

Системы вихрей в бинарном бозе-конденсате типа “ядро-оболочка”

В. П. Рубан¹⁾

Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН, 142432 Черногловка, Россия

Поступила в редакцию 29 июля 2022 г.

После переработки 29 июля 2022 г.

Принята к публикации 30 июля 2022 г.

Численно в рамках связанных уравнений Гросса–Питаевского моделируется захваченная ловушкой бозе-конденсированная смесь из двух типов холодных атомов, существенно различающихся по массе. В режиме разделения фаз возможна конфигурация, состоящая из безвихревого ядра и пронизанной квантованными вихрями оболочки. Динамические свойства вихрей в оболочке зависят от нескольких параметров системы. Исследование направлено на поиск физически реализуемых параметрических областей, соответствующих долгоживущим, сильно нестационарным системам нескольких вихрей, присоединенных к ядру. Представлен ряд реалистических численных примеров, в которых конфигурации из трех пар вихрей существовали на протяжении многих сотен характерных времен.

DOI: 10.31857/S1234567822170104, EDN: jtevnl

Введение. В физике ультрахолодных бозе-конденсированных газов большой интерес вызывают многокомпонентные смеси, состоящие либо из различных химических (щелочных) элементов, либо из различных изотопов одного и того же элемента, либо из одинаковых изотопов в разных (сверхтонких) квантовых состояниях. Такие системы по своим статическим и динамическим свойствам намного богаче в сравнении с однокомпонентными бозе-конденсатами [1–5]. Среди экспериментально реализованных бинарных бозе-конденсатов мы здесь упомянем ^{87}Rb - ^{87}Rb [6], ^{85}Rb - ^{87}Rb [7, 8], ^{39}K - ^{87}Rb [9], ^{41}K - ^{87}Rb [10, 11], ^{23}Na - ^{39}K [12] и ^{23}Na - ^{87}Rb [13].

Теоретические исследования достаточно разреженных смесей бозе-газов (с атомными массами m_j) в пределе нулевой температуры можно проводить с помощью связанных уравнений Гросса–Питаевского, которые задают эволюцию соответствующих волновых функций,

$$i\hbar\partial_t\Psi_j = -\frac{\hbar^2}{2m_j}\nabla^2\Psi_j + \left[V_j(\mathbf{r}) + \sum_k G_{jk}|\Psi_k|^2\right]\Psi_j, \quad (1)$$

где $V_j(\mathbf{r})$ – внешний потенциал, действующий на j -ую компоненту смеси, G_{jk} – симметричная матрица нелинейных взаимодействий, определяемая длинами рассеяния a_{jk} [2]:

$$G_{jk} = 2\pi\hbar^2 a_{jk}(m_j^{-1} + m_k^{-1}). \quad (2)$$

Уравнения Гросса–Питаевского являются наиболее простой, но весьма содержательной моделью связанных сверхтекучих систем (см. для сравнения обзор

по гелию [14]). В частности, поскольку в (1) нет перекрестных членов в кинетической энергии, здесь полностью отсутствует эффект Андреева–Башкина, при котором сверхтекучая скорость одной компоненты дает вклад в ток другой компоненты [15, 16].

Как правило, некоторые коэффициенты G_{jk} зависят от фонового однородного магнитного поля и могут настраиваться в широких пределах по желанию экспериментатора с использованием резонансов Фешбаха [17]. Достаточно сильное перекрестное отталкивание между двумя видами волн материи включает режим пространственного разделения фаз, условием чего служит неравенство [18, 19]

$$G_{12}^2 - G_{11}G_{22} > 0. \quad (3)$$

Относительно узкая доменная стенка между фазами характеризуется эффективным поверхностным натяжением [4, 20]. Пространственное разделение является основным фактором во многих интересных явлениях, таких как динамика пузырей [21], квантовые аналоги классических гидродинамических неустойчивостей (Кельвина–Гельмгольца [22, 23], Рэлея–Тейлора [24–26], Плато–Рэлея [27]), параметрическая неустойчивость капиллярных волн на границе раздела фаз [28, 29], сложные текстуры во вращающихся бинарных конденсатах [30–32], трехмерные топологические структуры [33–37], капиллярная плаучность плотных капель в захваченных несмешивающихся бозе-конденсатах [38], и т. д.

