov, H. Ichie, Y. Koma, Y. Mori, Y. Nakamura, D. Pleiter, M.I. Polikarpov, G. Schierholz, T. Streuer, H. Stüben, and T. Suzuki, *Phys. Rev. D* **70**, 074511 (2004); doi:10.1103/PhysRevD.70.074511; arXiv:hep-lat/0310011 [hep-lat].
32. H. Ohata and H. Suganuma, *Phys. Rev. D* **102**(1), 014512 (2020).
33. V.G. Bornyakov, M.N. Chernodub, H. Ichie, Y. Koma, Y. Mori, Y. Nakamura, M.I. Polikarpov, G. Schierholz, A.A. Slavnov, H. Stüben, T. Suzuki, P.V. Uvarov, and A.I. Veselov, *Phys. Rev. D* **71**, 114504 (2005); doi:10.1103/PhysRevD.71.114504; arXiv:hep-lat/0401014 [hep-lat].
34. J. Smit and A. van der Sijs, *Nucl. Phys. B* **355**, 603 (1991).
35. M. Albanese, F. Costantini, G. Fiorentini et al. (APE), *Phys. Lett. B* **192**, 163 (1987).
36. S. Necco and R. Sommer, *Nucl. Phys. B* **622**, 328 (2002).
37. J.D. Stack, W.W. Tucker, and R.J. Wensley, *Nucl. Phys. B* **639**, 203 (2002); doi:10.1016/S0550-3213(02)00537-0; arXiv:hep-lat/0110196 [hep-lat].
38. R. Golubich and M. Faber, *Particles* **3**(2), 444 (2020).