

# Инварианты узлов в корнях из единицы

Л. Бишлер<sup>1)</sup>

Физический институт им. П. Н. Лебедева, 119991 Москва, Россия

Институт проблем передачи информации, 127994 Москва, Россия

Поступила в редакцию 2 июня 2022 г.

После переработки 24 июня 2022 г.

Принята к публикации 26 июня 2022 г.

Мы обсуждаем различные инварианты узлов и зацеплений, зависящие от первообразного корня из единицы. Мы уточняем определения существующих инвариантов с помощью метода Решетихина–Тураева, представляем обобщение инвариантов АДО на квантовую алгебру  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_N)$  и подчеркиваем связи между различными инвариантами.

DOI: 10.31857/S1234567822150095, EDN: jgndjq

**1. Введение.** Знаменитый полином Джонса  $J^{\mathcal{K}}(q)$ , открытый в 1984 г. В. Джонсом [1], является полиномиальным инвариантом узлов и зацеплений, зависящим от одной переменной. Полином Джонса был определен с помощью скейн-соотношений, которые позволяют его вычислять. Скейн-соотношения (1) связывают полиномы Джонса трех узлов, которые отличаются друг от друга одним пересечением (2).

$$J^{\mathcal{K}}(q) - q^{-2} J^{\mathcal{K}'}(q) = (q - q^{-1}) J^{\mathcal{K}''}(q). \quad (1)$$

$$\mathcal{K} = \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array}, \quad \mathcal{K}' = \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array}, \quad \mathcal{K}'' = \begin{array}{c} \diagup \\ \diagup \end{array} \left( \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagdown \end{array} \right). \quad (2)$$

Вскоре после определения полинома Джонса Э. Виттен и Н. Решетихин и В. Тураев сделали два важных открытия. Э. Виттен [2] нашел квантовую теорию поля – теорию Черна–Саймонса (ЧС) с калибровочной группой  $SU_2$  – наблюдаемые в которой (средние значения петель Вильсона) совпадают с полиномами Джонса. Таким образом Виттен предложил физическое определение для математического объекта. Н. Решетихин [3] и В. Тураев [4] в свою очередь открыли новый способ вычисления инвариантов узлов с помощью специального оператора –  $\mathcal{R}$ -матрицы. Они связали полином Джонса с универсальной  $\mathcal{R}$ -матрицей в фундаментальном представлении квантованной универсальной обертывающей алгебры  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$ . Метод Решетихина–Тураева (РТ) позволил определить цветные полиномы Джонса, которые вычисляются с помощью  $\mathcal{R}$ -матриц в других представлениях  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$ .

Эти результаты позже были обобщены на полиномы ХОМФЛИ-ПТ [5, 6], теорию ЧС с калибровочной

группой  $SU_N$  и универсальную  $\mathcal{R}$ -матрицу в представлениях  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_N)$ .

$\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_N)$  является ассоциативной алгеброй с генераторами  $E_i, F_i, K_i = q^{h_i}$  ( $i = 1, \dots, N - 1$ ), которые удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} K_i E_j &= q^{a_{ij}} E_j K_i, & [K_i, K_j] &= 0, \\ K_i F_j &= q^{-a_{ij}} F_j K_i, & [E_i, F_j] &= \delta_{ij} \frac{K_i - K_i^{-1}}{q - q^{-1}}. \end{aligned} \quad (3)$$

Универсальная  $\mathcal{R}$ -матрица имеет следующий вид:

$$\mathcal{R}_u = P q^{\sum_{i,j} a_{i,j}^{-1} h_i \otimes h_j} \prod_{\beta \in \Phi^+} \exp_q((q - q^{-1}) E_\beta \otimes F_\beta), \quad (4)$$

где  $P(x \otimes y) = y \otimes x$ ,  $\Phi^+$  – положительные корни,  $\exp_q A = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^m}{[m]_q!} q^{m(m-1)/2}$ ,  $[m]_q = (q^m - q^{-m}) / (q - q^{-1})$ .

Теория ЧС – это трехмерная квантовая теория поля с действием

$$\mathcal{S}_{CS} = \frac{k}{4\pi} \int_{\mathcal{M}} \text{Tr} \left( \mathcal{A} \wedge d\mathcal{A} + \frac{2}{3} \mathcal{A} \wedge \mathcal{A} \wedge \mathcal{A} \right). \quad (5)$$

Ненулевыми корреляторами в теории ЧС являются корреляторы особого типа – средние значения петли Вильсона. Когда калибровочной группой теории является группа  $SU_N$ , они совпадают с полиномами ХОМФЛИ-ПТ  $H_R^{\mathcal{K}}(q, A)$ .

$$H_R^{\mathcal{K}}(q, A) = \frac{1}{d_R(N)} \left\langle \text{Tr}_R P \exp \left( \oint_{\mathcal{K}} \mathcal{A} \right) \right\rangle_{\text{CS}(N,k)}. \quad (6)$$

Вильсоновские средние зависят от контура  $\mathcal{K}$  (узла или зацепления), ранга  $N - 1$  калибровочной группы  $SU_N$ , ее представления (соответствующего диаграмме Юнга)  $R$ , от квантовой размерности  $d_R(N)$  и

<sup>1)</sup>e-mail: bishlerlv@lebedev.ru

константы связи теории ЧС  $k$ . Это среднее представляет собой полином от переменных  $q = \exp\left(\frac{2\pi i}{N+k}\right)$  и  $A = q^N$ . Было показано [7], что теория ЧС калибровочно-инвариантна, когда константа связи  $k$  является целым числом, что означает, что  $q$  является корнем из единицы. Поэтому инварианты в корнях из единицы заслуживают особого внимания.