Важно еще, что потенциалы ловушки, вообще говоря, не одинаковы для разных типов атомов. Напри-

¹⁾e-mail: ruban@itp.ac.ru

мер, в случае оптической ловушки, сформированной лазерным излучением, справедлива формула

$$V_j(\mathbf{r}) = -\frac{\alpha_j}{2}I(\mathbf{r}) + m_jgz, \quad (4)$$

где α_j – поляризуемость атома j -го типа, $I(\mathbf{r})$ – усредненный по времени квадрат электрического поля лазерного излучения, g – ускорение силы тяжести. Поскольку поляризуемости компонент по-разному зависят от частоты электромагнитной волны, имеется теоретическая возможность путем выбора частоты оптического поля распоряжаться относительной силой ловушки и расположением в пространстве минимумов потенциала для каждой компоненты [39–41]. Мы далее будем подразумевать, что либо подобрано специальное отношение поляризуемостей $\alpha_2/\alpha_1 = m_2/m_1$ (при котором гравитация “не раздвигает” в пространстве минимумы потенциалов), либо дело происходит в невесомости, и тогда остается свобода в выборе важного параметра

$$\alpha = \alpha_2 m_1 / (\alpha_1 m_2).$$

В данной работе отмеченные возможности настройки параметров системы имеются в виду при численном поиске оптимальных режимов для долговременной динамики вихревых возмущений в специфических структурах типа “ядро-оболочка”. Подобные конфигурации в ряде случаев являются основным состоянием бинарных бозе-конденсатов [42–45]. Вблизи достаточно глубокого и/или широкого минимума внешнего потенциала формируется “ядро”, состоящее из одной компоненты, а вокруг ядра располагается “оболочка” из другой компоненты.

Предметом нашего исследования далее будет динамика нескольких квантованных вихревых нитей, каждая из которых пронизывает оболочку внутрь к ядру (отрицательный вихрь) либо обратно (положительный вихрь) [46]. Пример нетривиальной динамики таких присоединенных вихрей представлен на рис. 1 и на видео [47]. Надо сказать, что в работе [48] рассматривались качественно аналогичные топологические структуры в смеси ^3He - ^4He (капелька ^4He , погруженная в жидкость ^3He). Суммарный заряд вихрей всегда равен нулю. Ядро при этом будет оставаться безвихревым. В зависимости от малости отношения толщины оболочки к размеру ядра возможны два режима. В случае тонких оболочек имеет место более простой (квази)двумерный режим, чем-то напоминающий движение концентрированных вихрей в атмосферах некоторых планет. Динамика в этом случае приблизительно подчиняется классической модели точечных вихрей на искривлен-

