Письма в ЖЭТФ, том 117, вып. 4, с. 319 – 320

Совместная система уравнений для супералгебры $\mathfrak{gl}(n|m)$ и интегрируемая модель Калоджеро–Мозера[1)]

Е. Доценко[2)]

Национальный исследовательский центр "Курчатовский институт", 123182 Москва, Россия

Факультет математики, Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики", 119048 Москва, Россия

Поступила в редакцию 9 декабря 2022 г.
После переработки 5 января 2023 г.
Принята к публикации 8 января 2023 г.

В письме определяется совместная система уравнений, построенная по супералгебре $\mathfrak{gl}(n|m)$, также устанавливается связь этой системы уравнений с интегрируемой системой частиц Калоджеро–Мозера.

DOI: 10.31857/S1234567823040122, EDN: pjszqw

Совместные системы дифференциальных уравнений возникают естественным образом в разных областях физики и математики. Монодромия совместных систем с одной стороны выделена тем, что она не зависит от небольших деформаций контура, вдоль которого она была вычислена, с другой стороны, сама матрица монодромии – это очень интересный объект. В этой связи очень важный пример был предложен Аароновым и Бомом [1], о набеге фазы электрона в нулевом магнитном поле вне цилиндрической области (недоступной для электрона), но с нетривиальным векторным потенциалом.

В современной теоретической/математической физике классическая ситуация, в которой возникают совместные системы уравнений – двумерная конформная теория поля, в частности, в модели Весса–Зумино–Новикова–Виттена корреляторы вершинных операторов удовлетворяют системе уравнений Книжника–Замолодчикова [2] (КЗ). Благодаря работам Мацуо [3] и Чередника [4] известно, что уравнения КЗ тесно связаны с системой Калоджеро–Мозера. Также известно, что у уравнений КЗ имеется близкий родственник – связность Казимира, открытая Де-Кончини, Миллсоном и Толедано–Ларедо [5]. Казимировская связность опредляется тем, что коммутирует с уравнениями КЗ. Текущая заметка посвящена определению связности Казимира для $\mathfrak{gl}(n|m)$ супералгебры и установлению соответствия Мацуо–Чередника в этом случае.

Некоторые сведения о $\mathfrak{gl}(n|m)$. Здесь мы приводим кратко основную информацию о $\mathfrak{gl}(n|m)$ супералгебре.

Пусть $\mathcal{J} = \{1, \dots n+m\}$ и пусть $p : \mathcal{J} \to \{0, 1\}$

$$\begin{cases} p(a) = 0,\ a \le n \text{ (бозоны)}, \\ p(a) = 1,\ a > n \text{ (фермионы)}. \end{cases} \tag{1}$$

Алгебра $\mathfrak{gl}(n|m)$ порождена e_{ab}, где $a, b \in \mathcal{J}$ со следующими соотношениями

$$e_{ab}e_{cd} - (-1)^{p(e_{ab})p(e_{cd})}e_{cd}e_{ab} = \\ = \delta_{bc}e_{ad} - (-1)^{p(e_{ab})p(e_{cd})}\delta_{da}e_{cb}, \tag{2}$$

где

$$p(e_{ab}) = p(a) + p(b) \bmod 2. \tag{3}$$

Тензоное $\otimes$ произведение представлений супералгебр определено так, что для операторов, собственных для оператора четности, и действующих нетривиально только в i^{th} и в j^{th} тензорном сомножителе выполнено следующее

$$A^{(i)}B^{(j)} = (-1)^{p(A)p(B)}B^{(j)}A^{(i)}. \tag{4}$$

В $\mathbb{C}^{n|m}$ имеется базис e_a, что $e_{ab}(e_c) = \delta_{bc}e_a$, означает что e_{ab} – матричные единицы.

Пусть $x, y \in \mathbb{C}^{n|m}$ с определенными $p(x)$ и $p(y)$, тогда градуированная перестановка действует следующим образом:

$$P_{12}\,(x \otimes y) = (-1)^{p(x)p(y)}y \otimes x. \tag{5}$$

Совместная система уравнений. Уравнения КЗ на функцию $|\Psi\rangle$, принимающую значения в

[1)]См. дополнительный материал к данной статье на сайте нашего журнала www.jetpletters.ac.ru.

[2)]e-mail: edotsenko95@gmail.com

$V = \bigotimes_{i=1}^{k} \mathbb{C}^{n|m}$, где $\mathbb{C}^{n|m}$ – векторное представление $\mathfrak{gl}(n|m)$ имеют вид

$$\left(\kappa\partial_{z_i} - \sum_c \lambda_c e_{cc}^{(i)} - \sum_{j,\neq i} \frac{P_{ij}}{z_i - z_j}\right)|\Psi\rangle = 0, \quad (6)$$

где градуированная перестановка $P_{ij} = \sum_{a,b}(-1)^{p(b)} e_{ab}^{(i)} e_{ba}^{(j)}$ и $p(a)$ – функция четности, опеределенная в Дополнительных материалах. $e_{ab}^{(j)}$ – генератор $\mathfrak{gl}(n|m)$, который нетривиально действует только в $i^{\text{том}}$ тензоном сомножителе V как матричная единица в некотором базисе (см. Дополнительные материалы).

