Письма в ЖЭТФ, том 116, вып. 10, с. 733 – 737 © 2022 г. 25 ноября

Одномерный мир как площадка для исследования киральных эффектов

З. В. Хайдуков[1)]

Московский физико-технический институт, 141700 Долгопрудный, Россия

Институт теоретической и экспериментальной физики
Национальный исследовательский центр "Курчатовский институт", 117259 Москва, Россия

Поступила в редакцию 5 августа 2022 г.
После переработки 17 октября 2022 г.
Принята к публикации 17 октября 2022 г.

Исследован аналог эффекта разделения киральностей и кирального магнитного эффекта в случае фермионов в одном пространственном измерении. Показана их связь с аксиальной аномалией в методе эпсилон раздвижки. Вычислен большой канонический потенциал для киральных фермионов в одном пространственном измерении в присутствии кирального химического потенциала.

DOI: 10.31857/S123456782222013X, EDN: lzpdxs

1. Введение. Киральные эффекты – это общее название, описывающее возникновение недиссипативных токов в среде в термодинамическом равновесии. Наиболее известными примерами в 4-измерениях являются эффект разделения киральностей [1, 2], киральный магнитный [3] и киральный вихревой эффекты [4]. Значительное внимание уделяется взаимосвязи между эффектами и аномалиями в квантовой теории поля (КТП). В течение долгого времени предполагалось, что все киральные эффекты связаны с инфракрасной областью, и поэтому могут быть вычислены в рамках формализма КТП, но без необходимости регуляризации. Впоследствии было указано на неполноту таких аргументов [6, 5] и на отсутствие равновесного кирального магнитного эффекта. Чуть раньше было предложено объяснение универсальности экспериментального соотношения между током в эффективно одномерных тонких проводах и приложенным напряжением [7]. Из тех же самых аргументов получалось выражение для кирального магнитного эффекта [7], что с учетом [6, 5] ставит подобные выводы под сомнение.

В рамках настоящей статьи будет предложен простой подход, который позволит изучить основные черты киральных эффектов в термодинамическом равновесии. Мы сосредоточимся на 2-ух пространственно-временных измерениях. Все результаты будут получены в хорошо регуляризованной теории, что позволит нам в рамках единого формализма изучить все особенности и все существенные отличия между эффектом разделения киральностей (ЭРК) и киральным эффектом (КЭ) – аналогом кирального магнитного эффекта, а также взаимосвязь эффектов с аномалией.

2. Киральные эффекты в одном пространственном измерении в теории без регуляризации. В двух пространственно-временных измерениях существует связь между векторным и аксиальным токами:

$$j^{a,\nu} = \epsilon^{\nu\mu} j_{v,\mu}. \tag{1}$$

Мы используем следующие обозначения:

$$\gamma^0 = \sigma^y, \quad \gamma^x = i\sigma^x, \quad \gamma^5 = -\gamma^0\gamma^x = \sigma^z, \tag{2}$$

при ненулевой плотности зарядов ($n_{v,a} = \langle\langle j^0_{v,a}\rangle\rangle_{T,\mu_{v,a}}$) можно получить:

$$j^x_{v,a} = \pm n_{a,v}, \tag{3}$$

j^x_v – аналог кирального магнитного эффекта, j^x_a – аналог эффекта разделения киральностей. С точки зрения классической теории все, что нам нужно, – просто создать ненулевую плотность соответствующего заряда. В квантовом случае нам необходимо получить все результаты в хорошо регуляризованной теории.

3. Связь между эффектом разделения киральностей и аномалией. Аксиальная аномалия в двух пространственно-временных измерениях подразумевает точное соотношение между дивергенцией аксиального тока и напряженностью калибровочного поля:

$$\partial_\mu j^{\mu 5} = \frac{e}{2\pi}\epsilon^{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \quad \mu,\nu = 0, 1. \tag{4}$$

[1)]e-mail: khaidukov.zv@phystech.edu

Соотношение (4) может пониматься как операторное. Чтобы проследить возникновение аксиальной аномалии, нам придется прибегнуть к регуляризации, которая сохраняет калибровочную инвариантность и связывает аномалию с физикой на малых расстояниях [8]. Запишем

$$j^{5\mu} = \bar{\psi}\left(x+\frac{\epsilon}{2}\right)\gamma^{\mu}\gamma^{5}W\left(x+\frac{\epsilon}{2},x-\frac{\epsilon}{2}\right)\psi(x-\epsilon/2),$$

$$W\left(x+\frac{\epsilon}{2},x-\frac{\epsilon}{2}\right) = \exp\left(-ie\int_{x-\frac{\epsilon}{2}}^{x+\frac{\epsilon}{2}}A_{\nu}(y)dy^{\nu}\right).$$

