Письма в ЖЭТФ, том 117, вып. 2, с. 127 – 131

Парная корреляционная функция завихренности внутри когерентного вихря

И. В. Колоколов[+*1)], В. В. Лебедев[+*], М. М. Тумакова[+×]

[+]Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау, РАН

142432 Черноголовка, Россия

[*]Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики", 101000 Москва, Россия

[×]Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики", 190008 С.-Петербург, Россия

Поступила в редакцию 8 ноября 2022 г.
После переработки 24 ноября 2022 г.
Принята к публикации 2 декабря 2022 г.

Мы изучаем корреляции флуктуаций завихренности внутри когерентного вихря, возникающего вследствие обратного каскада энергии в двумерной турбулентности. Наличие когерентного течения, которое является дифференциальным вращением, подавляет мелкомасштабные флуктуации потока, которые создаются внешней силой, и приводят к тому, что эти флуктуации могут считаться невзаимодействующими и, следовательно, изучаться в линейном приближении. Мы вычисляем парную корреляционную функцию завихренности и демонстрируем, что она обладает степенным поведением как в пространстве, так и по времени. Полученные результаты позволяют приступить к систематическому изучению эффектов, связанных с нелинейным взаимодействием флуктуаций, которые играют существенную роль на периферии когерентного вихря. Наши результаты применимы также к статистике пассивного скаляра в сильном сдвиговом потоке.

DOI: 10.31857/S1234567823020076, EDN: oerbul

Как показано в работах [1–3], основной особенностью двумерного турбулентного течения, возбуждаемого внешней силой (накачкой), является наличие обратного каскада энергии, который формируется наряду с прямым каскадом, каскадом энстрофии. Описание причин возникновения обратного каскада и его свойств содержится в работе [4]. Обзор современного состояния исследований двумерной турбулентности можно найти в работе [5]).

После включения накачки (внешней силы, возбуждающей турбулентность) за счет обратного каскада пространственный масштаб флуктуаций скорости растет со временем, пока этот рост не остановится либо трением о дно, либо размером системы. В последнем случае финальной стадией эволюции может стать система когерентных вихрей. Экспериментально когерентные вихри наблюдались в работах [6, 7], в численном моделировании они наблюдались в работах [8–10]. В последней работе установлен плоский профиль скорости когерентного вихря и приведены аргументы, объясняющие его возникновение. Дальнейшие аналитические исследования [11–15] подтвердили универсальность плоского профиля и связали его существование с пассивным (квазилинейным) характером флуктуаций внутри когерентного вихря. В работе [16] было показано, что когерентные вихри не могут формироваться при значении коэффициента трения о дно, превышающего некоторый порог, в работе [17] это предсказание проверено прямым численным моделированием.

С точки зрения энергетического баланса, когерентные крупномасштабные вихри, возникающие в двумерных турбулентных системах, поддерживаются мелкомасштабными флуктуациями, возбуждаемыми внешней силой. Эти флуктуации, в свою очередь, эволюционируют в крупномасштабном поле скорости. Их амплитуды оказываются подавленными внутри когерентного вихря и в ведущем приближении нелинейным взаимодействием мелкомасштабных флуктуаций можно пренебречь. Корреляционные функции таких флуктуаций являются сильно анизотропными. В данной работе мы вычисляем парную корреляционную функцию флуктуационной составляющей поля завихренности внутри когерентного вихря в пассивном режиме. Такая функция непосредственно измерима в натурных и численных экспериментах и сравнение ее с теоретическим предсказанием может служить индикатором применимо-

1)e-mail: igor.kolokolov@gmail.com

сти всего подхода. Кроме того, проведенный анализ является первым необходимым шагом в исследовании роли нелинейных флуктуационных эффектов, определяющих статистические свойства потока вне когерентного вихря и его размеры.