Очевидным подходом к получению инвариантов в корнях из единицы является замена переменных в полиномах ХОМФЛИИ-ПТ  $H_R^K(q, A)$  и Джонса  $J_{[r]}^K(q)$ .

Существуют также инварианты  $\langle K \rangle_{m,N}$ , определенные Р. Кашаевым [8–10] с  $\mathcal{R}$ -матрицей, зависящей от переменной  $\omega$  (которая является  $N$ -м корнем из единицы) и целочисленного параметра  $m$ . Инварианты Кашаева не связаны с квантовыми алгебрами, однако они совпадают с цветными полиномами Джонса.

Другая возможность построения инвариантов в корнях из единицы возникает, когда мы рассматриваем представления  $\mathcal{U}_q(sl_N)$ , при параметре квантования, равном корню из единицы. В этом случае у квантовой алгебры появляются новые типы представлений с параметрами  $\lambda$ , позволяющие строить  $\mathcal{R}$ -матрицы с параметрами и определять новые инварианты узлов и зацеплений в корнях из единицы. Таким образом получаются инварианты АДО [11] или цветные инварианты Александра [12]  $\Phi_m^L(q, \lambda)$  для алгебры  $\mathcal{U}_q(sl_2)$ . В этом случае  $q$  – корень степени  $2m$  из единицы, а  $\lambda$  – произвольный параметр. Инварианты АДО совпадают с полиномами Александра  $\mathcal{A}(q) = H_{[1]}^K(q, A = 1)$ , когда  $q$  является корнем из единицы 4-й степени. Они также связаны с полиномами Джонса.

Новый результат, который мы хотим подчеркнуть в этом письме, – это обобщение инвариантов АДО на алгебру  $\mathcal{U}_q(sl_N)$ . Это инварианты  $\mathcal{P}_{m,N}^L(q, \lambda_i)$  [29] [13] узлов и зацеплений, которые определяются с помощью нильпотентных представлений с параметрами алгебры  $\mathcal{U}_q(sl_N)$  в корнях из единицы ( $q^{2m} = 1$ ). Они зависят от набора параметров  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_{N-1}\}$  и связаны с полиномами Александра и ХОМФЛИИ-ПТ. Инварианты АДО и инварианты  $\mathcal{P}_{m,N}^L(q, \lambda_i)$  определяются модифицированным методом Решетихина–Тураева, который требует введения специального нормировочного коэффициента (27), который мы представляем в этом письме.

Схематическое соответствие между описанными выше инвариантами представлено на рис. 1.

Цель этого письма – уточнить определение различных инвариантов в корнях из единицы и установить отношения между ними. Структура письма

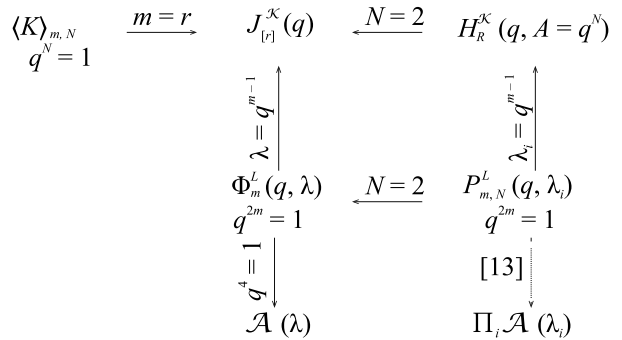


Рис. 1. Соответствие между инвариантами в корнях из единицы

следующая. Мы начнем с метода РТ (раздел 2), который используется для определения всех инвариантов, рассматриваемых в этом письме. Затем мы обсудим структуру представления  $\mathcal{U}_q(sl_2)$  для различных значений  $q$  (раздел 3). Мы определим инварианты АДО (раздел 4) и их обобщение (раздел 5) и обсудим модификации метода РТ, необходимые для их определения. Наконец, мы рассмотрим понятие длинных узлов и определим инвариант Кашаева (раздел 6). Новые результаты, которые мы представляем в этом письме, находятся в разделе 5.

**2. Метод Решетихина–Тураева.** Метод РТ [9, 14, 15] позволяет определить цветные инварианты узлов и зацеплений [16, 17]. Существуют также модификации этого метода, которые существенно упрощают вычисления в некоторых случаях [18, 19]. В этом разделе мы обсуждаем наиболее общую версию метода РТ и придерживаемся описания из [15].

