

# Релятивистская туннельная ионизация в скрещенных лазерных пучках петаваттной мощности

С. В. Попруженко<sup>1)</sup>

Институт общей физики им. А. М. Прохорова РАН, 119991 Москва, Россия

Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ, 115409 Москва, Россия

Поступила в редакцию 5 декабря 2022 г.

После переработки 5 января 2023 г.

Принята к публикации 9 января 2023 г.

Предложена схема двухпучкового эксперимента на лазерных установках мульти-петаваттной мощности, направленного на поиск релятивистских эффектов при туннелировании электронов из глубоких уровней многозарядных ионов. Показано, что наиболее эффективно релятивистская ионизация будет происходить в поле стоячей волны, возникающей при встречном распространении пучков. Приведены оценки, показывающие, что наблюдение релятивистских эффектов при ионизации  $s$ -состояний водородоподобных ионов с зарядом  $Z = 80–90$  потенциально возможно при интенсивности лазерного излучения в области перекрытия пучков  $\simeq 10^{25}$  Вт/см<sup>2</sup>.

DOI: 10.31857/S1234567823040067, EDN: pipiv

Многофотонная и туннельная ионизация атомов и молекул в интенсивном лазерном поле экспериментально наблюдается с середины 1960-х гг. [1]. Вскоре после открытия многофотонного поглощения мощного лазерного излучения был обнаружен существенно нелинейный режим взаимодействия, при котором в каждом акте ионизации участвует число фотонов, большее минимально необходимого для перехода в континуум [2]. Теория нелинейной ионизации в поле плоской электромагнитной волны была сформулирована в работах [3–6], в которых получены аналитические формулы для скорости ионизации и импульсных распределений фотоэлектронов в приближении сильного поля, когда кулоновское взаимодействие вылетающего электрона с атомным остатком не учитывается. Кулоновский фактор в скорости ионизации был найден в работе [7] в пределе медленно меняющегося поля, а затем [8] для поля произвольной частоты. Результаты, полученные в пионерских работах [3–7], получили в последующие десятилетия значительное развитие, и в настоящее время теория нелинейной ионизации атомов и молекул широко применяется для описания эффектов взаимодействия мощного лазерного излучения с веществом. Современное состояние теории многофотонной и туннельной ионизации атомных систем в сильных полях изложено в обзорах [9–14].

По мере роста максимальной интенсивности лазерного излучения актуальным становится исследование ионизации глубоких уровней тяжелых атомов и многозарядных ионов. Такие процессы интересны, например, с точки зрения их возможного использования для прямого измерения интенсивности лазерного излучения в фокусе (см. работы [15–17] и ссылки в них). Кроме того, фундаментальный интерес представляет возможность наблюдения релятивистских эффектов в ионизации. Движение фотоэлектрона в лазерном поле становится релятивистским при

$$a_0 = \frac{eE_0}{mc\omega} > 1. \quad (1)$$

Здесь  $E_0$  и  $\omega$  – амплитуда и частота лазерной волны,  $m$  и  $e$  – масса электрона и абсолютная величина его заряда соответственно,  $c$  – скорость света. Далее в работе используются атомные единицы  $e = m = \hbar = 1$ , в которых  $c = 137$ . Для инфракрасных лазеров с длиной волны  $\lambda \approx 1$  мкм и  $\omega \approx 0.045$  этот релятивистский порог достигается при  $J \approx 2 \cdot 10^{18}$  Вт/см<sup>2</sup>. Кинематические эффекты в спектрах фотоэлектронов и порождаемого ими излучения, хорошо изучены (см., например, работы [18–20] и ссылки в них). При интенсивностях  $J \simeq 10^{18} – 10^{21}$  Вт/см<sup>2</sup>, доступных в настоящее время на многих лазерных установках, фотоэлектрон быстро становится релятивистским после ионизации, однако сам процесс его отрыва от атома определяется законами нерелятивистской квантовой механики, и скорости ионизации мо-

<sup>1)</sup>e-mail: sergey.popruzenko@gmail.com

гут с высокой точностью вычисляться по формулам из [3, 5–7]. Это затягивание применимости нерелятивистской теории в область ультрарелятивистских интенсивностей связано в основном с тем, что энергии связи уровней, ионизируемых в таких полях, все еще малы по сравнению с энергией покоя электрона. В результате релятивистские поправки к подбарьерной траектории электрона и связанные с ними поправки к вероятности ионизации остаются малыми даже при интенсивностях  $J \simeq 10^{23}$  Вт/см<sup>2</sup>.