В формализме реального времени выражение для пропагатора фермионов в безмассовом случае имеет вид [9]:

$$S_F(p) = p_i\gamma^i\Bigg(\frac{i}{p^2+i0^+} - 2\pi\delta(p^2)(n_f(|p_0|-\mathrm{sign}(p_0)\mu))\Bigg). \tag{5}$$

Подставляем пропагатор в выражение для тока и получаем два вклада:

$$j^{5x}_{IR} = -\mathrm{Tr}\int\frac{d^2p}{2\pi}\gamma^x\gamma^5p_i\gamma^i\delta(p^2)n_f(E(p_0)),$$
$$E(p_0) = |p_0| - \mathrm{sign}(p_0)\mu,$$
$$j^{5x}_{IR} = \mathrm{Tr}\int\frac{dp}{2\pi}(n_f(|p|-\mu)-(n_f(|p|+\mu)) = \frac{\mu}{\pi}.$$

Инфракрасная часть отвечает за ЭРК и не содержит расходимости. Запишем дивергенцию аксиального тока в массивном случае:

$$\partial_{\mu}j^{5\mu}(x,\epsilon) = -iej^{5\mu}(x,\epsilon)\epsilon^{\nu}F_{\mu\nu} + M(x,\epsilon), \tag{6}$$

$$M(x,\epsilon) = 2im\bar{\psi}\left(x+\frac{\epsilon}{2}\right)\gamma^5W\left(x+\frac{\epsilon}{2}x-\frac{\epsilon}{2}\right)\psi\left(x-\frac{\epsilon}{2}\right), \tag{7}$$

$$I = -j^{\mu 5}\epsilon^{\nu} = -\int\frac{d^2p}{(2\pi)^2}\gamma^{\mu}\gamma^5\epsilon^{\nu}\exp(ip\cdot\epsilon)G(p), \tag{8}$$

$$I = \int\frac{d^2p}{(2\pi)^2}i\frac{\partial}{\partial p_{\nu}}\exp(ip\cdot\epsilon)G(p), \tag{9}$$

$$I = -\int\frac{d^2p}{(2\pi)^2}i\exp(ip\cdot\epsilon)\frac{\partial}{\partial p_{\nu}}G(p). \tag{10}$$

Мы можем сделать поворот Вика и свести интеграл к интегралу по бесконечно удаленной 1-сфере, воспользуемся:

$$\int d^2p\frac{\partial}{\partial p_{\nu}} \to \oint dS^{\nu} = \oint |p|d\Omega\frac{p^{\nu}}{|p|}, \tag{11}$$

$$p^{\nu}p_{\alpha} \to \frac{\delta^{\nu}_{\alpha}}{2}p^2. \tag{12}$$

Здесь $d\Omega$ – телесный угол, который равен 2π. С учетом выражения для пропагатора получаем:

$$\partial_{\mu}j^{5\mu} = \frac{e}{2\pi}\epsilon^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + 2im\bar{\psi}(x)\gamma^5\psi(x). \tag{13}$$

Необходимо отметить, что с точки зрения метода эпсилон раздвижки – аномалия существенно ультрафиолетовый эффект и сводится к потоку через бесконечно удаленную поверхность, а вот КЭ связан с инфракрасным поведением в теории[2)]. В рамках этого же рассмотрения очевидно, что распределение Ферми не влияет на коэффициент в аномалии, поскольку обращается в нуль при интегрировании. Из всего вышесказанного следует, что влияние взаимодействия на этих масштабах может быть различным. Например, при введении массы фермионов аномалия не изменится, а ЭРК получит поправку $n_f(|p|-\mu) \to n_f(\sqrt{p^2+m^2}-\mu)$. Подобное рассмотрение дает возможность привести примеры перенормируемых теорий, в которых ЭРК получает поправки из-за взаимодействия.