Метод РТ основан на использовании двумерной ориентированной проекции узла или зацепления на плоскость с фиксированным направлением, представляющей собой диаграмму узла или зацепления. На диаграмме показано, какая нить находится над другой в каждом пересечении. Диаграмма разбивается на элементы, играющие роль в построении инварианта узла: пересечения и точки поворота (относительно выбранного направления). Существует восемь типов пересечений и четыре типа точек поворота (рис. 2). Все точки поворота и пересечения можно выразить с помощью операторов  $\mathcal{R}$ ,  $\mathcal{M}$  и  $\overline{\mathcal{M}}$ :

$$\begin{matrix} \diagdown \\ \diagup \end{matrix} = \mathcal{R} \quad \cup = \mathcal{M} \quad \curvearrowright = \overline{\mathcal{M}} \quad (7)$$

Операторы  $\mathcal{R}$ ,  $\mathcal{M}$  и  $\overline{\mathcal{M}}$  удовлетворяют уравнениям, которые следуют из движений Рейдемейстера (рис. 3):

$$\text{Tr}_2(I \otimes W) \mathcal{R} = q^\Omega I, \quad (8)$$

$$\mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2 \mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2 \mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2, \quad (9)$$

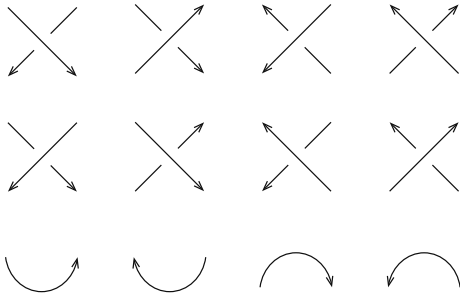


Рис. 2. Различные типы пересечений и точек поворота



Рис. 3. Движения Рейдемейстера

где  $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R} \otimes I$ ,  $\mathcal{R}_2 = I \otimes \mathcal{R}$ ,  $\mathcal{W} = \mathcal{M}\overline{\mathcal{M}}$ ,  $I$  – единичный оператор. Уравнения (8) и (9) фиксируют только операторы  $\mathcal{R}$  и  $\mathcal{W}$ , поэтому в определении операторов  $\mathcal{M}$  и  $\overline{\mathcal{M}}$  есть неоднозначность. Разный выбор операторов  $\mathcal{R}$  и  $\mathcal{W}$  приводит к разным типам инвариантов. Цветные полиномы Джонса и ХОМФЛИ-ПТ связаны с универсальной  $\mathcal{R}$ -матрицей (4) в представлениях алгебр  $\mathcal{U}_q(sl_2)$  и  $\mathcal{U}_q(sl_N)$  соответственно, инварианты АДО и их обобщения связаны с универсальной  $\mathcal{R}$ -матрицей в нильпотентных представлениях с параметрами алгебр  $\mathcal{U}_q(sl_2)$  и  $\mathcal{U}_q(sl_N)$  в корнях из единицы. Инвариант Кашаева основан на  $\mathcal{R}$ -матрице (37), не связанной с квантовыми алгебрами.

Коэффициент  $q^\Omega$  в уравнении (8) называется коэффициентом оснащения (фрейминга). Он возникает, когда мы рассматриваем узел, сделанный из ленты. В этом случае первое движение Рейдемейстера разрешается с коэффициентом. В топологическом оснащении, которое мы используем при определении инвариантов АДО, матрицы  $\mathcal{R}$  и  $\mathcal{W}$  удовлетворяют уравнению

$$\text{Tr}_2(I \otimes \mathcal{W}) \mathcal{R} = I. \tag{10}$$

Полиномиальный инвариант узла или зацепления определяется как свертка всех операторов, связанных с элементами на конкретной диаграмме.

Если мы выбираем универсальную  $\mathcal{R}$ -матрицу в представлении  $R$  алгебры  $\mathcal{U}_q(sl_N)$ , с помощью метода РТ мы вычисляем ненормированный полином ХОМФЛИ-ПТ  $\mathcal{H}_R^K$ . Можно определить нормированный полином  $H_R^K = \mathcal{H}_R^K / \mathcal{H}_R^0$ , где  $\mathcal{H}_R^0$  – ненормированный полином неузла (тривиального узла).

Удобно использовать диаграммы узлов и зацеплений в виде кос (рис. 4), которые существуют для любого узла и зацепления. В этом случае определение инвариантов можно переформулировать в терминах

следа Маркова  $\text{Tr}_q$  (квантового следа) и оператора  $\mathcal{W} = \mathcal{M}\overline{\mathcal{M}}$ , который называют весовой матрицей.

$$\mathcal{H}_R^K = \text{Tr}_q \prod_i \mathcal{R}_i = \text{Tr} \overbrace{\mathcal{W} \otimes \dots \otimes \mathcal{W}}^s \prod_i \mathcal{R}_i, \tag{11}$$

где  $s$  – количество нитей в косе, в произведение входят все пересечения в косе.

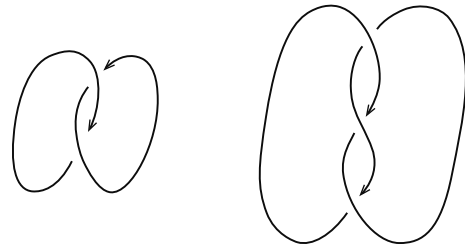


Рис. 4. Диаграммы зацепления Хопфа и трилистника в виде кос

**3. Представления  $\mathcal{U}_q(sl_2)$  в корнях из единицы.**  $\mathcal{U}_q(sl_2)$  порождается элементами  $e, f, k = q^h$  и  $k^{-1} = q^{-h}$ , удовлетворяющими соотношениям

$$\begin{aligned} k k^{-1} &= k^{-1} k = 1, & k e k^{-1} &= q^2 e, & (12) \\ k f k^{-1} &= q^{-1} f, & [e, f] &= e f - f e = \frac{k - k^{-1}}{q - q^{-1}}. \end{aligned}$$

Универсальная  $\mathcal{R}$ -матрица имеет следующий вид

$$\mathcal{R} = P q^{h \otimes h / 2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{q^{m(m+1)/2} (1 - q^{-2})^m}{[m]_q!} e^m \otimes f^m, \tag{13}$$

и соответствующая весовая матрица совпадает с оператором  $k$ :  $\mathcal{W} = k$ .