При интенсивностях  $J > 10^{23}$  Вт/см<sup>2</sup>, достижение которых становится возможным сейчас или ожидается в ближайшие годы на новых лазерных установках мульти-петаваттной мощности [21–24], вероятность отрыва электрона от атома начнет определяться не только электрическим, но и магнитным полем лазерной волны, а релятивистские поправки к траектории электрона становятся существенными в процессе перехода из связанного состояния в континуум. Качественный характер протекания этого перехода определяется величиной параметра Келдыша [3]

$$\gamma = \frac{\sqrt{2I_p}\omega}{E_0}. \quad (2)$$

При  $\gamma \gg 1$  ионизация носит характер многофотонного поглощения, а в обратном пределе  $\gamma \ll 1$  может быть описана как туннелирование сквозь медленно меняющийся потенциальный барьер. С ростом интенсивности волны  $J \sim E_0^2$  эффективное значение параметра Келдыша  $\gamma_*$ , при достижении которого происходит быстрая ионизация уровня, уменьшается как  $\gamma_* \sim E_0^{-2/3}$ . Для лазеров с длиной волны  $\lambda \approx 1$  мкм и атомов в основном состоянии туннельный режим достигается, начиная примерно с  $J \approx 5 \cdot 10^{14}$  Вт/см<sup>2</sup>. Таким образом, при рекордных значениях интенсивностей  $> 10^{23}$  Вт/см<sup>2</sup>, рассматриваемых в настоящей работе, ионизация происходит в глубоком туннельном режиме,  $\gamma \simeq 10^{-2} - 10^{-3}$ , что позволяет с очень высокой точностью использовать для расчета вероятности ионизации приближение постоянного поля. В настоящее время впервые возникают условия для экспериментального наблюдения релятивистского туннельного эффекта в атомах.

Теория ионизации атомов в полях релятивистской интенсивности, определяемых условием (1), впервые была сформулирована в [4]. Релятивистский туннельный эффект был теоретически исследован в работах [25, 26], а также в ряде других, более поздних (см. обзоры [13, 27] и ссылки в них). В этих работах показано, что вероятность ионизации глубоко лежащего атомного уровня, энергия которого определяется с учетом релятивистских поправок, может

значительно, на несколько порядков величины, отличаться от таковой, рассчитанной по нерелятивистским формулам [5–7]. Отношение скоростей ионизации, рассчитанных по нерелятивистским и релятивистским формулам, может быть как больше, так и меньше единицы [9]. В недавней работе [28] этот вопрос был исследован более подробно, и было показано, что влияние магнитного поля на вероятность туннелирования в тяжелых ионах, связанное с зеемановским расщеплением уровней, можно будет обнаружить при интенсивностях  $J > 2 \cdot 10^{23}$  Вт/см<sup>2</sup>. Для обнаружения эффектов, связанных с релятивистскими поправками к подбарьерному движению электрона, необходимы еще большие интенсивности, превосходящие  $10^{24}$  Вт/см<sup>2</sup>. Достижение таких интенсивностей станет возможным, в частности, при сложении в фокальной области нескольких лазерных пучков мульти-петаваттной мощности. Такую схему получения экстремальных световых полей предполагается реализовать на строящейся установке XCELS [21] с максимальным числом пучков 12 при мощности в 15 ПВт в каждом пучке. В электромагнитном поле, возникающем при пересечении лазерных пучков, электрическое  $\mathbf{E}$  и магнитное  $\mathbf{H}$  поля уже не равны по величине, а также могут быть неортогональными. Формулы для вероятности релятивистского туннельного эффекта в статическом электромагнитном поле различных конфигураций были получены в [25, 26] и могут быть использованы, после необходимых обобщений, для анализа многопучковых экспериментов. В данной работе представлен такой анализ для случая ионизации  $s$ -состояний многозарядных ионов в поле двух скрещенных лазерных пучков – наиболее простой из многопучковых конфигураций, которые могут быть реализованы на установке XCELS. Показано, что при заданной мощности каждого из пучков наиболее значительный релятивистский эффект достигается при использовании встречной геометрии.