Одно из центральных утверждений настоящего письма состоит в том, что *следующая система уравнений совместна и коммутирует с* (6)

$$\left(\kappa\partial_a - \sum_j z_j e_{aa}^{(j)} - \sum_{b,\neq a}(-1)^{p(b)} \frac{E_{ab}E_{ba} - E_{aa}}{\lambda_a - \lambda_b}\right)|\Psi\rangle = 0, \quad (7)$$

где $E_{ab} = \sum_{j=1}^{k} e_{ab}^{(j)}$. Проверка этого утверждения приведена в Дополнительном материале.

Соответствие Мацуо–Чередника. В этом разделе мы зафиксируем $k = n + m$ в определении V.

Следующие ковекторы, построенные в [6], необходимы, чтобы установить соотвествие Мацуо–Чередника для уравнений (7)

$$\langle\Omega^0| = \sum_{\sigma\in S_{n+m}} \langle e_1 \otimes \ldots \otimes e_{n+m}|P_\sigma, \quad (8a)$$

$$\langle\Omega^1| = \sum_{\sigma\in S_{n+m}} \langle e_1 \otimes \ldots \otimes e_{n+m}|(-1)^{sgn(\sigma)}P_\sigma, \quad (8b)$$

где $P_\sigma = P_{s_{i_1}} \ldots P_{s_{i_l}}$, где $P_{s_{i_j}}$ – это перестановка, которая отвечает транспозиции s_{i_j} и $\sigma = s_{i_1}s_{i_2}\ldots s_{i_l}$ – некоторое разложение перестановки в произведение транспозиций. Так как $P_{s_{i_j}}$ удовлетворяет соотношениям в группе кос, то элемент P_σ корректно определен.

Проверим, что ковектора (8a) и (8b) являются собственными векторами для следующих операторов

$$\langle\Omega^i|(E_{ab}E_{ba} - E_{aa}) = (-1)^{p(b)+i}\langle\Omega^i|, \quad (9)$$

где $i = 0, 1$.

Для проверки можно рассмотреть векторы $|\Omega^i\rangle$ и доказать для них аналогичные свойства. Простое вычисление показывает, что

$$(E_{ab}E_{ba} - E_{aa})\,|e_1 \otimes \ldots \otimes e_{n+m}\rangle = \\ = (-1)^{p(b)}P_{ab}|e_1 \otimes \ldots \otimes e_{n+m}\rangle. \quad (10)$$

Симметризуя или кососимметризуя правую часть (10), мы неизбежно получаем (9).

Легко видеть, что уравнения КЗ и Динамические уравнения коммутируют с операторами E_{aa}, поэтому можно на решенение наложить следующее условие:

$$E_{aa}|\Psi\rangle = |\Psi\rangle. \quad (11)$$

Тогда для таких решений выполнено следующее

$$\left(\kappa^2 \sum_{a=1}^{m+n} \partial_{z_a}^2 + \sum_{a\neq b} \frac{(-1)^i\kappa - 1}{(z_a - z_b)^2}\right)\langle\Omega^i|\Psi\rangle = \\ = \left(\sum_{a=1}^{n+m} \lambda_a^2\right)\langle\Omega^i|\Psi\rangle, \quad (12a)$$

$$\left(\kappa^2 \sum_{a=1}^{m+n} \partial_{\lambda_a}^2 + \sum_{a\neq b} \frac{(-1)^i\kappa - 1}{(\lambda_a - \lambda_b)^2}\right)\langle\Omega^i|\Psi\rangle = \\ = \left(\sum_{a=1}^{n+m} z_a^2\right)\langle\Omega^i|\Psi\rangle, \quad (12b)$$

где $i = 0, 1$.

(12a) было доказано в [6], таким образом нам требуется доказать вторoе. Пусть D_a есть a-инфинитиземальный оператор (тот, что стоит в скобках в формуле (7)). Основное утверждение состоит в том, что

$$0 = \langle\Omega^i|\sum_{a=1}^{n} D_a^2|\Psi\rangle = \\ = \left(\kappa^2 \sum_{a=1}^{m+n} \partial_{\lambda_a}^2 + \sum_{a\neq b} \frac{(-1)^i\kappa - 1}{(\lambda_a - \lambda_b)^2}\right)\langle\Omega^i|\Psi\rangle - \\ - \left(\sum_{a=1}^{n+m} z_a^2\right)\langle\Omega^i|\Psi\rangle. \quad (13)$$

Подробности, связанные с этим вычислением, приведены в Дополнительных материалах.

1. Y. Aharonov and D. Bohm, Phys. Rev. **115**, 485 (1959).
2. V. G. Knizhnik and A. B. Zamolodchikov, Nucl. Phys. B **247**(1), 83 (1984).
3. A. Matsuo, Invent. Math. **110**, 95 (1992).
4. I. Cherednik, Adv. Math. **106**, 65 (1994).
5. V. T. Laredo, J. Algebra **329**(1), 286 (2011).
6. A. Grekov, A. Zabrodin, and A. Zotov, Nucl. Phys. B **939**, 174 (2019).