4. Киральный эффект в теории с регуляризацией. Вопрос существования кирального эффекта является более сложным, в связи с проблемами регуляризации теории (см. ниже). Нас будут интересовать два вопроса: можно ли из выражения для аксиальной аномалии получить выражение для тока и может ли этот ток существовать в равновесии в хорошо определенной теории? Чтобы ответить на первый вопрос, рассмотрим действие [11]:

$$S = \int dtdx\bar{\psi}(x,t)i\gamma^{\mu}(\partial_{\mu} - ieA_{\mu} - b^5_{\mu}\gamma^5)\psi(x,t).$$

Сделаем преобразование:

$$\psi \to \exp(-ids\theta(x)\gamma^5/2)\psi, \tag{14}$$
$$\bar{\psi} \to \bar{\psi}\exp(-ids\theta(x)\gamma^5/2), \tag{15}$$

$s \in [0,1], \theta(x) = 2b_{\mu}x_{\mu}$, ds – дифференциальный параметр, в бесконечно малом калибровочном киральном преобразовании, параметризующий бесконечную последовательность таких преобразований. Тогда в функциональном интеграле после замены переменных мы получим:

$$Z = \int D\psi^+D\psi J\exp(-S(\psi^+,\psi)), \tag{16}$$

$$J = \det(U^{-2}) = e^{\ln(\det U^{-2})}. \tag{17}$$

В итоге:

$$J = \exp\left(-ids\int d^2x\frac{e}{4\pi}\theta(x)\epsilon^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right) \tag{18}$$

2) Без введения эпсилон-раздвижки мы бы столкнулись с расходимостью, которая описана в [10].

и получаем действие:

$$S = \int_0^1 ds \int d^2x \frac{e\theta(x)}{4\pi} \epsilon^{\mu\nu} F_{\mu\nu}. \quad (19)$$

Преобразуем:

$$S = \int d^2x \epsilon^{\nu\mu} \frac{e\partial_\mu\theta(x)}{2\pi} A_\nu, \quad (20)$$

что приводит к току:

$$j^\nu = \frac{\epsilon^{\nu\mu}e}{2\pi}\partial_\mu\theta(x). \quad (21)$$

В том случае, если $\theta(x) = 2\mu_5 t$, мы приходим к выражению для КЭ

$$j^x = -\frac{e\mu_5}{\pi} \quad (22)$$

и плотности аксиального заряда

$$j^{50} = -\frac{e\mu_5}{\pi}. \quad (23)$$

Формально, можно сказать, что плотность аксиального заряда индуцировала векторный ток, но механизм, приведенный выше, этого не подразумевает, хотя b_0^5, на первый взгляд, играет роль химического потенциала. Рассмотрим теперь термодинамическое равновесие и введем химический потенциал согласно стандартным правилам

$$H_D \to H_f = H_D + \mu_a Q_a, \quad (24)$$

$$H_f = -\psi^+\sigma^z(\frac{\partial}{\partial x} - \mu_5) + \gamma^0 m. \quad (25)$$

Обыкновенно химический потенциал вводится по отношению к сохраняющимся зарядам, что подразумевает требование $m = 0$, но мы обсудим оба случая. Начнем с $m = 0$, тогда заряды левых и правых фермионов сохраняются по отдельности:

$$Z = \int D\psi^+ D\psi \exp(-\int d\tau dx \psi^+(-\partial_\tau + H_f)\psi),$$

$$\Omega = -T\ln Z.$$

Сосредоточимся на вычислениях для левых фермионов, что приводит к потенциалу вида:

$$\Omega_L = -T\sum_n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi} \ln\left(-\frac{i}{T}(-i\omega_n - p - \mu_l)\right). \quad (26)$$

Пользуясь симметричностью спектра относительно нуля, мы можем записать

$$\Omega_L = -T\int_0^\infty \frac{dp}{2\pi}\left(p + T\ln\left(1 + \exp\left(\frac{-p-\mu_l}{T}\right)\right) + \right.$$
$$\left. + T\ln\left(1+\exp\left(\frac{-p+\mu_l}{T}\right)\right)\right) = -\frac{\mu_l^2}{4\pi^2} - \frac{\pi T^2}{12}. \quad (27)$$

Но в случае массивных частиц, проделывая сходные манипуляции, мы бы пришли к выражению:

$$\Omega = -T\int_{-\infty}^\infty \frac{dp}{2\pi}\left(\frac{E_p}{2} + 2T\ln\left(1+\exp\left(\frac{-E_p}{T}\right)\right)\right), \quad (28)$$

$$E_p = \sqrt{(p-\mu_5)^2 + m^2}.$$

В этом случае мы не можем выделить вакуумный вклад и сталкиваемся с проблемой термодинамического описания, в частности с вычислением интеграла в (28), который является расходящимся. Это также приводит к проблемам с некоторыми регуляризациями, например, Паулли–Вилларса, поскольку духовые степени свободы обладают массой, а значит мы не можем привести стандартный аргумент о том, что их вклад подавлен по функции распределения $n_F(\frac{M}{T})$, $M \to \infty$.