Когда  $q$  не является корнем из единицы, неприводимые конечномерные представления  $L_r$  алгебры  $\mathcal{U}_q(sl_2)$  являются симметрическими представлениями, нумерованными диаграммами Юнга, состоящими из одной строки  $[r]$ .  $L_r$  – представления со старшим и младшим весами, действующие на векторном пространстве  $\mathcal{V}_{r+1}$  размерности  $r + 1$  с базисными векторами  $v_i$ ,  $i = \{0, \dots, r\}$ , где  $v_0$  и  $v_r$  – векторы старшего и младшего весов соответственно.

$$\begin{aligned} L_r(k)v_i &= q^{r-2i} v_i, \\ L_r(e)v_i &= [i]_q [r - i + 1]_q v_{i-1}, & L_r(e)v_0 &= 0, & (14) \\ L_r(f)v_i &= v_{i+1}, & L_r(f)v_r &= 0. \end{aligned}$$

В этом случае фиксирован старший вес  $L_r(k)v_0 = \lambda v_0$ ,  $\lambda = q^r$ . Условие, фиксирующее вес, возникает при построении модуля Верма. Мы выбираем собственный вектор  $v_0$  оператора  $k$ , удовлетворяющий

условию  $e v_0 = 0$ . Остальные векторы модуля Верма получаем действием оператора  $f$  на  $v_0$ :  $f v_0 = v_1$ ,  $f^2 v_0 = v_2, \dots, f^n v_0 = v_n$ . Затем ищем инвариантное подпространство с условием  $e v_{r+1} = 0$ , которое является следующим:

$$[r + 1]_q(\lambda q^{-r} - \lambda^{-1} q^r) = 0. \tag{15}$$

Это условие фиксирует вес  $\lambda$  только в том случае, если  $[r + 1] \neq 0$ , а это означает, что когда  $q$  – корень из единицы, существуют представления, в которых вес произволен.

Пусть  $q$  – первообразный корень из единицы степени  $2m$ , т.е. не существует  $p < 2m$ , для которого  $q^p = 1$ . В этом случае операторы  $e^m, f^m$  и  $k^m$  являются центральными, что следует непосредственно из определяющих соотношений (12). Центральность  $k^m$  приводит к тому, что вес представлений размерности  $m$  не фиксирован и является параметром представлений. Тот факт, что  $e^m$  и  $f^m$  являются центральными, является причиной того, что появляются новые типы представлений: циклическое и полуциклическое.

Существует четыре типа неприводимых представлений (любое неприводимое представление  $\mathcal{U}_q(sl_2)$  в корнях из единицы конечномерно):

- 1)  $L_r$  (14) при  $r \leq m - 2$ ;
- 2) циклические  $U_m^{a,b,\lambda}$ ;
- 3) полуциклические  $V_m^{a,\lambda} = U_m^{a,0,\lambda}$  или  $V_m^{b,\lambda} = U_m^{0,b,\lambda}$ ;
- 4) нильпотентные представления  $W_m^\lambda = U_m^{0,0,\lambda}$ .

Последние три представления имеют одинаковую размерность  $m$  и могут быть описаны следующими операторами, действующими в  $m$ -мерном векторном пространстве  $\mathcal{V}_m$  с базисом  $v_i, i = 0, 1, \dots, m - 1$ .

$$U_m^{\lambda,a,b}(k)v_i = q^{-2i} \lambda v_i, \tag{16}$$

$$U_m^{\lambda,a,b}(e)v_i = \left( ab + [i]_q \frac{\lambda q^{1-i} - \lambda^{-1} q^{i-1}}{q - q^{-1}} \right) v_{i-1}, \quad i > 0,$$

$$U_m^{\lambda,a,b}(e)v_0 = a v_{m-1},$$

$$U_m^{\lambda,a,b}(f)v_i = v_{i+1}, \quad i < m - 1,$$

$$U_m^{\lambda,a,b}(f)v_{m-1} = b v_0,$$

где  $a, b, \lambda$  – произвольные комплексные числа,  $\lambda \neq 0$ . Можно проверить, что эти операторы удовлетворяют определяющим соотношениям (12) алгебры  $\mathcal{U}_q(sl_2)$ .

Представления  $W_m^\lambda$  позволяют получить нетривиальные  $\mathcal{R}$ -матрицы и определять с их помощью инварианты узлов и зацеплений, известные как АДО или цветные инварианты Александра.

**4. Инварианты АДО или цветные инварианты Александра.** Инварианты АДО узлов и зацеплений [11] можно определить методом РТ, кото-

рый применяется к  $(1, 1)$ -сплетениям – узлам и зацеплениям, у которых одна нить разрезана (рис. 5). Рассмотрение сплетений вместо узлов и зацеплений возможно проводить благодаря существующему взаимно однозначному соответствию между ними [20]. Этот важный шаг позволяет вычислять ненулевые инварианты. Инварианты, которые вычисляются на основе узлов и зацеплений, равны нулю из-за свойств следа Маркова в представлениях  $W_m^\lambda$ .