Рассмотрим поле, возникающее в результате когерентного сложения двух лазерных пучков, линейно поляризованных в одном направлении. Описывая каждый из пучков в приближении плоской волны с одинаковыми амплитудными значениями электрических полей  $\mathbf{E}_0$  и магнитными полями  $\mathbf{H}_{0i} = \mathbf{n}_i \times \mathbf{E}_0$ ,  $i = 1, 2$ , где  $\mathbf{n}_i = \mathbf{k}_i/k_i$  – единичные векторы, задающие направления распространения волн, а  $\mathbf{k}_i$  – волновые векторы, получим, что максимальное значение электрического поля составляет  $E_m = 2E_0$ , а магнитное поле при этом равно по величине  $H_m = 2E_0 \cos \theta$ . Здесь  $\theta$  – половинный угол между направлениями волновых векторов. Электрическое и магнитное поле остаются при этом ортогональными. Учитывая резко

нелинейную зависимость скорости ионизации от напряженности электрического поля, мы исследуем эту величину в тех частях фокуса, которые будут давать доминирующий вклад в образование многозарядных ионов. Это области пространства, в которых амплитуда электрического поля максимальна.

Рассмотрим туннелирование из  $s$ -состояния многозарядного иона с потенциалом ионизации  $I_p$ . В этом случае линейные зеэмановские сдвиги в магнитном поле отсутствуют, а спиновый эффект остается незначительным даже в очень сильных полях [29]. В квазиклассическом приближении [25, 26, 9] скорость ионизации можно представить в виде

$$w \sim \exp\{-2\text{Im}S_0\}, \quad (3)$$

где классическое действие  $S_0$  вычисляется для траектории, отвечающей нулевой скорости электрона на выходе из-под барьера в момент времени  $t = 0$

$$S_0 = \int_{t_0}^0 \left( L + c^2 - I_p \right) dt, \quad L = -c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{1}{c} (\mathbf{A}\mathbf{v}) - \varphi. \quad (4)$$

Здесь  $\varphi$  и  $\mathbf{A}$  – скалярный и векторный потенциалы, задающие электромагнитное лазерной поле, а комплексный момент  $t_0$  начала движения определяется из условия равенства начальной энергии фотоэлектрона энергии связанного состояния. При выполнении условия  $\gamma \ll 1$  время подбарьерного движения составляет малую долю оптического периода,  $|\omega t_0| \ll 1$ , и поле можно рассматривать как постоянное; в этом случае  $\varphi = -\mathbf{E}_0 \mathbf{r}$ ,  $\mathbf{A} = (\mathbf{H}_{01} + \mathbf{H}_{02}) \times \mathbf{r}/2$ . Траектория электрона удовлетворяет уравнениям движения в комплексном времени с силой Лоренца, а  $t_0$  определяется из уравнения

$$\frac{1}{\sqrt{1 - v^2(t_0)/c^2}} = 1 - \frac{I_p}{c^2}. \quad (5)$$

Опуская детали вычислений, часть из которых содержится в работах [25, 26], приведем результат, применимый при  $I_p \ll c^2$ :

$$w_{\text{NR}}(t) = w_{\text{NR}}(t) \exp \left\{ \frac{1}{F(t)} \left( \frac{1}{10} - \frac{2}{45} \cos^2 \theta \right) \frac{I_p}{c^2} \right\}, \quad (6)$$

