Письма в ЖЭТФ, том 116, вып. 4, с. 204 – 210

Связанные состояния в континууме в квантово-механическом волноводе с резонатором субволнового размера

Н. М. Шубин, В. В. Капаев, А. А. Горбацевич[1)]

Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, 119991 Москва, Россия

Поступила в редакцию 24 мая 2022 г.
После переработки 24 июня 2022 г.
Принята к публикации 4 июля 2022 г.

Рассмотрена модель симметричного квантово-механического волновода с резонатором. Показана возможность формирования связанного состояния в континууме в такой системе при сколь угодно малой длине резонатора. Этот эффект не может быть объяснен в рамках простейшего двухмодового приближения в модели Фридриха–Винтгена, так как происходит в силу многомодовой интерференции и требует учета, как минимум, трех мод. Выводы аналитической модели подтверждены результатами численного моделирования волновода с расширением и притягивающим потенциалом примеси в резонаторе.

DOI: 10.31857/S1234567822160030, EDN: jhgiak

Введение. Связанные состояния в континууме (ССК) – это локализованные состояния с квадратично интегрируемой волновой функцией и энергией, лежащей в области непрерывного спектра. Первоначально они были описаны фон Нейманом и Вигнером как чисто математическая конструкция в квантовой механике. В последнее время предложено множество способов реализации ССК в реальных физических, преимущественно оптических, системах (см., например, обзоры [1, 2]). С позиций теории рассеяния, ССК представляет собой резонанс с нулевой шириной [3], возникающий, например, в результате коллапса резонанса Фано [4–6]. При этом ширина резонанса обращается в нуль вследствие деструктивной интерференции рассеянных волн. Как показали Фридрих и Винтген (ФВ), такая ситуация имеет место при рассеянии волн на двух локализованных состояниях [7]. В пространстве физических параметров ССК соответствует выделенной точке, небольшое отклонение от которой трансформирует ССК в резонанс со (сверх-) высокой добротностью (квази-ССК), что определяет широкий спектр его практических применений [8–10].

С точки зрения перспектив создания компактных оптических и фотонных систем в интегральном исполнении особый интерес вызывают резонансные структуры субволновых размеров [11]. Примером могут служить спазеры [12], в которых резонатор настроен на длину волны поверхностного плазмон-поляритона и имеет размеры много меньше длины волны излучаемого света. Существенный недостаток плазмон-поляритонных резонаторов связан с неизбежными потерями в металлических элементах конструкции. Поэтому в последнее время активно исследуются диэлектрические резонаторы [13]. Недавно были предложены и экспериментально реализованы квази-ССК в субволновых диэлектрических резонаторах [14, 15]. При этом субволновая природа таких квази-ССК непосредственно связана с тем, что механизм ФВ действует в результате сильного интерференционного взаимодействия двух локализованных мод (например, резонанса Ми и резонанса Фабри–Перо [14], двух резонансов Ми [15]), принадлежащих одному и тому же диэлектрическому резонатору. Характерная длина волны получающейся высокодобротной моды при этом определяется длиной волны резонанса Ми [16] и может быть существенно больше размера резонатора.

В квантово-механических волноводах ССК были подробно исследованы в двумерных структурах с различным соотношением между шириной волноводов h и резонатора H: начиная от “квантовых биллиардов” [17–19] с $h/H \ll 1$, где хорошо определены собственные состояния резонатора, и заканчивая однородными волноводами с протяженной примесью (квантовой ямой внутри волновода) [4, 5], где $h/H = 1$ и выделение собственных состояний области рассеяния представляется неоднозначным [20]. Примером физической реализации квантово-механического волновода может служить электронный проводник. При этом необходимо отметить, что в электронных проводниках существенны межэлектронные взаимодействия [21, 22], которые изменяют условия образования ССК, а также могут приводить к появле-

[1)]e-mail: gorbatsevichaa@lebedev.ru

нию новых ССК за счет кулоновского отталкивания. Механизм формирования ССК в системах, рассмотренных в работах [4, 5, 18, 19], соответствует двухмодовой модели ФВ, для которой характерный масштаб локализации (определяется длиной волны де Бройля) сопоставим с геометрическими размерами резонатора. Отметим, что ССК в двумерных неодносвязных акустических волноводах было подробно исследовано в работах [23, 24]. В частности, для граничных условий фон Неймана была показана возможность формирования ССК в волноводе с непроницаемым рассеивающим центром малого размера вдоль направления распространения (длины), создающим неодносвязность системы [24].

В настоящей работе на примере двумерного квантово-механического волновода с относительно большим соотношением h/H показано, что протяженное ССК может образовываться и в односвязной системе при сколь угодно малой длине рассеивающей области. Эффект имеет существенно многомодовую природу и его описание требует выхода за рамки двухмодовой модели ФВ. Предложено наглядное трехмодовое описание, демонстрирующее хорошее согласие с численными расчетами.