Получим выражение для КЭ при помощи метода эпсилон раздвижки в безмассовом случае. Введем конечный размер системы L (в конце положим $L \to \infty$) и периодические граничные условия, это позволит нам понять происхождение расходимостей. Мы знаем спектр Гамильтониана, а также, что $[Q_{L/R}, H] = 0$. При конечных температурах и химическом потенциале нам необходимо вычислить суммы:

$$Q_l = \sum_{k=-\infty}^{\infty} n_f\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{2\pi}{L} - \mu_l\right), \quad (29)$$

$$Q_R = \sum_{k=-\infty}^{\infty} n_f\left(-\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{2\pi}{L} + \mu_r\right). \quad (30)$$

Сосредоточимся на левом заряде. Используем для отрицательных энергий свойство $n_F(-E-\mu) = 1 - n_f(E+\mu)$, тогда сумма распадается на хорошо определенную сходящуюся часть и вакуумный вклад:

$$Q_l = \sum_{-\infty}^{-1} 1 + \sum_{k=0}^{\infty}(n_f(E_k - \mu_l) - n_f(E_k + \mu_l)). \quad (31)$$

Просуммируем бесконечную сумму из единиц. Введем регулятор, сохраняющий калибровочную инвариантность [12]:

$$Q_{L,\mathrm{vac}} = \sum_{-\infty}^{-1} \exp\left(-i\epsilon\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{2\pi}{L} + A_x\right)\right). \quad (32)$$

В пределе $\epsilon \to 0$ мы получаем выражение

$$Q_{L,\mathrm{vac}} = \frac{iL}{2\pi\epsilon} + \frac{L}{2\pi}A_x + O(\epsilon). \quad (33)$$

Аналогично для правых:

$$Q_{R,\mathrm{vac}} = \frac{-iL}{2\pi\epsilon} - \frac{L}{2\pi}A_x + O(\epsilon). \quad (34)$$

Из вакуумной части мы можем получить выражение для аномалии ($Q = Q_L + Q_R, Q_5 = Q_L - Q_R = 2\frac{L}{2\pi}A_x$). Возникает искушение учесть влияние калибровочного поля и на распределение Ферми. Делаем сдвижку в импульсе $p - A_x$ и проделываем вычисления для изменения в левом заряде. В таком случае в термальной части также происходит изменение заряда. Но данный пример подсказывает нам, что мы просто дважды учли один и тот же вклад. Причина этой ошибки очень проста, термодинамические потенциалы строятся по отношению к основному состоянию, а значит, возникает вопрос: относительно какого основного состояния мы отсчитываем наши возбужденные уровни, заряды и т.д? Если мы рассматриваем внешнее поле как адиабатическое, а переход как череду равновесных состояний, то все параметры системы измеряются относительно исходного вакуума, а значит, мы можем рассмотреть этот процесс как процесс, влияющий только на распределение Ферми, поскольку вакуумный вклад мы не меняем. Второй способ – переход сначала в новое вакуумное состояние, а уже потом построение термодинамики (такое описание повлияет, например, на начало отсчета температуры). В невзаимодействующем безмассовом случае результаты совпадают.

Что касается тока, то мы можем записать

$$\langle\langle j^x \rangle\rangle_{T,\mu_{L,R}} = \langle\langle q_l \rangle\rangle_{T,\mu_l} - \langle\langle q_r \rangle\rangle_{T,\mu_r}, \qquad (35)$$

что с учетом выражения для большого канонического потенциала приводит к плотности тока КЭ:

$$\langle\langle j^x \rangle\rangle_{T,\mu_{L,R}} = \frac{\mu_l}{2\pi} - \frac{\mu_r}{2\pi} = \frac{\mu_5}{\pi}. \qquad (36)$$

5. Физические аргументы. Мы привели доказательства существования КЭ в равновесии, но без учета влияния самого тока. Мы продемонстрировали, что результат может зависеть от регуляризации, а значит, нам необходимы физические аргументы для ответа на вопрос о существовании равновесного КЭ. Если рассматривать уравнения для электрического поля с учетом выражения для тета-члена, то мы получим:

$$\partial_0 F^{0x} = j^x. \qquad (37)$$

Это означает, что система не может быть стационарной, поскольку уже на уравнениях движения с учетом квантовых поправок возникает неограниченный рост электрического поля, а значит, в случае двух пространственно-временных измерений мы можем говорить о КЭ только как о неравновесном эффекте. Для ЭРК подобные аргументы не могут быть приведены, а значит он может существовать в равновесии. Если же система эффективно пространственно одномерна, то подобная аргументация неприменима, поскольку электрический ток индуцирует лишь магнитное поле, но в этом случае могут возникать другие проблемы [13, 5, 6].