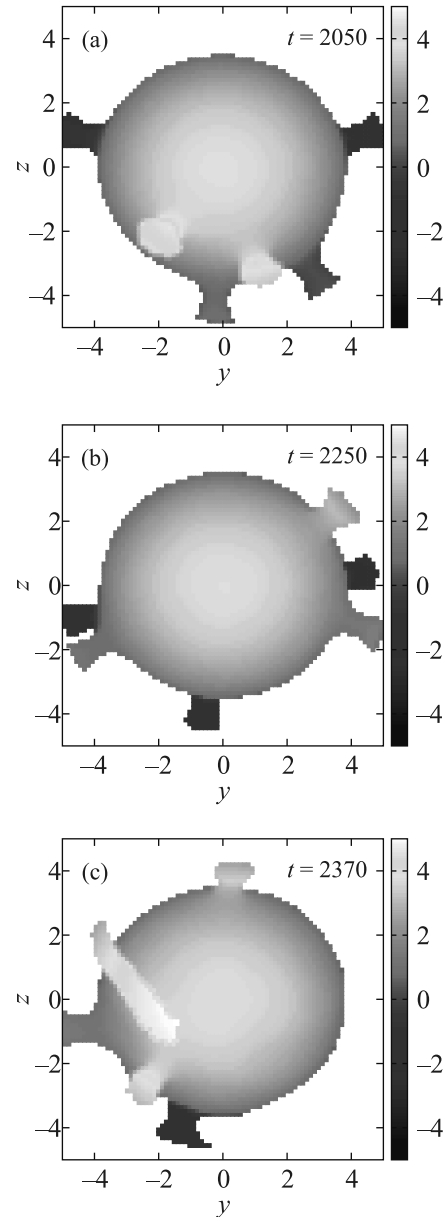


Рис. 1. (Цветной онлайн) Пример долгоживущей нестационарной системы трех пар присоединенных вихрей в квазидвумерном режиме при скомпенсированной силе тяжести (т.е. при $\alpha = 1$). Цветная шкала соответствует x -координате тех точек численной решетки, которые являются ближайшими к поверхности, определяемой уравнением $|A(\mathbf{r}, t)|^2 = 0.5|A_0(\mathbf{r})|^2$. Показаны только точки внутри области $|A_0(\mathbf{r})|^2 > 0.2\mu_1$, и поэтому внешние концы вихревых нитей “отсечены”

ной поверхности [49–51]. Роль ядра в этом случае сводится к предоставлению практически неподвижной потенциальной ступеньки, поддерживающей оболочку изнутри. Другой режим, трехмерный, оказывается гораздо более сложным [46]. Когда толщина обо-

лочки сравнима с радиусом ядра, последнее существенно участвует в динамике системы. В зависимости от параметров, это участие может быть как благоприятным с точки зрения длительного сохранения числа вихрей, несмотря на их интенсивное взаимодействие, так и неблагоприятным.

Как было показано в недавней работе [46] на примере равных атомных масс, существует область параметров, где нежелательный процесс формирования близкой пары вихрь-антивихрь с последующим отрывом вихревой нити от границы с ядром оказывается подавлен за счет оптимального выбора коэффициентов нелинейного взаимодействия. В данной работе путем многих численных экспериментов подобные благоприятные условия впервые найдены и для некоторых смесей с существенно разными атомными массами. Интересно, что для трехмерного динамического режима оптимальными оказываются конфигурации, в которых ядро состоит из более легких атомов, а оболочка — из более тяжелых. При этом введенный выше параметр α , равный отношению квадратов собственных частот гармонической ловушки, отнюдь не равен единице.

Основные параметры модели. Ограничимся квадратичным приближением для внешних потенциалов. Пусть гармоническая ловушка характеризуется поперечной частотой $\omega_1 = \omega$ для первого типа атомов (формирующих оболочку), и $\omega_2 = \sqrt{\alpha}\omega$ для второго типа атомов, образующих ядро. Введем обозначение $m = m_2/m_1$ для отношения атомных масс. Выбираем масштаб $\tau = 1/\omega$ для времени, $l_{tr} = \sqrt{\hbar/\omega m_1}$ для длины, и $\epsilon = \hbar\omega$ для энергии. Заметим, что в реальных экспериментах частота $\omega/2\pi \sim 100$ Гц, что дает характерную длину ловушки l_{tr} порядка нескольких микрометров. Поскольку типичные длины рассеяния порядка сотни боровских радиусов, т.е. $a_{jk} \sim a \sim 100a_0$, что составляет несколько нанометров, мы с большим запасом имеем неравенство $(l_{tr}/a) \sim 10^3 \gg 1$, необходимое для применимости уравнений Гросса–Питаевского.

Запишем уравнения движения для комплексных волновых функций $A(\mathbf{r}, t)$ (оболочка) и $B(\mathbf{r}, t)$ (ядро) в безразмерном виде,

$$i\dot{A} = -\frac{1}{2}\nabla^2 A + [V + |A|^2 + g_{12}|B|^2] A, \quad (5)$$

$$i\dot{B} = -\frac{1}{2m}\nabla^2 B + [m\alpha V + g_{21}|A|^2 + g_{22}|B|^2] B, \quad (6)$$

где $g_{jk} = G_{jk}/G_{11}$ — отнормированные нелинейные коэффициенты, $V = (x^2 + y^2 + \lambda^2 z^2)/2$ — безразмерный потенциал, включающий в себя параметр анизотропии λ . Мы далее зафиксируем значение $\lambda = 1.1$, чтобы подчеркнуть необязательность строгой сферической симметрии.

При такой нормировке сохраняющиеся числа захваченных атомов даются формулами

$$N_1 = \frac{l_{tr}}{4\pi a_{11}} \int |A|^2 d^3\mathbf{r} = (l_{tr}/a_{11})n_1, \quad (7)$$

$$N_2 = \frac{l_{tr}}{4\pi a_{11}} \int |B|^2 d^3\mathbf{r} = (l_{tr}/a_{11})n_2. \quad (8)$$

Отсюда ясно, что реалистическим числам $N_1, N_2 \sim 10^6$ соответствуют значения $n_1, n_2 \sim 10^3$.