где  $w_{\text{NR}}(t)$  – скорость ионизации в нерелятивистском приближении [5, 6, 9]. Для  $s$ -уровня она выражается формулой

$$w_{\text{NR}}(t) = C^2 2^{2\nu+1} I_p F^{1-2\nu}(t) \exp \left\{ -\frac{2}{3F(t)} \right\}. \quad (7)$$

Приведенное электрическое поле волны и эффективное главное квантовое число равны

$$F(t) = \frac{E(t)}{(2I_p)^{3/2}}, \quad \nu = \frac{Z}{\sqrt{2I_p}}, \quad (8)$$

$Z$  – заряд атомного остатка. Асимптотический коэффициент одноэлектронной волновой функции  $C \simeq 1$  на больших расстояниях от атомного остова может быть определен численно или с помощью квазиклассических асимптотик [9]. В силу условия  $\gamma \ll 1$  время в формулах (6), (7) рассматривается как параметр. Выражения (6), (7) для скорости ионизации получены в квазиклассическом приближении, условия применимости которого требуют, чтобы ширина барьера  $b \approx I_p/E(t)$  оставалась большой по сравнению с дебройлевской длиной волны электрона  $\lambda_D \simeq 1/\sqrt{I_p}$ . Это означает, что величина приведенного поля (8)  $F \ll 1$ . При этом, с учетом того, что рассматривается ионизация глубоких, хотя и слабо релятивистских уровней,  $1 \ll I_p \ll c^2$ , напряженность поля  $E(t)$  при достижении которой скорость (6) становится значительной, растет как  $\sim Z^3$ . Так, для  $1s$  состояния водородоподобного ксенона с  $I_p = 41300 \text{ эВ} \approx 1518 \text{ а.е.}$  значение приведенного поля, обеспечивающего практически полную ионизацию за один период лазерной волны,  $F = 0.05$ , достигается при  $E \approx 3.0 \cdot 10^3 \text{ а.е.}$ , что соответствует интенсивности  $J \approx 3.1 \cdot 10^{23} \text{ Вт/см}^2$ . Отметим также, что для  $s$ -уровней, у которых  $\nu \approx 1$  надбарьерный режим ионизации [9] как правило не достигается [30], и приведенные выше квазиклассические формулы (6), (7) являются количественно точными. В случае ионизации  $p$ -состояний с  $\nu \approx 2$  может потребоваться учет поправок, связанных с подавлением потенциального барьера (см. работу [30] и ссылки в ней).

Нас будет интересовать отличие скорости ионизации от нерелятивистской, определяемое экспоненциальным фактором в (6) и, в частности, зависимость этого фактора от угла  $2\theta$  между пучками. В работах [9, 25, 26] было получено квазиклассическое выражение для вероятности релятивистского туннельного эффекта для случая перпендикулярных и не равных по величине полей при условии  $E_m < H_m$ , что отвечает случаю лоренцевой ионизации [31]. Формулы для интересующего нас противоположного случая  $E_m > H_m$  получаются из [26] методом аналитического продолжения. Подробный вывод этих формул, а также анализ более общей конфигурации неортогональных полей будет представлен в последующей работе. Показатель экспоненты в (6) дает первый член разложения точного выражения для мнимой части действия в перпендикулярных полях при усло-

вии  $E_m > H_m$  по малому параметру  $I_p/c^2$ . Эта формула достаточна для выполнения оценок, позволяющих установить условия, необходимые для экспериментального наблюдения релятивистских эффектов в лазерных полях экстремальной интенсивности.

Для определения этих условий, заметим следующее.