6. Заключение. Было показано, что мир с одним пространственным измерением представляет из себя прекрасную площадку для изучения киральных эффектов. Были вычислены ЭРК и КЭ в теориях с регуляризацией при помощи метода эпсилон-раздвижки. В обоих случаях была продемонстрирована связь эффектов с аксиальной аномалией, показано, что в случае ЭРК при учете массы выражение для тока изменяется, а для аномалии нет. Был получен большой термодинамический потенциал для теории с киральными фермионами и киральным потенциалом, показана проблема с вычислением в массивном случае и как следствие проблема с регуляризацией массивной теории и использование некоторых регуляризаций для сокращения вакуумного вклада. Эта проблема не возникает в случае обыкновенного векторного потенциала. Например, в регуляризации Паули–Вилларса духовые степени свободы не вносят вклад в термодинамическую область из-за подавления в термальных распределениях по массе. Все эти наблюдения начинают играть существенную роль при учете взаимодействия, поскольку поведение систем с векторным и аксиальным потенциалами будет различным.

Крайне интересным представляется вопрос о влиянии взаимодействия на рассматриваемую задачу. Проводимость в эксперименте с тонким проволочками мало зависит от взаимодействия, и можно было бы предположить, что она выражается через топологически защищенную величину в импульсном пространстве [14–17]. Вполне возможно, что она может описываться по аналогии с Холловской проводимостью [18].

Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда # 21-12-00237.

1. M. A. Metlitski and A. R. Zhitnitsky, Phys. Rev. D **72**, 045011 (2006).
2. M. Puhr and P. V. Buividovich, Phys. Rev. Lett. **118**(19), 192003 (2017); arXiv: 1611.07263 [hep-lat].
3. K. Fukushima, D. E. Kharzeev, and H. J. Warringa, Phys. Rev. D **78**, 074033 (2008).
4. A. Vilenkin, Phys. Rev. D **21**, 2260 (1980).
5. M. A. Zubkov, Phys. Rev. D **93**(10), 105036 (2016); arXiv:1605.08724 [hep-ph].

6. P. V. Buividovich, Nucl. Phys. A **925**, 218 (2014); doi:10.1016/j.nuclphysa.2014.02.022; arXiv:1312.1843 [hep-lat].
7. A. Alekseev, V. Cheianov, and J. Froehlich, Phys. Rev. Lett. **81**, 3503 (1998); arXiv:cond-mat/9803346.
8. B. L. Ioffe, Int. J. Mod. Phys. A **21**, 6249 (2006); arXiv:hep-ph/0611026.
9. M. Laine and A. Vuorinen, arxiv.org/abs/1701.01554.
10. Z. V. Khaidukov and M. A. Zubkov, Phys. Rev. D **95**, 074502 (2017); arXiv: 1701.03368.
11. A. A. Zyuzin and A. A. Burkov, Phys. Rev. B **86**, 115133 (2012).
12. М. А. Шифман, УФН **157**, 561 (1989).
13. Z. V. Khaidukov, V. P. Kirilin, A. V. Sadofyev, and V. I. Zakharov, Nucl. Phys. B **934**, 521 (2018); e-Print: 1307.0138 [hep-th].
14. G. E. Volovik, *The Universe in a Helium Droplet*, Clarendon Press, Oxford (2003).
15. G. E. Volovik, Lect. Notes Phys. **870**, 343 (2013); arXiv:1111.4627 [hep-ph].
16. M. A. Zubkov, Ann. Physics **373**, 298 (2016); arXiv:1603.03665 [cond-mat.mes-hall].
17. M. A. Zubkov, Phys. Rev. D **93**(10), 105036 (2016); arXiv:1605.08724 [hep-ph].
18. C. X. Zhang and M. A. Zubkov, J. Phys. A: Math. Theor. **53**, 195002 (2020).