Равновесные состояния, как известно, характеризуются двумя химическими потенциалами μ_1 и μ_2 . В рассматриваемых нами условиях $\mu_1 \gg 1$ и $\mu_2 \gg 1$, так что фоновые профили плотности числа частиц даются приближением Томаса–Ферми

$$|A_0|^2 \approx [\mu_1 - V(x, y, z)], \quad (9)$$

$$|B_0|^2 \approx [\mu_2 - m\alpha V(x, y, z)]/g_{22}, \quad (10)$$

причем первая формула верна внутри оболочки, а вторая — внутри ядра. Эффективный поперечный размер конденсата таким образом есть $R_{\perp} = \sqrt{2\mu_1}$, тогда как для характерной толщины вихревых линий в оболочке (в трехмерном режиме) справедлива оценка $\xi \sim 1/\sqrt{\mu_1}$. Поскольку мы будем далее иметь дело с величинами химических потенциалов порядка нескольких десятков (конкретно в численных экспериментах бралось значение $\mu_1 = 18$), физическая толщина вихрей ξ_{tr} все еще на порядки превышает длины рассеяния, как и должно быть.

В данном приближении равновесная форма поверхности ядра определяется требованием примерного равенства “гидродинамических давлений” $P_1 = |A_0|^4/2$ и $P_2 = g_{22}|B_0|^4/2$ (без учета поверхностного натяжения $\sigma \sim |A_0|^3$), т.е.

$$[\mu_1 - V(x, y, z)] = [\mu_2 - m\alpha V(x, y, z)]/\sqrt{g_{22}}. \quad (11)$$

Для конвективной устойчивости “параметр стратификации” должен превышать единицу,

$$S = m\alpha/\sqrt{g_{22}} > 1. \quad (12)$$

При конечных μ_1 и μ_2 это неравенство должно выполняться с некоторым запасом, поскольку поверхностное натяжение на неоднородном фоне оказывает дестабилизирующий эффект. Сразу же скажем, что для трехмерной динамики присоединенных вихрей оптимальные значения S оказались в диапазоне 1.2–1.5, тогда как в квазидвумерном режиме лучше работает жесткая стратификация с большими S .

Численные результаты. Уравнения движения (5)–(6) решались численно методом, подробно описанным в работе [46]. Значения нелинейных коэффициентов брались из реальных данных по длинам

рассеяния для смесей ^{39}K - ^{87}Rb [9], ^{41}K - ^{87}Rb [10, 11], ^{23}Na - ^{39}K [12] и ^{23}Na - ^{87}Rb [13].

В начальный момент времени имелось три пары вихревых нитей, ориентированных примерно вдоль трех декартовых осей. Такое количество вихрей выбрано по той причине, что последующее движение в этом случае оказывается, как правило, сильно неупорядоченным и провоцирующим вихревые пары на отрыв. И если даже несмотря на такие условия, поверхностное натяжение удерживает вихри в течение долгого времени, значит, действительно данный феномен заслуживает внимания.

В большинстве симуляций после достаточно бурной динамики вихрей через какое-то время все же происходил описанный выше отрыв вихревой нити от поверхности ядра. Непосредственно перед отрывом пара вихрь-антивихрь имела вид буквы V, основание которой затем отсоединялось от внутренней границы оболочки. Время этого события T фиксировалось как главный результат и служило грубой оценкой “качества” выбранной комбинации параметров. Хорошим результатом можно считать значения $T \gtrsim 1000$, что на два порядка превышает характерный период ловушки. За такое время вихри, как правило, успевают много раз поменять свое взаимное расположение, так что можно говорить о долгоживущих вихревых структурах. Надо также иметь в виду, что в реальных экспериментах бозе-конденсаты обычно существуют в относительно сохранном виде не более нескольких секунд. Поэтому при частоте ловушки около 100 Гц безразмерному времени $T \approx 630$ как раз соответствует одна секунда реального времени.