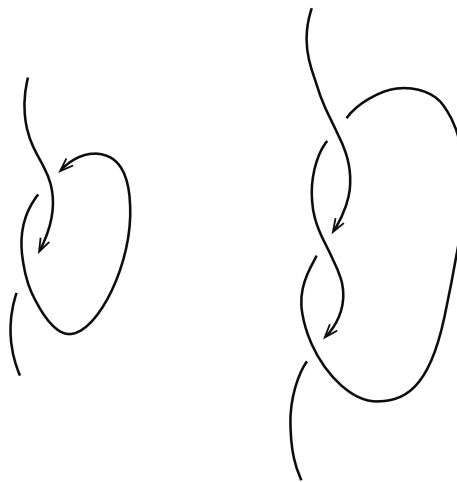


Рис. 5.  $(1, 1)$ -сплетения зацепления Хопфа и трилистника

Давайте определим инварианты АДО. Необходимо сделать две важные модификации метода РТ. Прежде всего, мы должны переопределить след Маркова следующим образом:

$$\text{Tr}_q^* \dots = \text{Tr} \left[ I \otimes \overbrace{W \otimes \dots \otimes W}^{s-1} \dots \right], \tag{17}$$

т.е. опустить одну весовую матрицу, связанную с разрезанной нитью. Тогда нормировочный коэффициент полиномов (ненормированный полином узла) равен классической размерности представления.

Переход от узлов и зацеплений к сплетениям заставляет нас выбирать нить, которая будет разрезана и вносит асимметрию в определение инварианта. Поэтому также необходимо ввести нормировочный коэффициент. Коэффициент, вычисленный в [11] с точностью до коэффициента нормировки  $q^m$ , выглядит следующим образом:

$$\Xi_m^{sl_2}(\lambda_1) = \prod_{i=0}^{m-2} \{ \lambda_1 q^{-i} \}, \tag{18}$$

где  $\{x\} = x - x^{-1}$ ,  $\lambda_1$  – цвет разрезанной нити.

Теперь мы можем определить инвариант АДО  $\Phi_m^{\mathcal{L}}(\lambda_1, \dots)$ :

$$\Phi_m^{\mathcal{L}}(\lambda_1, \dots) = \frac{\text{Tr } I \otimes \overbrace{\mathcal{W} \otimes \dots \otimes \mathcal{W}}^{s-2} \prod_i \mathcal{R}_i}{\Xi_m^{sl_2}(\lambda_1)}. \quad (19)$$

В этом определении  $\mathcal{R}$  – универсальная  $\mathcal{R}$ -матрица в представлении  $W_m^\lambda$  алгебры  $\mathcal{U}_q(sl_2)$  в корнях из единицы. В общем случае она зависит от двух цветов  $\lambda_1 = q^{\mu_1}$  и  $\lambda_2 = q^{\mu_2}$ :

$$\begin{aligned} & \mathcal{R}_m(v_i^{\mu_1} \otimes v_j^{\mu_2}) \\ &= \sum_{n=0}^{m-1} q^{\mu_2(m-1-i+n) - \mu_1(j+n) + 2(i-n)(j+n) + \frac{n(n-1)}{2}} \\ & \frac{(q - q^{-1})^n}{[n]!} [i - n + 1; n] [\mu_1 - i + n; n] (v_{j+n}^{\mu_2} \otimes v_{i-n}^{\mu_1}) \end{aligned} \quad (20)$$

и

$$W_m v_i^\mu = q^{-\mu(m-1)-2i} v_i = q^{-\mu} m k v_i^\mu. \quad (21)$$

Инварианты АДО  $\Phi_m^{\mathcal{L}}$  связаны с полиномами Александера и Джонса. Для простоты определим полиномы АДО узлов и одноцветных зацеплений:

$$\hat{\Phi}_m^{\mathcal{L}}(\lambda) = \Phi_m^{\mathcal{L}}(\lambda) \Xi_m^{sl_2}(\lambda), \quad (22)$$

тогда

$$\hat{\Phi}_2^{\mathcal{K}}(\lambda) = \mathcal{A}^{\mathcal{K}}(q = \lambda), \quad (23)$$

т.е. полиномы АДО для 4-го корня из единицы совпадают с полиномами Александера узлов, а инварианты АДО для 4-го корня из единицы совпадают с полиномами Александера от многих переменных (полиномами Александера зацеплений)

$$\Phi_2^{\mathcal{L}}(\lambda_1, \dots) = \Delta^{\mathcal{L}}(\lambda_1, \dots), \quad (24)$$

поэтому инварианты АДО также называют цветными инвариантами Александера.

Связь с полиномами Джонса следующая:

$$\hat{\Phi}_m^{\Lambda}(\lambda = q^{m-1}) = J_{[m-1]}^{\mathcal{L}}(q) \Big|_{q^{2m}=1}, \quad (25)$$

где  $J_{[m-1]}^{\mathcal{L}}(q)$  – нормированные полиномы Джонса в представлении  $L_{m-1}$ . Это следует из того, что представления  $W_m^\lambda$  совпадают с представлениями  $L_{m-1}$  при правильном выборе значения веса  $\lambda = q^{m-1}$ .