Аналитическая модель. Пусть имеется расположенный вдоль оси x симметричный (относительно зеркального отражения $x \mapsto -x$) двумерный квантово-механический волновод с резонатором. Задача рассеяния или задача на собственные значения в такой системе решается через двумерное уравнение Шредингера

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} + [E - U(x,y)]\,\Psi = 0 \qquad (1)$$

с соответствующими граничными условиями на бесконечности для волновой функции $\Psi(x,y)$. Для удобства аналитического рассмотрения выбраны единицы измерения, при которых $\hbar^2(2m)^{-1} = 1$.

Рассмотрим ситуацию, когда потенциальная энергия $U(x,y)$ есть кусочно-постоянная функция от координаты x: $U(x,y) = U_j(y)$ при $x_{j-1} < x \le x_j$, где индекс $j = \{1,2,3\}$ соответствует номеру области (1 и 3 – волновод, 2 – резонатор). В описываемой системе с одним резонатором (расширением) имеются только две границы, координаты которых в силу симметрии структуры равны: $x_1 = -x_2 = -L/2$, где L – длина резонатора. Наиболее удобным способом решения уравнения (1) в этом случае будет метод разделения переменных и разложения по собственным модам в поперечном направлении [25–28]. При этом решение в j-й области будет иметь вид:

$$\Psi_j(x,y) = \sum_m \left(a_m^j e^{ik_m^j x} + b_m^j e^{-ik_m^j x}\right) Y_m^j(y), \qquad (2)$$

где $Y_m^j(y)$ есть волновая функция m-ой моды в поперечном направлении с энергией (порогом моды) γ_m^j и $k_m^j = \sqrt{E - \gamma_m^j}$. Суммирование в разложении (2) осуществляется по всему бесконечному набору мод дискретного и непрерывного спектра. Коэффициенты a_m^j и b_m^j определяются из условия непрерывности волновой функции и ее производной на каждой границе и граничных условий на бесконечности. Таким образом, общее число неизвестных в рассматриваемой задаче рассеяния равно $2MN$, где M – число границ кусочно-постоянных областей, а N – число учитываемых мод.

В такой постановке задача легко решается численно, а количество учитываемых мод определяет точность расчета. Тем не менее, качественная физическая картина явления может быть получена при использовании аналитических моделей с малым числом мод, например $N = 2$ [4, 5]. При этом естественным образом возникает понятие межмодовых состояний, т.е. состояний, локализованных в разных модах в области резонатора и волновода. Далее мы будем обозначать состояния, локализованные в m-й моде в волноводе и в n-й моде в резонаторе как m-n-m. Энергии таких симметричных межмодовых состояний определяются из следующего уравнения:

$$A_{mnm} = k_n^2 \sin\left(\frac{k_n^2 L}{2}\right) - \kappa_m^{1,3} \cos\left(\frac{k_n^2 L}{2}\right) = 0, \qquad (3)$$

где $\kappa_m^{1,3} = \sqrt{\gamma_m^{1,3} - E}$ и $\gamma_m^1 = \gamma_m^3$ – пороги m-й моды в волноводе (по обе стороны от резонатора, в областях 1 и 3). Аналогичное рассмотрение может быть проведено и для антисимметричных состояний, но, как будет показано ниже, описываемый в работе ССК имеет место для основных (и как следствие – симметричных) состояний в таких межмодовых квантовых ямах (КЯ).

Формирование ССК в простейшем двухмодовом приближении происходит при вырождении состояний 2-2-2 и 2-1-2 одной четности, т.е. при выполнении равенства

$$A_{222} = A_{212} = 0. \qquad (4)$$

Этот результат был впервые получен в работе [4]. Он позволяет наглядно интерпретировать формирование ССК в рассматриваемой системе в рамках двухуровневой модели ФВ, в которой один уровень соответствует связанному состоянию во "внутримодовой" КЯ (рис. 1b), а второй – в "межмодовой" (рис. 1c). Численный многомодовый расчет параметров системы, удовлетворяющих условию существования ССК, дает значения, несколько отличающиеся от тех, при которых выполняется условие (4) [18, 29]. Тем не менее, условие (4) может при этом служить хорошим исходным приближением.