Пример продолжительной динамики в квазидвумерном режиме представлен на рис. 1 при значениях параметров, свойственных смеси ^{23}Na - ^{87}Rb [13]: $a_{11} = 52a_0$, $a_{22} = 99a_0$, $a_{12} = 83a_0$, что дает $m = 3.78$, $g_{22} = 0.5$, $g_{12} = 1.0$. Числа атомов в этой симуляции равны $N_1 \approx (l_{\text{tr}}/a_{11}) \times 204$ и $N_2 \approx (l_{\text{tr}}/a_{11}) \times 594$. Соответствующее видео [47] демонстрирует сложный характер поведения вихрей, в том числе образование временных пар вихрь-антивихрь, которые быстро двигаются и сталкиваются с остальными вихрями. В результате подобных столкновений партнеры иногда меняются. В конце концов одна из таких пар отрывается от ядра, что видно на панели рис. 1с. Если взять более толстую оболочку, то отрыв вихревой нити происходит, как правило, существенно раньше, чему примером служит видео [52]. Следует также обратить внимание, что иногда образуются временные пары близких вихрей одного знака, но такие пары, разумеется, не способны аннигилировать.

Поскольку, кроме количества атомов ^{23}Na в оболочке, в системе ^{23}Na - ^{87}Rb можно менять перекрестную длину рассеяния, представляется интересным сравнить соответствующие времена жизни. Такое сравнение приведено на рис. 2. Очевидно, что значение $g_{12} = 1.0$ в данном случае наиболее благоприятное. При этом необходимо иметь в виду, что, в силу хаотического характера движения вихрей, время жизни практически является случайной величиной. Поэтому не следует воспринимать ломаные линии на рис. 2 слишком буквально. Они там проведены только для того, чтобы “было за что зацепиться глазу”. Главное, о чем свидетельствует данный рисунок – это существенная вероятность большого времени жизни сложной вихревой системы.

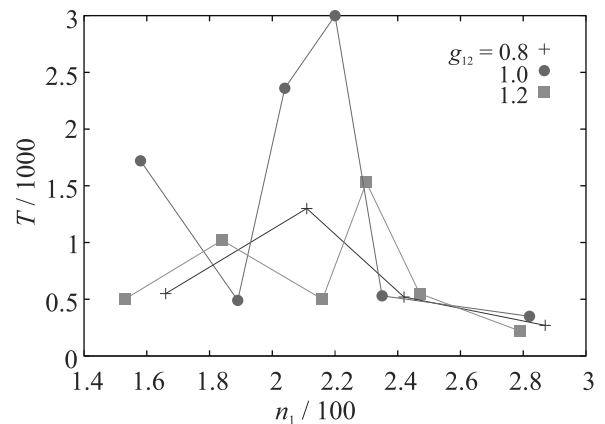


Рис. 2. (Цветной онлайн) Характерные времена жизни системы из трех пар вихрей в зависимости от количества атомов оболочки в смеси ^{23}Na - ^{87}Rb для трех значений g_{12} . Зависимости имеют не вполне регулярный характер, поскольку никакого усреднения по начальным конфигурациям вихрей здесь не проводилось

Качественно аналогичные результаты были получены и для тонких оболочек в смеси ^{41}K - ^{87}Rb .

Что касается существенно трехмерных структур, большие времена жизни удалось пронаблюдать, например, для смесей ^{23}Na - ^{39}K [12], причем в том варианте, когда более легкий ^{23}Na составляет ядро, а более тяжелый ^{39}K – оболочку. Отметим, что в этом случае от магнитного поля сильно зависят две длины рассеяния: $a_{\text{K-K}}$ и $a_{\text{Na-K}}$ (см. рис. 6 в работе [12]). Конвективная устойчивость обеспечивается достаточно большим значением параметра α в диапазоне 2.1–2.4. Соответствующий пример приведен на рис. 3 и на видео [53].

Последний видеопример [54] относится к смеси ^{23}Na - ^{87}Rb , когда оболочка состоит из ^{87}Rb . Взяв $a_{12} = 99a_0$, мы получаем $g_{22} \approx 2.0$, $g_{12} \approx 2.4$.