Недавнее исследование С. Уиллетса [21] показало, что инварианты АДО и цветные полиномы Джонса можно обобщить с помощью универсального инварианта узла, который содержит в себе оба инварианта:

АДО и Джонса. И существует отображение, позволяющее получить инварианты АДО из цветных полиномов Джонса.

**5. Обобщение инвариантов АДО на алгебру  $\mathcal{U}_q(sl_N)$ .** Полиномы Джонса были обобщены на полиномы ХОМФЛИ-ПТ, и аналогичным образом инварианты АДО можно обобщить на инварианты  $\mathcal{P}_{m,N}^{\mathcal{L}}(\lambda_i^{(j)})$ , связанные с представлениями алгебры  $\mathcal{U}_q(sl_N)$  (3) в корнях из единицы.

Пусть  $q$  – первообразный корень из единицы степени  $2m$ . В этом случае структура представления  $\mathcal{U}_q(sl_N)$  [22] очень похожа на структуру представления  $\mathcal{U}_q(sl_2)$ , которую мы обсуждали ранее. Операторы  $K_i^m$  центральны и существуют представления размерности  $m^{N(N-1)/2}$  с произвольными весами – нильпотентные представления  $W_{m,N}^{\lambda_i}$  с  $N - 1$  параметрами  $\lambda_i$ . Среди представлений  $\mathcal{U}_q(sl_N)$  появляются также циклические и полуциклические представления, так как  $E_i^m$  и  $F_i^m$  центральны, но эти представления не дают нетривиальных инвариантов узлов и зацеплений [13]. Представления  $W_{m,N}^{\lambda_i}$  связаны с нетривиальными инвариантами, которые мы обозначаем  $\mathcal{P}_{m,N}^{\mathcal{L}}(\lambda_i^{(j)})$ .

Определение инвариантов  $\mathcal{P}_{m,N}^{\mathcal{L}}(\lambda_i^{(j)})$  повторяет определение инвариантов АДО. Мы раскрашиваем зацепление, состоящее из  $l$  компонент, представлениями  $W_{m,N}^{\lambda_i^{(j)}}$  ( $j = 1, \dots, l$ ), зависящими от наборов параметров  $\lambda_i$  ( $i = 1, \dots, N - 1$ ), делаем его проекцию на плоскость и разрезаем одну нить на диаграмме. Затем мы применяем метод РТ к  $(1, 1)$ -сплетениям и получаем полиномы  $P_{m,N}^{\mathcal{L}}(\lambda_i^{(j)})$ . В качестве операторов  $\mathcal{R}$  и  $\mathcal{W}$  в методе РТ используются универсальная  $\mathcal{R}$ -матрица (4) и оператор  $\mathcal{W}$  в представлениях  $W_{m,N}^{\lambda_i}$ . Оператор  $\mathcal{W}$  имеет следующий вид:

$$\mathcal{W} = q^{2h_\rho}, \quad h_\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Phi^+} h_\alpha. \quad (26)$$

Нам также необходимо нормировать полиномы  $P_{m,N}^{\mathcal{L}}(\lambda_i^{(j)})$ , чтобы восстановить симметрию между компонентами зацепления. Если цвет открытой компоненты  $\lambda^{(1)}$  (рис. 6), то нормировочный коэффициент  $\Xi_{m,N}(\lambda^{(1)})$  равен

$$\Xi_{m,N}(\lambda^{(1)}) = \prod_{\alpha \in \Phi_N^+} \xi_m(\lambda_\alpha^{(1)} q^{|\alpha|}), \quad (27)$$

где  $\alpha$  – положительные корни  $\Phi_N^+$  алгебры  $sl_N$ ,  $\alpha = \sum_{k=i}^j \alpha_k$  ( $i \leq j < N$ ),  $\alpha_k$  – простые корни  $sl_N$ ,  $|\alpha| = j - i$ . Определение  $\xi_m(\lambda)$  повторяет опреде-

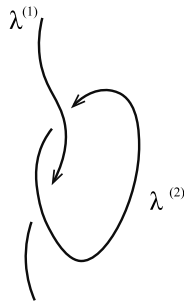


Рис. 6. Цветное (1,1)-сплетение, соответствующее зацеплению Хопфа

ление нормировочного коэффициента инвариантов АДО (18):

$$\xi_m(\lambda) = \prod_{i=0}^{m-2} \{\lambda q^{-i}\}. \tag{28}$$

Теперь мы можем определить инварианты  $\mathcal{P}_{m,N}^{\mathcal{L}}(\lambda_i^{(j)})$  в корнях из единицы с параметрами  $\lambda_i^{(j)}$  ( $i = 1, \dots, N - 1, j = 1, \dots, l, l$  – количество компонентов в зацеплении),  $\lambda_i^{(1)}$  – цвет открытой компоненты:

$$\mathcal{P}_{m,N}^{\mathcal{L}}(\lambda_i^{(j)}) = \frac{\mathcal{P}_{m,N}^{\mathcal{L}}(\lambda_i^{(j)})}{\Xi_{m,N}(\lambda_i^{(1)})}. \tag{29}$$