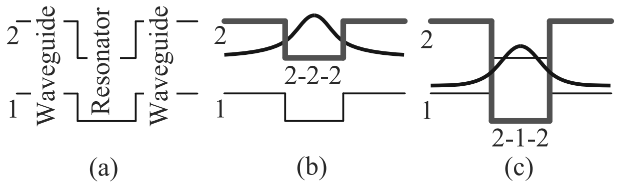

Рис. 1. (Цветной онлайн) Схема порогов первых мод поперечного квантования в волноводе с резонатором (a) и эффективный потенциал для образования внутримодовых состояний 2-2-2 (b) и межмодовых состояний 2-1-2 (c)

Условие (4) удовлетворяется, например, для ССК, описанных в работах [4, 5], а также [18]. В этих работах размер области формирования ССК (резонатора или примеси) был сопоставим или больше, чем длина волны де Бройля частицы в резонаторе [4, 5]. Формально условие (4) выполнено также при $L = 0$ и $\kappa_2^{1,3} = 0$ ($E = \gamma_2^{1,3}$). Однако соответствующее собственное состояние квадратично неинтегрируемо и, следовательно, не является ССК. Вблизи точки $L = 0$ и $\kappa_2^{1,3} = 0$ система (4) становится несовместной относительно малых величин $L > 0$ и $\kappa_2^{1,3} > 0$. Как будет показано ниже, учет трех и более мод позволяет непрерывным образом проследить эволюцию такого решения, превращающегося в ССК при $L > 0$ и $\kappa_2^{1,3} > 0$. С точки зрения двухмодового приближения, подобные ССК, обнаруженные, например, в результате численного расчета, могут интерпретироваться как "случайные" [30]. Само по себе условие существования ССК в трехмодовом приближении, как мы покажем ниже, имеет вид более сложный, чем простое требование вырождения уровней (4) в двухмодовой модели.

В трехмодовом приближении после простых, но трудоемких вычислений (12 уравнений для 12 неизвестных) можно получить следующие условия для формирования ССК:

$$\begin{cases} \mu_{21}\mu_{33}A_{212}A_{333} - \mu_{31}\mu_{23}A_{232}A_{313} = 0, \\ \mu_{22}\mu_{33}A_{222}A_{333} - \mu_{23}\mu_{32}A_{232}A_{323} = 0, \\ \mu_{32}\mu_{21}A_{212}A_{323} - \mu_{31}\mu_{22}A_{222}A_{313} = 0, \end{cases} \tag{5}$$

где матричные элементы μ_{mn} определяют перемешивание между различными модами на границе:

$$\mu_{mn} = \int \left[Y_m^{\mathrm{wav}}(y)\right]^* Y_n^{\mathrm{res}}(y)dy. \tag{6}$$

Здесь $Y_m^{\mathrm{wav}}(y)$ суть поперечная волновая функция m-й моды в области волновода и $Y_n^{\mathrm{res}}(y)$ – n-й моды в резонаторе. Важно отметить, что среди трех уравнений (5) независимы только любые два из них. Уравнения (5) можно рассматривать как расширение двухмодовой модели, и с этой точки зрения ССК может образоваться при вырождении двух межмодовых состояний 2-1-2 и 2-3-2 с внутримодовым 2-2-2 ($A_{212} = A_{222} = A_{232} = 0$) или межмодовых состояний 3-1-3 и 3-2-3 с внутримодовым 3-3-3 ($A_{313} = A_{323} = A_{333} = 0$), что, конечно же, представляется существенно более трудно выполнимым условием на практике, чем условие вырождения двух состояний (4). Отметим, что если потенциальный профиль m-n-m представляет собой барьер, а не яму, то связанные состояния типа m-n-m не существуют, и величина A_{mnm} никогда не обращается в нуль.

В отличие от двухмодового случая, в трехмодовом приближении может возникнуть новый тип ССК, в котором ни одна из величин A_{mnm} не обращается в нуль, что означает межмодовое перемешивание различных состояний и, в определенном смысле, отвечает режиму антикроссинга в модели ФВ [7]. Важным следствием этого служит, например, возможность наличия решения при произвольно малой, но ненулевой длине резонатора L. В самом деле, можно линеаризовать уравнения (5) для симметричных состояний по переменным L и $\kappa_2^{1,3}$ и рассмотреть их решение при малой длине резонатора и энергии, близкой к порогу второй моды в волноводе. В этом случае любая пара уравнений для симметричных состояний из (5) становится однородной системой относительно L и $\kappa_2^{1,3}$, и условие наличия ее нетривиальных решений оказывается независящим от энергии:

$$\theta = \mu_{33}\mu_{22}\mu_{21}\left(\frac{\gamma_1^2}{\gamma_3^2} - \frac{\gamma_2^2}{\gamma_3^2}\right) + \mu_{32}\mu_{23}\mu_{21}\left(1 - \frac{\gamma_1^2}{\gamma_3^2}\right) + \\ + \mu_{31}\mu_{22}\mu_{23}\left(\frac{\gamma_2^2}{\gamma_3^2} - 1\right) = 0. \tag{7}$$

Нетрудно убедиться, что подобные независящие от энергии условия разрешимости системы для определения параметров и энергии ССК при сколь угодно малой длине резонатора имеют место и при учете любого числа мод больше трех. Как уже было отмечено выше, аналогичное условие образования ССК в рамках двухмодового приближения (4) приводит к несовместной системе уравнений относительно малых L и $\kappa_2^{1,3}$.