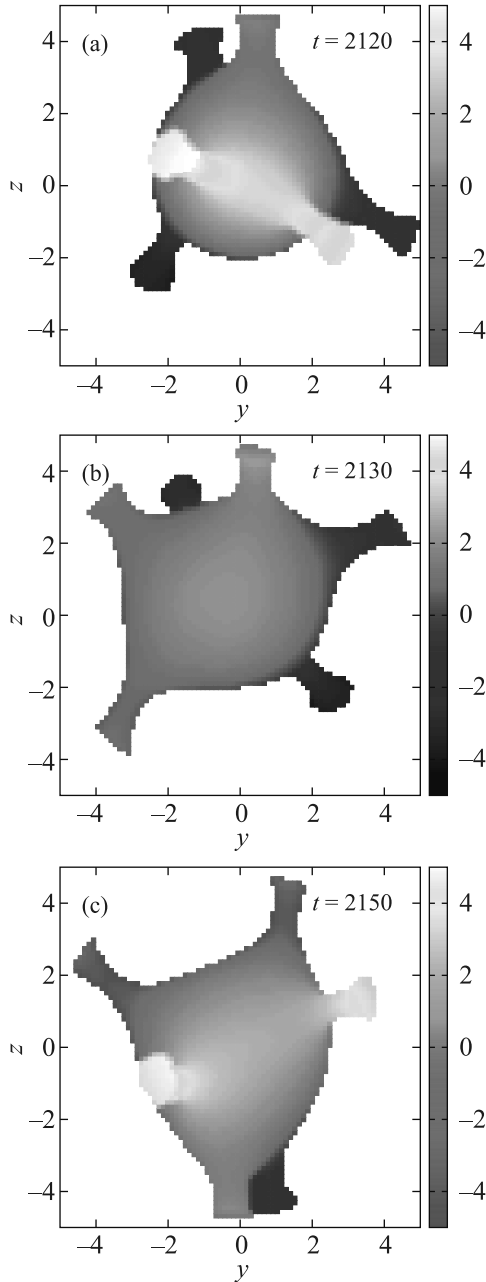


Рис. 3. (Цветной онлайн) Пример длительной трехмерной динамики трех пар присоединенных вихрей. В этом численном эксперименте использованы параметры, характерные для смеси ^{39}K - ^{23}Na : $a_{11} = 88a_0$, $a_{22} = 52a_0$, $a_{12} = 88a_0$. Это дает $m = 0.6$, $g_{22} = 1.0$, $g_{12} = 1.345$. Числа атомов равны $N_1 \approx (l_{\text{tr}}/a_{11}) \times 326$ и $N_2 \approx (l_{\text{tr}}/a_{11}) \times 107$. В отличие от рис. 1, здесь использовано значение $\alpha = 2.2$

Поскольку теперь $m \approx 0.26$, для устойчивости необходимы достаточно большие α . Взяв $\alpha = 7.0$, $n_1 = 333$, $n_2 = 69$, получаем относительно ре-

гулярное движение вихревой конфигурации, что продемонстрировано на видео [54].

Бросается в глаза общее свойство трехмерной динамики – как и в случае равных атомных масс, имеют место сильные отклонения формы ядра от равновесной.

С другими типами смесей пока не удалось получить столь же выразительных результатов.

Если при теоретическом рассмотрении не ограничиваться реально существующими зависимостями длин рассеяния от магнитного поля, а позволить себе их произвольные значения, как и произвольные отношения атомных масс, то можно указать на некоторую приближенную симметрию: трехмерная динамика двух систем с одинаковыми α , но с разными m качественно похожа (и в одинаковой мере благоприятна для сохранения вихрей), если, во-первых, одинаковы параметры стратификации,

$$\alpha m^{(1)} / \sqrt{g_{22}^{(1)}} = \alpha m^{(2)} / \sqrt{g_{22}^{(2)}} \approx 1.2 - 1.5,$$

а во-вторых, коэффициенты поверхностного натяжения равны между собой, что достигается юстировкой перекрестных нелинейных коэффициентов $g_{12}^{(1,2)}$. Действительно, гидродинамические части лагранжианов обеих систем можно привести к одинаковому виду, а вся разница будет в зависящих от масс “квантовых давлениях” и в зависящих от $g_{12}^{(1,2)}$ перекрестных нелинейных взаимодействиях. Но роль этих членов с точки зрения крупномасштабной динамики сводится к производству одного лишь коэффициента поверхностного натяжения.