1. Вероятность туннельной ионизации является резкой функцией приведенного поля  $F$ , поэтому для заданного электронного уровня с потенциалом ионизации  $I_p$  эффективно туннелирование происходит в достаточно узком интервале полей вблизи  $F = 0.03-0.05$  [15]. Величина этого интервала зависит от длительности лазерного импульса логарифмически, что позволяет сделать достаточно универсальную оценку порога наблюдения туннельной ионизации. Так, при  $F = 0.05$  полная ионизация уровней с любыми значениями азимутального и магнитного квантовых чисел будет происходить за один оптический период лазерного импульса с длиной волны  $\lambda = 1$  мкм или даже несколько быстрее [15]. Для лазерных импульсов длительностью  $\tau = 25$  фс, что отвечает планируемыми параметрам лазерной установки XCELS, при плотности газовой мишени  $10^{15}$  см $^{-3}$  и объеме фокуса  $\approx 20\lambda^3$  несколько десятков ионов (число, достаточное для регистрации современными детекторами многозарядных ионов) будут возникать при  $F = 0.02$ . При переходе к  $F = 0.015$ , скорость ионизации упадет на 5 порядков величины, так что вероятность образования даже одного иона за импульс станет пренебрежимо малой. Таким образом, значение  $F = 0.02$  можно принять за нижний порог наблюдения туннельной ионизации.

2. Условие на приведенное поле  $F$  задает максимальное значение энергии связи уровня, ионизацию которого в принципе можно наблюдать при определенном максимальном значении интенсивности лазерного излучения в фокусе. В настоящее время достигнуты интенсивности на уровне  $\sim 10^{23}$  Вт/см $^2$  [24]. При оптимистических прогнозах, на установках 100-петаваттного класса мощности XCELS в России и Station of Extreme Light в КНР могут быть достигнуты интенсивности  $\sim 10^{25}$  Вт/см $^2$ . В соответствии с приведенными выше оценками в поле с такой интенсивностью возможно наблюдение туннелирования из уровней с потенциалом ионизации около 120 кэВ, что отвечает

основным состояниям водородоподобных ионов радона или тория. При этом  $I_p/c^2 \approx 0.24$ , так что разложение функции действия по этому параметру быстро сходится, и для оценок можно использовать приближенное выражение (6).

В случае двух параллельных пучков коэффициент перед  $I_p/c^2$  в (6) равен  $1/(18F)$ , при  $\theta = \pi/4$  (пучки, распространяющиеся под прямым углом)  $7/(90F)$ , а для встречных пучков ( $\theta = \pi/2$ )  $-1/(10F)$ . В результате, при переходе от ионизации в двух параллельных или распространяющихся под малым углом пучках к случаю встречных пучков скорость ионизации и выход полностью ионизованных атомов с энергиями связи  $1s^1$  состояний около 100 кэВ должны возрасти приблизительно в 2 раза. Возрастание вероятности ионизации связано в основном с релятивистскими поправками к подбарьерной траектории электрона. Таким образом, экспериментальное измерение увеличения выхода многозарядных ионов в описанной выше ситуации можно было бы интерпретировать как наблюдение влияния релятивистских эффектов на туннелирование в сильном внешнем поле. Следует отметить, что интенсивность лазерного поля, конечно, является ультрарелятивистской и при  $\theta = 0$ , т.е. при параллельном распространении пучков или в случае одного пучка. Релятивистская поправка к вероятности туннелирования в этом случае оказывается заметно меньше, потому, что магнитное поле заворачивает подбарьерную траекторию электрона, делая ее двумерной, что приводит к увеличению мнимой части действия (4) и подавлению вероятности ионизации [26]. Релятивистские поправки к действию, возникающие за счет электрического поля, напротив, увеличивают вероятность. При этом в случае скрещенного поля происходит почти полная компенсация этих поправок, и суммарный эффект оказывается сильно подавленным.

Как видно из приведенных оценок, релятивистские эффекты в туннелировании оказываются достаточно слабыми даже при больших значениях интенсивности [15, 28]. Релятивистского превышения вероятности ионизации в поле стоячей волны на порядок по сравнению с вероятностью ионизации в параллельных пучках можно ожидать при интенсивностях  $\simeq 10^{26}$  Вт/см $^2$ , достижение которых в ближайшие годы вряд ли возможно.