Участие более чем двух резонансов в формировании ССК в различных системах рассматривалось и ранее [31–33]. В этих работах, по сути, речь идет об обобщении модели ФВ на случай нескольких континуумов, предложенном в статье [34]. В рамках такого подхода в системе, связанной с K континуума-ми, требуется вырождение $K + 1$ состояний. Соответственно, ССК в исследуемой в настоящей работе симметричной системе с $K = 1$ должен проявляться уже в двухмодовом приближении. Однако, как было показано выше, представленный механизм образования ССК принципиально не может быть описан в рамках двухмодового приближения (уже для $K = 1$) и требует учета не менее трех мод даже для качественного объяснения.

Пример численного расчета. В качестве конкретного примера рассмотрим электронный волновод с резонатором в виде расширения и дополнительным притягивающим потенциалом внутри (см. вставку на рис. 2а). Подобный объект, представляющий собой синтез структур, исследованных, например, в работах [18] и [4, 5], уже рассматривался в [35]. Однако описываемое в настоящей работе явление образования ССК в резонаторе субволнового размера не было обнаружено ранее. Такой выбор структуры обусловлен возможностью изменения в ней матричных элементов μ_{mn} в широких пределах, что позволяет ожидать выполнения условия (7) при некоторой вариации параметров. Для системы с шириной резонатора $H = 10$ нм, шириной $w = 4$ нм области притягивающего потенциала величиной $U_w = -0.1$ эВ и высотой потенциального барьера, ограничивающего волновод $U_0 = 1$ эВ, можно получить, что условие $\theta = 0$ выполняется при ширине подводящего волновода $h \approx 5.96$ нм (см. рис. 2а). Следовательно, при таких параметрах в системе можно ожидать образование ССК в резонаторе субволнового (по сравнению с длиной волны электрона в волноводе) размера. На рисунке 2b приведены численно рассчитанные зависимости энергии E_{BIC} и длины резонатора L_{BIC}, соответствующие ССК при различных значениях h. Значения получены из условия обращения ширины резонанса Фано в нуль при решении задачи рассеяния [29]. Сходимость численного моделирования обеспечивалась при учете 20–40 мод. Результаты численного расчета имеют хорошее согласие с трехмодовым приближением и в самом деле демонстрируют возможность образования ССК при сколь угодно малом продольном размере резонатора. Точный численный расчет дает ССК с $L_{BIC} \to 0$ при $h \approx 5.76$ нм. При этом видно, что условие $\theta = 0$, полученное в трехмодовой модели, служит хорошим начальным приближением для поиска ССК с $L_{BIC} \to 0$, так как ССК, обнаруженный в точном расчете, соответствует $\theta \approx 6 \times 10^{-3}$ (см. рис. 2а).