Инварианты  $\mathcal{P}_{m,N}^{\mathcal{L}}(\lambda_i^{(j)})$  совпадают с полиномами ХОМФЛИ-ПТ в представлениях  $R_{m,N}$ , соответствующих диаграммам Юнга  $[(N - 1)(m - 1), (N - 2)(m - 1), \dots, (m - 1)]$ , когда параметры  $\lambda_i^{(j)}$  совпадают со старшими весами представления  $R_{m,N}$ :

$$\mathcal{P}_{m,N}^{\mathcal{L}}(\lambda_i^{(j)} = q^{m-1}) \Big|_{q^{2m}=1} = H_{R_{m,N}}^{\mathcal{L}}(A = q^N, q) \Big|_{q^{2m}=1}. \tag{30}$$

Инварианты  $\mathcal{P}_{m,N}^{\mathcal{L}}(\lambda_i^{(j)})$  также связаны с полиномами Александра, однако соотношения не так просты, как в случае инвариантов АДО. Они перечислены в [13]. Например, для  $N = 3$ :

$$P_{2,3}^{\mathcal{K}}(\lambda_1, \lambda_2 = 1) = \mathcal{A}^{\mathcal{K}}(\lambda_1^2), \tag{31}$$

$$P_{3,3}^{\mathcal{K}}(q, \lambda_1, \lambda_2 = 1) = \mathcal{A}^{\mathcal{K}}(\lambda_1)\mathcal{A}^{\mathcal{K}}(\lambda_1^3). \tag{32}$$

Инварианты  $\mathcal{P}_{m,N}^{\mathcal{L}}(\lambda^{(j)})$  совпадают с инвариантами АДО  $\Phi_m^{\mathcal{L}}(\lambda^{(1)}, \dots)$  при  $N = 2$ .

**6. Инвариант Кашаева.** Существует другой тип инварианта узла, определенный для переменной, равной корню из единицы, определение которого не опирается на представления квантовых алгебр. В этом разделе мы обсуждаем инвариант Кашаева  $\langle K \rangle_{m,N}$ .

Инвариант Кашаева был определен Ринатом Кашаевым в его работе [10] для так называемых длинных узлов. Он основан на  $\mathcal{R}$ -матрице, полученной из решений соотношения пентагона, которая зависит от переменной  $\omega$ , равной корню из единицы, и двух целочисленных спектральных параметров ( $m$  и  $n$ ), связанных с двумя цветами на двух нитях в пересечении. Для определения инварианта Кашаев использует метод РТ, примененный к (1,1)-сплетениям – двумерным проекциям длинных узлов. Длинные узлы – это трехмерные аналоги (1,1)-сплетений. По определению длинный узел – это вложение  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  и существуют  $a, b \in \mathbb{R}$  такие, что  $f(t) = (0, 0, t)$  для любых  $t < a$  или  $t > b$ . Вычисление инвариантов длинных узлов позволяет избежать проблемы с нормировочным коэффициентом.

Для определения инварианта Кашаева нужно сделать следующие шаги. Прежде всего фиксируем первообразный корень из единицы  $\omega$  порядка  $N$ , раскрашиваем нити узла или зацепления целыми числами  $n_i: 0 \leq n_i < N$ , делаем двумерную проекцию на плоскость, расставляем  $\mathcal{R}$ -матрицы и операторы точек поворота в соответствии с приведенными ниже правилами и суммируем по всем индексам. Инвариантность полученной суммы показана в [9].

$$\begin{array}{c} j \quad i \\ \diagdown \quad \diagup \\ m \quad n \\ \diagup \quad \diagdown \\ k \quad l \end{array} = \langle i, j | r(m, n) | k, l \rangle \tag{33}$$

$$\begin{array}{c} i \quad j \\ \curvearrowright \\ n \end{array} = \begin{array}{c} i \quad n \quad j \\ \curvearrowright \\ n \end{array} = \delta_{i,j} \tag{34}$$

$$\begin{array}{c} i \quad n \quad j \\ \curvearrowright \\ n \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} n \\ \curvearrowright \\ j \quad i \end{array} = \omega^{-n} \delta_{i, [j+1]_n} \tag{35}$$

$$\begin{array}{c} i \quad j \\ \curvearrowright \\ n \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} j \quad i \\ \curvearrowright \\ n \end{array} = \omega^n \delta_{i, [j+1]_n} \tag{36}$$

$$\langle i, j | r(m, n) | k, l \rangle = V_{i,j-m,k-n,l}(\omega) \omega^{k-l-n+(k-i-n)m}, \tag{37}$$

где

$$V_{i,j,k,l}(\omega) := \frac{N\theta_N([j-i-1]_N + [l-k]_N)\theta_N([i-l]_N + [k-j]_N)}{(\bar{\omega})_{[j-i-1]_N}(\omega)_{[i-l]_N}(\bar{\omega})_{[l-k]_N}(\omega)_{[k-j]_N}} \tag{38}$$

и  $[k]_n = k \bmod n$ ,  $\theta_n(k) = \delta_{k, [k]_n}$ ,  $(x)_n = \prod_{k=1}^n (1 - x^k)$ .

Как было сказано ранее, для определения инварианта Кашаева мы основываем наши вычисления на  $(1, 1)$ -сплетениях и получаем матричный инвариант. Это инвариант равен единичной матрице  $N \times N$ , умноженной на цветной полином Джонса в  $(m + 1)$ -мерном представлении  $L_m$  (14) (соответствующем диаграмме Юнга  $[m]$ ), вычисленный в точке  $q = \omega$ :

$$\langle K \rangle_{N,m} = J_{[m]}(\omega) I_N. \quad (39)$$

Этот результат является гипотезой, основанной на рассмотрении различных примеров. Несмотря на то, что Кашаев построил  $\mathcal{R}$ -матрицу, не основанную на представлениях  $\mathcal{U}_q(sl_2)$ , полученный инвариант совпадает с полиномом Джонса.