Обсудим возможную постановку эксперимента. Измерение выхода ионов должно производиться в разреженной газовой струе при плотностях  $< 10^{15}$  см $^{-3}$ , позволяющих избежать влияния плазменных полей, появления тормозного излучения и столкновительной ионизации. Требования к по-

становке эксперимента по наблюдению туннельной ионизации глубоких атомных уровней в сильном лазерном поле подробно описаны в работах [32, 33]. Измеряемой величиной является число ионов максимальной кратности в зависимости от взаимной ориентации пучков при фиксированных энергиях последних. Существенной проблемой для вычленения вклада релятивистской ионизации в выход ионов максимальной кратности будет изменение структуры фокуса при изменении угла между пучками. С увеличением угла  $\theta$  будет уменьшаться область фокуса, в которой амплитуда электрического поля принимает значения, близкие к максимальному  $2E_0$ . Этот эффект может оказаться заметно более существенным, чем рост числа ионов за счет подавления магнитного поля во встречных пучках. Влияние изменения эффективного объема фокуса может быть вычтено путем измерения выхода ионов меньшей кратности при более низких интенсивностях, для которых релятивистские эффекты заведомо несущественны, и вероятность ионизации определяется только амплитудой электрического поля. Таким образом, эксперимент, в котором угол между пучками изменяется от малого значения до  $\theta = \pi/4$  (перпендикулярные пучки), а затем до  $\theta = \pi/2$  (встречные пучки) должен быть проведен при двух значениях мощности, обеспечивающих достижение интенсивности  $\approx 10^{25}$  Вт/см<sup>2</sup>, при которой происходит ионизация водородоподобных ионов Rn и Th и, например, при  $J \approx 10^{23}$  Вт/см<sup>2</sup>, когда ионизуются 2s-оболочки тех же атомов. Измеренное во втором случае отношение числа ионов  $N^{(Z-2)+}$  кратности  $Z - 2$  для разных значений углов между пучками,  $N^{(Z-2)+}(\pi/4)/N^{(Z-2)+}(0)$  и т.д., позволит затем откалибровать результаты измерений для  $N^{Z+}$  и выделить вклад релятивистских эффектов.

Предложенный эксперимент может быть реализован и в схеме с числом пучков  $> 2$ . Учитывая, что максимальной скорости ионизации отвечает случай равного нуля магнитного поля, такая схема в наиболее предпочтительном виде должна использовать четное количество пучков, попарно распространяющихся в противоположных направлениях. Отметим, что предлагаемая схема эксперимента реализуема только при высокой степени когерентности перекрываемых пучков. Пока неясно, какая степень когерентности может быть достигнута на многопучковых лазерных установках мульти-петаваттной мощности.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (договор # 075-15-2021-1361 от 07.10.2021).