В системе отсчета, связанной с центром когерентного вихря, он в среднем изотропен, т.е. средняя скорость вихря $\mathbf{V}$ имеет только полярную компоненту $U(r)$, где r – расстояние до точки наблюдения от центра вихря. Полная скорость потока жидкости внутри вихря может быть представлена в виде суммы $\mathbf{V}+\mathbf{v}$, где $\mathbf{v}$ – флуктуационная составляющая скорости. Аналогичное разложение $\Omega+\varpi$, где $\Omega=\partial_r U+U/r$, $\varpi=\nabla\times\mathbf{v}$, справедливо для завихренности. Флуктуационные компоненты $\mathbf{v}$, ϖ зависят от времени t, от расстояния r и от полярного угла φ.

Мы исходим из двумерного уравнения Навье–Стокса, котором мы наряду с вязким членом учитываем трение о дно. Производя декомпозицию течения на когерентную и флуктуационную составляющую, мы находим из уравнения Навье–Стокса следующее уравнение на флуктуационную завихренность ϖ

$$\partial_t\varpi+(U/r)\partial_\varphi\varpi+v_r\partial_r\Omega+\nabla\left(\mathbf{v}\varpi-\langle\mathbf{v}\varpi\rangle\right)= \\ =\phi-\alpha\varpi+\nu\nabla^2\varpi. \tag{1}$$

Здесь $\phi=\nabla\times\mathbf{f}$ – ротор внешней силы $\mathbf{f}$ (на единицу массы), v_r – радиальная компонента флуктуационной скорости $\mathbf{v}$, α – коэффициент трения о дно и ν – коэффициент кинематической вязкости.

В нашей работе внешняя сила $\mathbf{f}$, возбуждающая турбулентность, предполагается хаотически меняющейся со временем и имеющей конечную длину корреляции в пространстве. Мы используем модель силы $\mathbf{f}$, коротко коррелированной по времени. В этом случае ее статистические свойства однозначно характеризуются парной корреляционной функцией. Нам удобно работать в терминах корреляционной функции ротора внешней силы

$$\langle\phi(t_1,\mathbf{x})\phi(t_2,\mathbf{y})\rangle=-\epsilon\delta(t_1-t_2)\nabla^2\Xi(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \tag{2}$$

где мы предположили, что статистика накачки однородна во времени и в пространстве. Лапласиан ∇^2 в правой части (2) связан с тем, что ϕ является ротором внешней силы, ϵ – мощность накачки на единицу массы, а $\Xi(\mathbf{x})$ – безразмерная функция, удовлетворяющая условию $\Xi(0)=1$. Мы полагаем, что $\Xi(\mathbf{x})$ быстро убывает при росте своего аргумента на масштабах больше некоторой длины k_f^{-1}, которая является длиной корреляции накачки. Мы будем полагать, что длина k_f^{-1} мала по сравнению с расстоянием r от точки наблюдения до центра вихря, $k_f r\gg 1$.

Вне кора когерентного вихря (где главную роль играет вязкость и реализуется твердотельное вращение) его средняя полярная скорость U имеет плоский профиль [10, 15], что соответствует дифференциальному вращению. Локально (на масштабах меньше расстояния до центра вихря) мы имеем дело со сдвиговым течением. Как показано в работах [12, 13], в когерентном вихре темп сдвига $\Sigma=r\partial_r(U/r)$ является много большим, чем Колмогоровская нелинейная частота взаимодействия флуктуаций на масштабе накачки $(\epsilon k_f^2)^{2/3}$, поэтому нелинейными по флуктуационной скорости слагаемыми в (1) в ведущем приближении можно пренебречь. Таким образом, флуктуации на фоне когерентного вихря можно анализировать в пассивном (квазилинейном) приближении.

Отметим, что для образования двумерного турбулентного состояния и когерентного вихря диссипативные параметры должны быть достаточно малы. В частности, если сформировался когерентный вихрь, то внутри него выполняется неравенство

$$\Sigma\gg\nu k_f^2. \tag{3}$$

Неравенство (3) справедливо везде внутри вихря за исключением узкой области вблизи центра вихря, где $\Sigma\to 0$. Несмотря на относительную слабость диссипативных членов, пренебречь ими при анализе когерентного вихря нельзя, поскольку именно вязкость и трение о дно определяют амплитуды средней (когерентной) скорости вихря и флуктуаций на ее фоне.