Данная приближенная симметрия подтвердилась на частном примере $\alpha = 1$, $m^{(1)} = 1$, $g_{22}^{(1)} = 0.6$, $g_{12}^{(1)} = 1.2$ (эти значения были определены как оптимальные в работе [46]), поскольку долгоживущие присоединенные вихри были наблюдаемы также и в системе с параметрами $m^{(2)} = 2$, $g_{22}^{(2)} = 2.4$, $g_{12}^{(2)} = 2.4-2.6$.

Заключение. Таким образом, в этой работе впервые представлены численные примеры, указывающие на реальную перспективу наблюдения долговременной динамики пузырей с присоединенными квантовыми вихрями в захваченных ловушкой бинарных бозе-конденсатах с разными атомными массами. В некоторых численных экспериментах времена жизни систем трех пар вихрей оказались даже длиннее, чем в ранее промоделированной смеси ^{85}Rb - ^{87}Rb с примерно равными массами [46].

Интересно отметить, что требования к свойствам ядра оказываются противоположными для квазидвумерного и для полностью трехмерного режимов. Для двумерной динамики вихрей хорошо тяжелое и

жестко захваченное малоподвижное ядро, по которому легко скользит менее плотная оболочка. Для трехмерной динамики хорошо легкое ядро с эластичной границей, которая деформируется в ответ на тянущую силу со стороны вихревой пары. По этой же причине и стратификация в трехмерном случае не должна быть слишком жесткой.