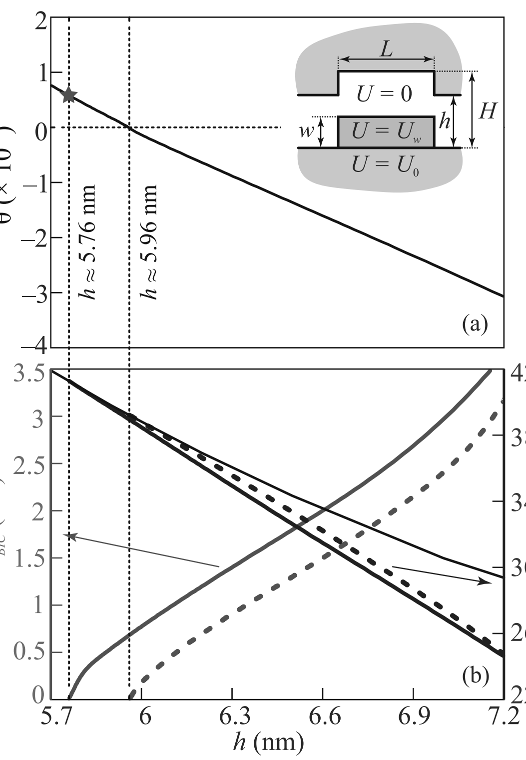

Рис. 2. (Цветной онлайн) Зависимость безразмерного параметра θ (a), а также L_{BIC} и E_{BIC} (b) для ССК в системе, показанной на вставке к рисунку (a), от ширины подводящих волноводов h при $H = 10$ нм, $w = 4$ нм, $U_w = -0.1$ эВ, $U_0 = 1$ эВ и эффективной массе электрона $0.0665 m_0$. На рисунке (a) значения h и θ, соответствующие численно рассчитанному ССК при $L_{BIC} \to 0$ отмечены красной звездой. На рисунке (b) жирные сплошные линии показывают результат численного расчета, а пунктирные – трехмодовое приближение (5). Красные линии соответствуют L_{BIC} (левая ось), синие линии – E_{BIC} (правая ось). Тонкая сплошная черная линия показывает верхнюю границу рассматриваемого диапазона энергий – порог второй моды в волноводе ($\gamma_2^{1,3}$)

Различие результатов численного счета и трехмодовой модели связано с вкладом высших мод. Если вклад высших мод (в меру соответствующих матричных элементов μ_{mn}) существенно превышает вклад третьей моды, то отличие трехмодового приближения от точного решения может быть уже не только количественным, но и качественным (наличие или отсутствие ССК). Например, как видно из рис. 2b, при 5.76 нм $\lesssim h \lesssim 5.96$ нм численный многомодовый расчет показывает наличие ССК при малой длине резонатора, а трехмодовое приближение – нет.

Описанный механизм формирования субволнового ССК при сколь угодно малом L требует тонкого подбора параметров модели на основе расчетов интегралов перекрытия μ_{mn}. Исходя из аналитической модели, параметры системы, удовлетворяющие условию (7), могут быть использованы в качестве исходного приближения. Вообще говоря, параметры структуры, для которых возможно образование ССК при малой длине резонатора не уникальны, и существует некоторый диапазон соответствующих значений, например, ширины w и глубины потенциала U_w примеси в резонаторе. Рисунок 3 иллюстрирует этот

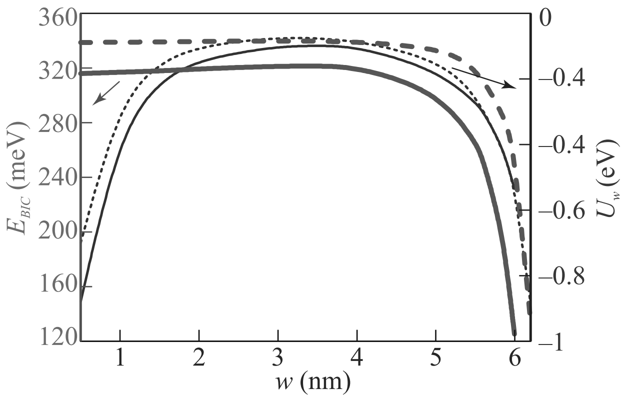

Рис. 3. (Цветной онлайн) Зависимость энергии ССК E_{BIC} (жирные красные линии) и величины притягивающего потенциала примеси U_w (тонкие синие линии), при которой наблюдается ССК, от ширины примеси w при $h = 6.5$ нм, $H = 10$ нм и $L_{BIC} = 1$ (пунктирные линии) и 2 нм (сплошные линии)

факт и показывает численно рассчитанные зависимости энергии ССК E_{BIC} и потенциала U_w, при котором наблюдается ССК, от ширины w при фиксированном значении L_{BIC}. При w, стремящимся к нулю, E_{BIC} стремится к энергии состояния 2-2-2 вблизи порога второй моды в волноводах $\gamma_2^{1,3} \approx 343.3$ мэВ. Энергия ССК (E_{BIC}) испытывает незначительный рост при увеличении w до $w = 4$ нм. После чего E_{BIC} начинает падать с ростом w вплоть до предельного значения порога первой моды в волноводе $\gamma_1^{1,3} \approx 87.5$ мэВ при $w \approx h$. Необходимая для образования ССК глубина потенциала примеси имеет зависимость от w практически симметричную относительно $w = h/2$. Если пренебречь расширением, то это вполне естественно, так как предельный случай $w = h$ по интегралам перекрытия μ_{mn} эквивалентен предельному случаю $w = 0$. При этом, как видно из рис. 3, в случае $w < h/2$ мощность потенциала примеси ($w \times U_w$) слабо зависит от w, вследствие чего E_{BIC} практически не зависит от w. В тоже время, при $w > h/2$ необходимая для образования ССК отрицательная мощность примеси существенно увеличивается по абсолютной величине, что приводит и к снижению энергии ССК.