Рассмотрим малую окрестность окружности радиуса R с центром в центре вихря. Изотропия его среднего течения позволяет исключить однородное вращение с угловой частотой $U(R)/R$, перейдя в систему отсчета, вращающуюся с этой угловой скоростью. При решении уравнения (1) мы ограничиваемся значениями r, близкими к R. Тогда $x_1=R\varphi$ и $x_2=r-R$ можно рассматривать, как локальные декартовы координаты. Неравенство $k_f R\gg 1$ означает, что можно пренебречь членом $v_r\partial_r\Omega$ в уравнении (1) и, следовательно, использовать сдвиговую аппроксимацию. Уравнение эволюции флуктуационной завихренности, таким образом, принимает вид:

$$\hat{\mathcal{L}}\varpi=\phi, \quad \hat{\mathcal{L}}=\partial_t+\Sigma x_2\frac{\partial}{\partial x_1}+\alpha-\nu\nabla^2. \tag{4}$$

Здесь Σ – темп сдвига, $\Sigma=r\partial_r(U/r)$, взятый при $r=R$.

Решение уравнения (4) записывается в виде

$$\varpi(t,\mathbf{x})=\int dt_1 d^2y\, G(t-t_1,\mathbf{x},\mathbf{y})\phi(t_1,\mathbf{y}). \tag{5}$$

Здесь $G(t, \mathbf{x}, \mathbf{z})$ – функция Грина эволюционного оператора $\hat{\mathcal{L}}$ (4), удовлетворяющая уравнению

$$\hat{\mathcal{L}} G(t, \mathbf{x}, \mathbf{z}) = \delta(t)\delta(\mathbf{x} - \mathbf{z}). \tag{6}$$

В силу причинности функция Грина $G(t)$ равна нулю при $t < 0$.

Для пространственной Фурье-компоненты функции Грина мы получаем из (6) дифференциальное уравнение первого порядка, которое легко решается методом характеристик. После этого обратное преобразование Фурье дает

$$G(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \theta(t) \frac{\sqrt{3}\,\exp(-\alpha t)}{2\pi\nu\Sigma t^2} \exp\left\{-\frac{3\Delta(t, \mathbf{x}, \mathbf{y})}{\nu\Sigma^2 t^3}\right\}, \tag{7}$$

$$\Delta(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x_1 - y_1 - \Sigma t y_2)^2 - \Sigma t (x_1 - y_1 - \Sigma t y_2)(x_2 - y_2) + \frac{1}{3}\Sigma^2 t^2 (x_2 - y_2)^2, \tag{8}$$

где $\theta(t)$ – ступенчатая функция Хэвисайда. Отметим, что трение о дно входит в выражение (7) только через фактор $\exp(-\alpha t)$.

Выражение (7) показывает, что эволюция пятна завихренности размером k_f^{-1}, производимого накачкой ϕ, характеризуется разными временами для разных направлений. Поперек сдвигового течения характерное время эволюции определяется вязкостью, оно равно $\tau_\nu = (\nu k_f^2)^{-1}$. Вдоль же сдвигового течения характерное время эволюции равно

$$\tau_\star = \left(\Sigma^2 \nu k_f^2\right)^{-1/3}. \tag{9}$$

В силу условия (3) справедливы неравенства $\Sigma\tau_\star \gg 1$, $\tau_\nu \gg \tau_\star$. Как показано в работах [16, 17], условием возникновения когерентного вихря является $\alpha \lesssim \nu k_f^2$. Отсюда получаем $\alpha\tau_\star \ll 1$, как следствие того же условия (3).