1. T.-L. Ho and V.B. Shenoy, Phys. Rev. Lett. **77**, 3276 (1996).
2. H. Pu and N.P. Bigelow, Phys. Rev. Lett. **80**, 1130 (1998).
3. B.P. Anderson, P.C. Haljan, C.E. Wieman, and E.A. Cornell, Phys. Rev. Lett. **85**, 2857 (2000).
4. S. Coen and M. Haelterman, Phys. Rev. Lett. **87**, 140401 (2001).
5. G. Modugno, M. Modugno, F. Riboli, G. Roati, and M. Inguscio, Phys. Rev. Lett. **89**, 190404 (2002).
6. S. Tojo, Y. Taguchi, Y. Masuyama, T. Hayashi, H. Saito, and T. Hirano, Phys. Rev. A **82**, 033609 (2010).
7. J.P. Burke, Jr., J.L. Bohn, B.D. Esry, and C.H. Greene, Phys. Rev. Lett. **80**, 2097 (1998).
8. S.B. Papp, J.M. Pino, and C.E. Wieman, Phys. Rev. Lett. **101**, 040402 (2008).
9. L. Wacker, N.B. Jørgensen, D. Birkmose, R. Horchani, W. Ertmer, C. Klempt, N. Winter, J. Sherson, and J.J. Arlt, Phys. Rev. A **92**, 053602 (2015).
10. G. Thalhammer, G. Barontini, L. De Sarlo, J. Catani, F. Minardi, and M. Inguscio, Phys. Rev. Lett. **100**, 210402 (2008).
11. A. Burchianti, C. D’Errico, S. Rosi, A. Simoni, M. Modugno, C. Fort, and F. Minardi, Phys. Rev. A **98**, 063616 (2018).
12. T.A. Schulze, T. Hartmann, K.K. Voges, M.W. Gempel, E. Tiemann, A. Zenesini, and S. Ospelkaus, Phys. Rev. A **97**, 023623 (2018).
13. F. Wang, X. Li, D. Xiong, and D. Wang, J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. **49**, 015302 (2016).
14. M.M. Salomaa and G.E. Volovik, Rev. Mod. Phys. **59**, 533 (1987).
15. A.F. Andreev and E.P. Bashkin, ZhETF **69**, 319 (1975) [JETP **42**, 164 (1976)].
16. G.E. Volovik, Pis’ma v ZhETF **115**, 306 (2022).
17. C. Chin, R. Grimm, P. Julienne, and E. Tiesinga, Rev. Mod. Phys. **82**, 1225 (2010).
18. E. Timmermans, Phys. Rev. Lett. **81**, 5718 (1998).
19. P. Ao and S.T. Chui, Phys. Rev. A **58**, 4836 (1998).
20. B. Van Schaeybroeck, Phys. Rev. A **78**, 023624 (2008).
21. K. Sasaki, N. Suzuki, and H. Saito, Phys. Rev. A **83**, 033602 (2011).
22. H. Takeuchi, N. Suzuki, K. Kasamatsu, H. Saito, and M. Tsubota, Phys. Rev. B **81**, 094517 (2010).
23. N. Suzuki, H. Takeuchi, K. Kasamatsu, M. Tsubota, and H. Saito, Phys. Rev. A **82**, 063604 (2010).
24. K. Sasaki, N. Suzuki, D. Akamatsu, and H. Saito, Phys. Rev. A **80**, 063611 (2009).
25. S. Gautam and D. Angom, Phys. Rev. A **81**, 053616 (2010).
26. T. Kadokura, T. Aioi, K. Sasaki, T. Kishimoto, and H. Saito, Phys. Rev. A **85**, 013602 (2012).
27. K. Sasaki, N. Suzuki, and H. Saito, Phys. Rev. A **83**, 053606 (2011).
28. D. Kobayakov, V. Bychkov, E. Lundh, A. Bezett, and M. Marklund, Phys. Rev. A **86**, 023614 (2012).
29. D.K. Maity, K. Mukherjee, S.I. Mistakidis, S. Das, P.G. Kevrekidis, S. Majumder, and P. Schmelcher, Phys. Rev. A **102**, 033320 (2020).
30. K. Kasamatsu, M. Tsubota, and M. Ueda, Phys. Rev. Lett. **91**, 150406 (2003).
31. K. Kasamatsu and M. Tsubota, Phys. Rev. A **79**, 023606 (2009).
32. P. Mason and A. Aftalion, Phys. Rev. A **84**, 033611 (2011).
33. K. Kasamatsu, M. Tsubota, and M. Ueda, Phys. Rev. Lett. **93**, 250406 (2004).
34. H. Takeuchi, K. Kasamatsu, M. Tsubota, and M. Nitta, Phys. Rev. Lett. **109**, 245301 (2012).
35. M. Nitta, K. Kasamatsu, M. Tsubota, and H. Takeuchi, Phys. Rev. A **85**, 053639 (2012).
36. K. Kasamatsu, H. Takeuchi, M. Tsubota, and M. Nitta, Phys. Rev. A **88**, 013620 (2013).
37. S.B. Gudnason and M. Nitta, Phys. Rev. D **98**, 125002 (2018).
38. В.П. Рубан, Письма в ЖЭТФ **113**, 848 (2021).
39. M.S. Safronova, B. Arora, and C.W. Clark, Phys. Rev. A **73**, 022505 (2006).
40. L.J. LeBlanc and J.H. Thywissen, Phys. Rev. A **75**, 053612 (2007).
41. B. Arora, M.S. Safronova, and C.W. Clark, Phys. Rev. A **84**, 043401 (2011).
42. A.A. Svidzinsky and S.T. Chui, Phys. Rev. A **68**, 013612 (2003).
43. S. Gautam and D. Angom, J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. **43**, 095302 (2010).
44. R.W. Pattinson, T.P. Billam, S.A. Gardiner, D.J. McCarron, H.W. Cho, S.L. Cornish, N.G. Parker, and N.P. Proukakis, Phys. Rev. A **87**, 013625 (2013).
45. A. Wolf, P. Boegel, M. Meister, A. Balaž, N. Gaaloul, and M.A. Efremov, Phys. Rev. A **106**, 013309 (2022).
46. В.П. Рубан, ЖЭТФ **160**, 912 (2021).
47. <http://home.itp.ac.ru/ruban/28JUL2022/e1.avi>.
48. G.E. Volovik, Proc. Natl. Ac. Sci. USA **97**, 2431 (2000).
49. В.П. Рубан, Письма в ЖЭТФ **105**, 449 (2017).
50. K. Padavić, K. Sun, C. Lannert, and S. Vishveshwara, Phys. Rev. A **102**, 043305 (2020).
51. S.J. Bereta, M.A. Caracanhas, and A.L. Fetter, Phys. Rev. A **103**, 053306 (2021).
52. <http://home.itp.ac.ru/ruban/28JUL2022/e2.avi>.
53. <http://home.itp.ac.ru/ruban/28JUL2022/e3.avi>.
54. <http://home.itp.ac.ru/ruban/28JUL2022/e4.avi>.