На рисунке 4 показаны примеры распределения плотности вероятности в ССК при $H = 10$ нм, $h = 6.5$ нм, $L_{BIC} = 1$ нм и различных значениях w, U_w и энергии ССК E_{BIC}. Нетрудно оценить, что при таких значениях параметров длина волны де Бройля электрона в волноводе оказывается почти на порядок больше длины резонатора. Наибольшая область локализации наблюдается при максимальной энергии ССК (рис. 4b), а наименьшая – при минимальной энергии ССК (рис. 4c), поскольку коэффициент затухания волновой функции ССК в волноводе пропорционален $\sqrt{\gamma_2^{1,3} - E_{BIC}}$, т.е. корню из энергии связанного состояния с энергией E_{BIC} в КЯ с барьером, определяемым порогом второй моды в волноводе (минимальным расстоянием по энергии до состояний континуума). ССК, волновые функции которых показаны на рис. 4, непрерывным образом переходят друг в друга при изменении параметров системы. Однако между ССК на рис. 4a, b и c есть важное отличие помимо размеров области локализации волновой функции. На рисунке 5a–c показаны численные решения уравнения (3) для симметричных состояний 2-1-2, 2-2-2, 3-1-3 и 3-2-3, а также положение нуля прозрачности при тех же параметрах, что и на соответствующих частях рис. 4a–c. Видно, что положение антирезонанса на рис. 5a, b примерно равноудалено по энергии от состояний 2-2-2 и 3-2-3, в то же время на рис. 5c линия нулей прозрачности с графической точностью следует за линией состояния 2-2-2. При этом для бóльших значений длины резонатора (не показаны на рис. 5) положение нулей пропускания в структурах (a) и (b) следует за состоянием 3-2-3. Таким образом, многомодовая природа описываемого ССК существенно сильнее проявляется в первых двух случаях, чем в последнем.

Заключение. Универсальный механизм ФВ позволяет описать формирование ССК в результате двухмодовой интерференции (см. условие (4)). Однако, при малых размерах резонатора условия на фазы рассеяния, обеспечивающие существование ССК в результате деструктивной интерференции, в двухмодовом приближении не могут быть выполнены, несмотря на то, что квантово-механическое связанное состояние существует и в этом случае. Как показано в данной работе, включение дополнительных интерферирующих траекторий через высоко лежащие моды, например, третью, позволяет получить решение для ССК и в пределе стремящейся к нулю длине резонатора. Таким образом, оказывается возможным сформировать ССК в резонаторе с размерами, много меньшими области локализации волновой функции ССК. Критерием, позволяющим определить применимость конечно-модового (в нашем случае – трехмодового) приближения для опи-

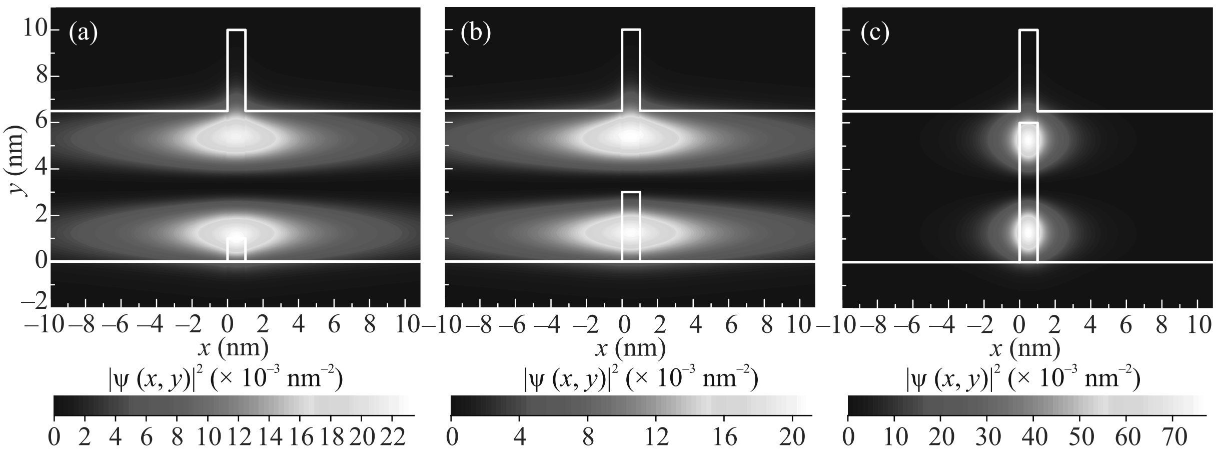

Рис. 4. (Цветной онлайн) Распределение плотности вероятности, соответствующей ССК, при $H = 10$ нм, $h = 6.5$ нм, $L_{BIC} = 1$ нм и различных значениях w, U_w и энергии ССК E_{BIC}: (a) – $w = 1$ нм, $U_w \approx -0.27$ эВ, $E_{BIC} \approx 338.9$ мэВ; (b) – $w = 3$ нм, $U_w \approx -0.07$ эВ, $E_{BIC} \approx 339.9$ мэВ; (c) – $w = 6$ нм, $U_w \approx -0.53$ эВ, $E_{BIC} \approx 257.6$ мэВ