Время $\tau_\star$ имеет следующее происхождение: Ланжевеновские силы, обеспечивающие вязкую диффузию, проводят к тому, что Лагранжевы траектории имеют угловой разброс $\theta_\star \sim \left(\nu k_f^2/\Sigma\right)^{1/3}$. Подобный угол возникает, например, в задаче о растяжении полимера в сдвиговом потоке с малой случайной составляющей [18]. В результате сдвиговое течение порождает на масштабе накачки разброс скоростей $\Delta v \sim \theta_\star k_f^{-1}\Sigma$, что и дает эффективное время деформации пятна (9). Такая интерпретация согласуется с результатами исследования распада начального пятна пассивного скаляра, приведенными в работе [19], где было показано, что характерное время распада оценивается как $\left(D\Sigma^2\right)^{-1/3} l^{2/3}$, где l – размер этого пятна и D – коэффициент диффузии скаляра.

Изучим парную корреляционную функцию F завихренности ϖ в условиях статистического равновесия. Она зависит только от разности времен (в силу предполагаемой однородности по времени), но при ненулевой разности времен зависит не только от разности координат, поскольку сдвиговое течение нарушает пространственную однородность системы. Поэтому мы имеем дело с функцией

$$F(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \langle \varpi(t, \mathbf{x})\varpi(0, \mathbf{y})\rangle, \tag{10}$$

где угловые скобки означают усреднение по статистике накачки. Накачка имеет корреляционную длину k_f^{-1}, в то время как корреляционная функция (10) имеет сложное пространственно-временное поведение.

Используя представление (5) и усредняя произведение $\varpi(t, \mathbf{x})\varpi(0, \mathbf{y})$ с помощью соотношения (2), находим следующее выражение

$$F(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\epsilon \int_0^\infty dt_2 \times \int d^2s\, d^2z\, G(t + t_2, \mathbf{x}, \mathbf{s}) G(t_2, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \nabla^2 \Xi(\mathbf{s} - \mathbf{z}). \tag{11}$$

Выражение (11) позволяет детально проанализировать парную корреляционную функцию завихренности. Нас будут интересовать степенные асимптотики корреляционной функции завихренности (10). Эти асимптотики определяются оператором эволюции (4) и являются вследствие этого универсальными, т.е. не зависят от деталей накачки.

Мы начнем с анализа второго момента $\langle\varpi^2\rangle = F(0, \mathbf{0}, \mathbf{0})$. В этом случае характерное значение $s_1 - z_1 \sim k_f^{-1}$ в интеграле (11) определяется накачкой. Остальные характерные значения величин в интеграле (11) определяются структурой функции Грина (7). При этом оказывается, что

$$t_2 \sim \tau_\star,\ s_1, z_1 \sim k_f^{-1},\ s_2, z_2 \sim \sqrt{\nu\tau_\star} \ll k_f^{-1}.$$

С использованием этих характерных значений мы находим из представления (11)

$$\langle\varpi^2\rangle = F(0, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \sim \epsilon k_f^2 \tau_\star. \tag{12}$$

Можно сказать, что $\tau_\star$ имеет смысл эффективного времени работы накачки. Отметим, что при получении (12) мы пренебрегли фактором $\exp(\alpha t)$ в (7), что возможно в силу $\alpha\tau_\star \ll 1$.

Рассмотрим одноточечную разновременную корреляционную функцию $F(t, \mathbf{0}, \mathbf{0})$ при $t/\tau_\star \gg 1$. В этом случае характерное время в интеграле (11) определяется $t_2 \sim t$. Для величин же $\mathbf{s}, \mathbf{z}$ имеют место оценки

$$s_1 - z_1 \sim k_f^{-1},\ s_1 + z_1 \sim \sqrt{\nu \Sigma^2 t^3},\ s_2 \sim z_2 \sim \sqrt{\nu t}.$$

С использованием этих характерных значений мы находим из представления (11)

$$F(t, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \sim \epsilon k_f^2 \tau_\star \sqrt{\tau_\star / t}. \tag{13}$$

Оценка (13) предполагает выполнение неравенства $k_f s_2 \ll 1$, что дает $t \ll \tau_\nu = (\nu k_f^2)^{-1}$. В противном случае, при $t \gg \tau_\nu$, становятся существенными ограничения в интегрировании по s_2, z_2, связанные с накачкой, и значение $F(t, \mathbf{0}, \mathbf{0})$ быстро спадает с ростом t. При вычислении (13) мы пренебрегли фактором $\exp(\alpha t)$ в (7), что дает ограничение $\alpha t \ll 1$. Отметим, что в силу $\alpha \lesssim \nu k_f^2$ ограничение $t \gg \tau_\nu$ сильнее, чем ограничение, связанное с α.