1. Г. С. Воронов, Н. Б. Делоне, Письма в ЖЭТФ, **1**, 42 (1965) [JETP Lett. **1**, 42 (1965)].
2. P. Agostini, F. Fabre, G. Mainfray, G. Petite, and N. K. Rahman, Phys. Rev. Lett. **42**, 1127 (1979).
3. Л. В. Келдыш, ЖЭТФ **47**, 1945 (1964) [Sov. Phys. – JETP **20**, 1307 (1965)].
4. А. И. Никишов, В. И. Ритус, ЖЭТФ **50**, 255 (1966) [Sov. Phys. – JETP **23**, 168 (1966)].
5. А. М. Переломов, В. С. Попов, М. В. Тереньев, ЖЭТФ **50**, 1393 (1966) [Sov. Phys. – JETP **23**, 924 (1966)].
6. А. М. Переломов, В. С. Попов, М. В. Тереньев, ЖЭТФ **51**, 309 (1966) [Sov. Phys. – JETP **24**, 207 (1967)].
7. А. М. Переломов, В. С. Попов, ЖЭТФ **52**, 514 (1967) [Sov. Phys. – JETP **25**, 336 (1967)].
8. S. V. Popruzhenko, V. D. Mur, V. S. Popov, and D. Bauer, Phys. Rev. Lett. **101**, 193003 (2008).
9. В. С. Попов, УФН **174**, 921 (2004) [Phys.-Uspekhi **47**, 855 (2004)].
10. F. Krausz and M. Ivanov, Rev. Mod. Phys. **81**, 163 (2009).
11. Б. М. Карнаков, В. Д. Мур, В. С. Попов, С. В. Попруженко, Письма в ЖЭТФ **93**, 238 (2011) [JETP Lett. **93**, 238 (2011)].
12. S. V. Popruzhenko, J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. **47**, 204001 (2014).
13. Б. М. Карнаков, В. Д. Мур, С. В. Попруженко, В. С. Попов, УФН **185**, 3 (2015) [Phys.-Uspekhi **58**, 3 (2015)].
14. W. Becker, S. P. Goreslavski, D. B. Milosevic, and G. G. Paulus, J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. **51**, 162002 (2018).
15. M. F. Ciappina, S. V. Popruzhenko, S. V. Bulanov, T. Ditmire, G. Korn, and S. Weber, Phys. Rev. A **99**, 043405 (2019).
16. M. F. Ciappina, E. E. Peganov, S. V. Popruzhenko, Matter and Radiation at Extremes **5**, 044401 (2020).
17. E. Lötstedt, M. F. Ciappina, and K. Yamanouchi, Phys. Rev. A **102**, 013112 (2020).
18. S. P. Goreslavsky and N. B. Narozhny, J. Nonlinear Opt. Phys. Mater. **4** 799 (1995).
19. S. P. Goreslavsky, N. B. Narozhny, and V. P. Yakovlev, J. Opt. Soc. Am. B **6**, 1752 (1989).
20. С. В. Попруженко, Е. Б. Калымбетов, Квантовая электроника **51**, 801 (2021) [Quant. El. **51**, 801 (2021)].
21. A. V. Bashinov, A. A. Gonoskov, A. V. Kim, G. Mourou, and A. M. Sergeev, Eur. Phys. J. Spec. Top. **223**, 1105 (2014).
22. D. N. Papadopoulos, J. P. Zou, C. Le Blanc, G. Chériaux, P. Georges, F. Druon, G. Mennerat, P. Ramirez, L. Martin, A. Fréneaux, A. Beluze, N. Lebas, P. Monot, F. Mathieu, and P. Audebert, High Power Laser Sci. Eng. **4**, e34 (2016).
23. S. Weber, S. Bechet, S. Bornies et al. (Collaboration), Matter and Radiation at Extremes **2**, 149 (2017).

24. J.W. Yoon, Y.G. Kim, I.W. Choi, J.H. Sung, H.W. Lee, S.K. Lee, and C.H. Nam, *Optica* **8**, 630 (2021).
25. В. С. Попов, В. Д. Мур, Б. М. Карнаков, Письма в ЖЭТФ **66**, 213 (1997) [*JETP Lett.* **66**, 229 (1997)].
26. В. Д. Мур, Б. М. Карнаков, В. С. Попов, ЖЭТФ **114**, 798 (1998) [*JETP* **87**, 433 (1998)].
27. A. Di Piazza, C. Müller, C.Z. Hatsagortsyan, and C.H. Keitel, *Rev. Mod. Phys.* **84**, 1177 (2012).
28. С. В. Попруженко, *Квантовая электроника* **53** (2023), (в печати).
29. В. С. Попов, Б. М. Карнаков, В. Д. Мур, Письма в ЖЭТФ **79**, 320 (2004) [*JETP Lett.* **79**, 262 (2004)].
30. M.F. Ciappina and S.V. Popruzhenko, *Laser Phys. Lett.* **17**, 025301 (2020).
31. В. С. Попов, В. Д. Мур, Б. М. Карнаков, ЖЭТФ **115**, 1642 (1999) [*JETP* **88**, 902 (1999)].
32. K. Yamakawa, Y. Akahane, Y. Fukuda, M. Aoyama, N. Inoue, and H. Ueda, *Phys. Rev. A* **68**, 065403 (2003).
33. A. Link, E.A. Chowdhury, J.T. Morrison, V.M. Ovchinnikov, D. Offermann, L.V. Woerkom, and R.R. Freeman, *Rev. Sci. Instrum.* **77**, 10E723 (2006).