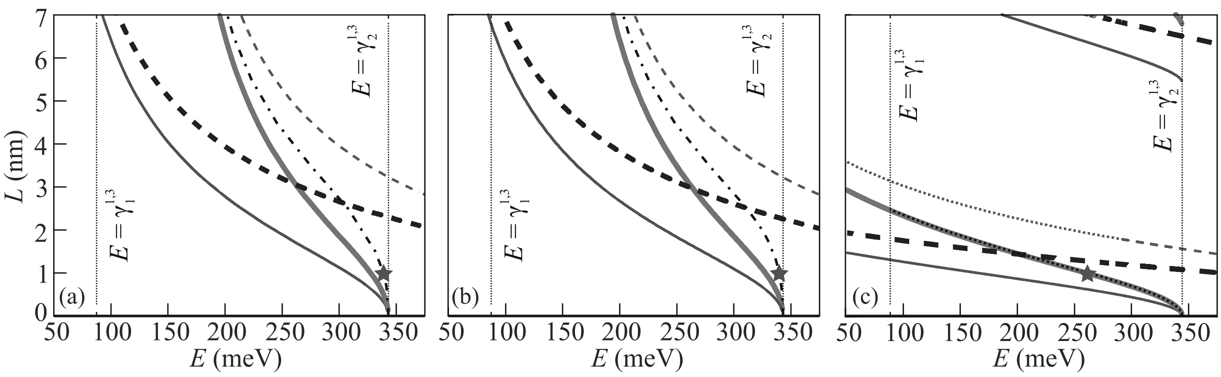

Рис. 5. (Цветной онлайн) Численные решения уравнения (3) для симметричных межмодовых состояний 2-1-2 (красные тонкие сплошные линии), 2-2-2 (зеленые жирные сплошные линии), 3-1-3 (синие жирные штриховые линии) и 3-2-3 (розовые тонкие штриховые линии). Положение нуля пропускания (антирезонанс Фано) показано тонкой черной штрихпунктирной линией. ССК отмечен красной звездой. Тонкие вертикальные штриховые линии отмечают границы рассматриваемого диапазона энергий (между порогами первой и второй моды в волноводе). Параметры системы выбраны следующими: $H = 10$ нм, $h = 6.5$ нм, а w и U_w в случаях (a), (b) и (c) имеют те же значения, что и в случаях (a), (b) и (c) на рис. 4 соответственно

сания ССК, может служить малость матричных элементов (6) между рассматриваемыми и остальными модами. При этом для выполнения условия реализации ССК, помимо матричных элементов, необходимо управлять также порогами мод в волноводе и резонаторе, что в нашей модели осуществляется с помощью дополнительной квантовой ямы (примеси) в резонаторе.

Важно отметить, что в оптическом аналоге рассмотренного двумерного волновода условие формирования ССК в пределе нулевой длины резонатора в трехмодовом приближении (7) или его обобщение на большее число мод имеет тот же вид. Однако, в силу особенности соответствующего уравнения Гельмгольца, в отличие от уравнения Шредингера, матричные элементы μ_{nm} в оптической системе становятся зависящими от длины волны излучения. Более того, в чисто диэлектрических оптических волноводных системах формирование связанных состояний, в частности и межмодовых, возможно только при ограничении света в поперечном направлении [36] или использования дополнительной размерности [37]. В связи с этим, нельзя непосредственно перенести полученный результат на оптические волноводные системы, где он бы имел первостепенное значение. Вопрос о возможности существования ССК в оптических волноводах с размерами резонатора, много меньше размера локализации электромагнитного поля (равно как и вопрос о существовании ССК в субволновых неодносвязных резонаторах), представляет значительный теоретический и практический интерес и требует специального рассмотрения.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект # 21-19-00808).