Пространственные корреляции поля ϖ оказываются существенно анизотропными, что является следствием наличия сильного сдвигового течения. Поэтому мы отдельно исследуем поведение корреляционной функции F для координат, отсчитываемых вдоль и поперек сдвиговой скорости. Чтобы установить характер пространственных корреляций, мы исследуем выражение для одновременной корреляционной функции $F(0, \mathbf{x}, \mathbf{y})$, которая зависит только от разности $\mathbf{x} - \mathbf{y}$.

Проанализируем выражение для одновременной корреляционной функции F для конфигурации, когда точки наблюдения разнесены вдоль направления сдвигового потока, $F(0, x_1, 0, y_1, 0)$. Ее значение существенно отличается от второго момента $\langle \varpi^2 \rangle$, если точки разнесены на расстояние, превышающее длину корреляции накачки, $k_f |x_1 - y_1| \gg 1$. В этом случае имеют место оценки

$$s_1 - z_1 \sim k_f^{-1}, \quad s_1 + z_1 \sim |x_1 - y_1|,$$
$$t_2 \sim \tau_\star (k_f |x_1 - y_1|)^{2/3}, \quad s_2 \sim z_2 \sim \sqrt{\nu t_2}.$$

С использованием приведенных характерных значений мы находим из представления (11)

$$F(0, x_1, 0, y_1, 0) \sim \frac{\epsilon k_f^2 \tau_\star}{(k_f |x_1 - y_1|)^{1/3}}. \tag{14}$$

Оценка (14) предполагает выполнение неравенства $k_f s_2 \ll 1$, что дает ограничение $t_2 \ll \tau_\nu$. Оно переписывается в виде неравенства $k_f |x_1 - y_1| \ll (\tau_\nu / \tau_\star)^{3/2}$, которое определяет область применимости асимптотики (14). При обратном условии корреляционная функция быстро спадает с ростом $|x_1 - y_1|$. При вычислении (14) мы пренебрегли фактором $\exp(\alpha t)$ в (7), что дает ограничение $\alpha t_2 \ll 1$. Отметим, что в силу $\alpha \lesssim \nu k_f^2$ ограничение $t_2 \ll \tau_\nu$ сильнее, чем ограничение, связанное с α.

Проанализируем выражение для одновременной корреляционной функции F для конфигурации, когда точки наблюдения разнесены поперек направления сдвигового потока, $F(0, 0, x_2, 0, y_2)$. Ее значение существенно отличается от второго момента $\langle \varpi^2 \rangle$, если точки разнесены на расстояние, которое удовлетворяет $k_f |x_2 - y_2| \gg (\nu k_f^2 / \Sigma)^{1/3}$. В этом случае имеют место оценки

$$s_2 \sim z_2 \sim |x_2 - y_2| \sim \sqrt{\nu t_2},$$
$$s_1 - z_1 \sim k_f^{-1},\ s_1 + z_1 \sim (\nu \Sigma^2 t_2^3)^{1/2} \sim (\Sigma / \nu) |x_2 - y_2|^3.$$

Функция F выходит на рассматриваемую асимптотику, когда $s_1 + z_1$ становится больше k_f^{-1}, что и дает критерий $k_f |x_2 - y_2| \gg (\nu k_f^2 / \Sigma)^{1/3}$. С использованием приведенных характерных значений мы находим из представления (11)

$$F(0, 0, x_2, 0, y_2) \sim \frac{\epsilon k_f}{\Sigma |x_2 - y_2|}. \tag{15}$$

Асимптотика (15) реализуется при $k_f |x_2 - y_2| \ll 1$, в противном случае интегрирование по $s_2 - z_2$ ограничивается корреляционной функцией накачки, и F быстро спадает с ростом $|x_2 - y_2|$. Отметим, что наибольшее значение t_2, реализуемое при $k_f |x_2 - y_2| \sim 1$, равно $\tau_\star$. Поэтому при вычислении (15) мы пренебрегли фактором $\exp(\alpha t)$ в (7) в силу $\alpha t_\star \ll 1$.

Мы установили, что парная корреляционная функция завихренности внутри когерентного вихря, который возникает вследствие обратного каскада в двумерной турбулентности, имеет степенное поведение в некоторой области пространственных длин и времен. Это степенное поведение означает сильную корреляцию флуктуаций завихренности в области степенного поведения, которая может существенно сказаться на нелинейных эффектах. Наш подход имеет более широкую область применимости, поскольку он определяет корреляции пассивного скаляра в сильном сдвиговом потоке. Наши результаты могут напрямую сравниваться с результатами лабораторных экспериментов и численного моделирования.

Мы благодарны С. С. Вергелесу за многочисленные обсуждения.

Работа И. В. Колоколова и В. В. Лебедева поддержана в рамках научной программы Национального центра физики и математики, работа М. М. Тумаковой поддержана грантом Российского фонда фундаментальных исследований # 19-32-60065 и фондом "Базис". В. В. Лебедев благодарит также за поддержку грант Министерства Образования и Науки РФ, проект # 075-15-2022-1099.

---

1. R. H. Kraichnan, Phys. Fluids **10**, 1417 (1967).
2. C. E. Leith, Phys. Fluids **11**, 671 (1968).
3. G. K. Batchelor, Phys. Fluids **12**, 233 (1969).
4. R. H. Kraichnan and D. Montgomery, Rep. Prog. Phys. **43**, 547 (1980).
5. G. Boffetta and R. E. Ecke, Annu. Rev. Fluid Mech. **44**, 427 (2012).
6. H. Xia, M. Shats, and G. Falkovich, Phys. Fluids **21**, 125101 (2009).
7. A. V. Orlov, M. Yu. Brazhnikov, and A. A. Levchenko, Pis'ma v ZhETF **107**, 166 (2018) [JETP Lett. **107**, 157 (2018)].
8. L. M. Smith and V. Yakhot, J. Fluid Mech. **274**, 115 (1994).
9. M. Chertkov, C. Connaughton, I. Kolokolov, and V. Lebedev, Phys. Rev. Lett. **99**(8), 084501 (2007).
10. J. Laurie, G. Boffetta, G. Falkovich, I. Kolokolov, and V. Lebedev, Phys. Rev. Lett. **113**(25), 254503 (2014).
11. I. V. Kolokolov and V. V. Lebedev, Pis'ma v ZhETF **101**, 181 (2015) [JETP Lett. **101**, 164 (2015)].
12. I. V. Kolokolov and V. V. Lebedev, Phys. Rev. E **93**, 033104 (2016).
13. I. V. Kolokolov and V. V. Lebedev, J. Fluid Mech. **809**, R2 (2016).
14. A. Frishman, J. Laurie, and G. Falkovich, Phys. Rev. Fluids **2**, 032602 (2017).
15. И. В. Колоколов, В. В. Лебедев, Письма в ЖЭТФ **106**, 633 (2017) [I. V. Kolokolov and V. V. Lebedev, JETP Lett. **106**, 659 (2017)].
16. I. Kolokolov and V. Lebedev, Phys. Rev. E **102**, 023108 (2020).
17. A. N. Doludenko, S. V. Fortova, I. V. Kolokolov, and V. V. Lebedev, Ann. Phys. **447**, 169072 (2022).
18. M. Chertkov, I. Kolokolov, V. Lebedev, and K. Turitsyn, J. Fluid Mech. **531**, 251 (2005).
19. M. Souzy, I. Zaier, H. Lhuissier, T. Le Borgne, and B. Metzger, J. Fluid Mech. **838**, R3 (2018).