1. C. W. Hsu, B. Zhen, A. D. Stone, J. D. Joannopoulos, and M. Soljačić, Nat. Rev. Mater. **1**, 16048 (2016).
2. A. F. Sadreev, Rep. Prog. Phys. **84**, 055901 (2021).
3. N. M. Shubin and A. A. Gorbatsevich, Phys. Rev. B **96**, 205441 (2017).
4. C. S. Kim, A. M. Satanin, Y. S Joe, and R. M. Cosby, Phys. Rev. B **60**, 10962 (1999).
5. Ч. С. Ким, О. Н. Рознова, А. М. Сатанин, В. Б. Штенберг, ЖЭТФ **121**, 1157 (2002).
6. M. L. L. De Guevara, F. Claro, and P. A. Orellana, Phys. Rev. B **67**, 195335 (2003).
7. H. Friedrich and D. Wintgen, Phys. Rev. A **32**, 3231 (1985).
8. K. Koshelev, S. Lepeshov, M. Liu, A. Bogdanov, and Yu. Kivshar, Phys. Rev. Lett. **121**, 193903 (2018).
9. S. A. Dyakov, M. V. Stepikhova, A. A. Bogdanov, A. V. Novikov, D. V. Yurasov, M. V. Shaleev, Z. F. Krasilnik, S. G. Tikhodeev, and N. A. Gippius, Laser Photonics Rev. **15**, 2000242 (2021).
10. E. N. Bulgakov and A. F. Sadreev, Phys. Rev. A **99**, 033851 (2019).
11. K. Koshelev, A. Bogdanov, and Yu. Kivshar, Sci. Bull. **64**, 836 (2019).
12. S. I. Azzam, A. V. Kildishev, R.-M. Ma, C.-Z. Ning, R. Oulton, V. M. Shalaev, M. I. Stockman, J.-L. Xu, and X. Zhang, Light Sci. Appl. **9**, 1 (2020).
13. A. I. Kuznetsov, A. E. Miroshnichenko, M. L. Brongersma, Yu. S. Kivshar, and B. Lukyanchuk, Science **354**, aag2472 (2016).
14. A. A. Bogdanov, K. L. Koshelev, P. V. Kapitanova, M. V. Rybin, S. A. Gladyshev, Z. F. Sadrieva, K. B. Samusev, Yu. S. Kivshar, and M. F. Limonov, Advanced Photonics **1**, 016001 (2019).
15. K. Koshelev, S. Kruk, E. Melik-Gaykazyan, J. H. Choi, A. Bogdanov, H. G. Park, and Yu. Kivshar, Science **367**, 288 (2020).
16. В. В. Климов, *Наноплазмоника*, Физматлит, М. (2009).
17. A. F. Sadreev, E. N. Bulgakov, and I. Rotter, JETP Lett. **82**, 498 (2005).
18. A. F. Sadreev, E. N. Bulgakov, and I. Rotter, Phys. Rev. B **73**, 235342 (2006).
19. А. Ф. Садреев, А. С. Пилипчук, Письма в ЖЭТФ **100**, 664 (2014).
20. K. Pichugin, H. Schanz, and P. Seba, Phys. Rev. E **64**, 056227 (2001).
21. C. F. Sadreev and T. V. Babushkina, JETP Lett. **88**, 312 (2008).
22. С. В. Аксенов, М. Ю. Каган, Письма в ЖЭТФ **111**, 321 (2020).
23. D. V. Evans and R. Porter, Q. J. Mech. Appl. Math. **51**, 263 (1998).
24. C. M. Linton, M. McIver, P. McIver, K. Ratcliffe, and J. Zhang, Wave Motion **36**, 67 (2002).
25. G. N. Henderson, T. K. Gaylord, and E. N. Glytsis, Proc. IEEE. **79**, 1643 (1991).
26. M. Asada, Y. Miyamoto, and Y. Suematsu, IEEE J. Quantum Electron. **22**, 1915 (1986).
27. J. Sancheza-Dehesa, J. A. Porto, F. Agullo-Rueda, and F. Meseguer, J. Appl. Phys. **73**, 5027 (1993).
28. А. А. Горбацевич, В. В. Капаев, Микроэлектроника **36**, 3 (2007).
29. N. M. Shubin, A. V. Friman, V. V. Kapaev, and A. A. Gorbatsevich, Phys. Rev. B **104**, 125414 (2021).
30. A. S. Pilipchuk and A. F. Sadreev, Phys. Lett. A **381**, 720 (2017).
31. E. Bulgakov and A. Sadreev, Phys. Rev. B **83**, 235321 (2011).
32. A. S. Pilipchuk, A. A. Pilipchuk, and A. F. Sadreev, Phys. Scr. **94**, 115004 (2019).
33. A. S. Pilipchuk, A. A. Pilipchuk, and A. F. Sadreev, Phys. Scr. **95**, 085002 (2020).
34. F. Remacle, M. Munster, V. B. Pavlov-Verevkin, and M. Desouter-Lecomte, Phys. Lett. A **145**, 265 (1990).
35. G. Cattapan and P. Lotti, Eur. Phys. J. B **60**, 51 (2007).
36. J. D. Joannopoulos, S. G. Johnson, J. N. Winn, and R. D. Meade, *Photonic Crystals*, Princeton University Press, Princeton, NJ (2011).
37. D. Dragoman and M. Dragoman, Prog. Quant. Electron. **23**, 131 (1999).