**7. Заключение.** В этом письме мы рассмотрели разные инварианты узлов и зацеплений в корнях из единицы. Среди них цветные полиномы Джонса и ХОМФЛИ-ПТ (11), вычисленные в корнях из единицы, инварианты АДО или цветные инварианты Александра и их обобщение, а также инвариант Кашаева.

Все эти инварианты можно определить и вычислить методом РТ, однако для определения инвариантов в корнях из единицы необходимо модифицировать метод: вместо узлов и зацеплений рассматривать  $(1, 1)$ -сплетения и вводить нормировочный коэффициент (18), (27).

Мы определили инварианты АДО (19). Они зависят от переменной, равной корню из единицы и произвольного параметра и соответствуют нильпотентным представлениям с параметрами алгебры  $\mathcal{U}_q(sl_2)$  в корнях из единицы. Инварианты АДО связаны с полиномами Джонса (25) и Александра (22) и, согласно последним исследованиям, эквивалентны полиномам Джонса [21].

Мы также обсудили инварианты Кашаева, которые определяются с помощью  $\mathcal{R}$ -матрицы с целочисленными параметрами, которая зависит от переменной, равной корню из единицы, и не определяется с помощью представлений  $\mathcal{U}_q(sl_N)$ . Полученный полином, предположительно, совпадает с цветным полиномом Джонса (39).

Это письмо также содержит краткое изложение определения инвариантов  $\mathcal{P}_{m,N}^{\mathcal{L}}(\lambda_i^{(j)})$  (30), являющихся обобщением инвариантов АДО. Это новый тип инвариантов, определенных для нильпотентных представлений с параметрами  $W_{m,N}^{\lambda_i}$  алгебры  $\mathcal{U}_q(sl_N)$  в корнях из единицы. Они связаны с полиномами ХОМФЛИ-ПТ (30) и Александра (31), (32) [13]. Остается вопрос, являются ли эти инварианты неза-

висимыми или они эквивалентны цветным полиномам ХОМФЛИ-ПТ.

Работа частично поддержана грантом Российского фонда фундаментальных исследований 21-52-52004.

Автор чрезвычайно благодарен своим научным руководителям А. Миронову и Ан. Морозову за руководство, терпение и понимание, а также благодарит В. Алексеева, Т. Григорьеву, С. Миронову, А. Морозову, А. Слепцова, Н. Целоусова за плодотворные обсуждения.

1. V. F. R. Jones, Bull. Amer. Math. Soc. **12**, 103 (1985).
2. E. Witten, Commun. Math. Phys. **121**, 351 (1989).
3. N. Reshetikhin, *Quantized universal enveloping algebras, the Yang-Baxter equation and invariants of links I, II*, LOMI preprints. Technical report, E-4-87, E-17-87 (1988).
4. V. Turaev, Inventiones Mathematicae **92**(3), 527 (1988).
5. P. Freyd, D. Yetter, J. Hoste, W. B. R. Lickorish, K. Millett, and A. Ocneanu, Am. Math. Soc. **12**, 239 (1985).
6. J. H. Przytycki and P. Traczyk, J. Knot Theor. **4**, 115 (1987); arXiv:1610.06679.
7. M. Marino, Commun. Math. Phys. **253**, 25 (2004); arXiv:hep-th/0207096.
8. S. Garoufalidis and R. Kashaev, arXiv:2108.07553.
9. R. Kashaev, *Invariants of long knots*, Preprint (2019); arXiv:1908.00118.
10. R. Kashaev, *The algebraic nature of quantum dilogarithm, Geometry and integrable models (Dubna, 1994)*, World Sci. Publ., River Edge, NJ (1996), p. 32.
11. Y. Akutsu, T. Deguchi, and T. Ohtsuki, J. Knot Theory Ramif. **01**(02), 161 (1992).
12. J. Murakami, Osaka J. Math. **45**(2), 541 (2008).
13. L. Bishler, A. Mironov, and A. Morozov, arXiv:2205.05650.
14. N. Yu. Reshetikhin and V. G. Turaev, Comm. Math. Phys. **127**, 1 (1990).
15. A. Morozov and A. Smirnov, Nucl. Phys. B **835**, 284 (2010).
16. L. Bishler, S. Dhara, T. Grigoryev, A. Mironov, A. Morozov, An. Morozov, P. Ramadevi, V. Kumar Singh, and A. Sleptsov, JETP Lett. **111**(9), 494 (2020); arXiv:2004.06598.
17. L. Bishler, S. Dhara, T. Grigoryev, A. Mironov, A. Morozov, An. Morozov, P. Ramadevi, V. Kumar Singh, and A. Sleptsov, J. Geom. Phys. **159**, 103928 (2021); arXiv:2007.12532.
18. A. Mironov, A. Morozov, and An. Morozov, *Character expansion for HOMFLY polynomials. I. Integrability and difference equations*, in *Strings, Gauge Fields*,

- and the Geometry Behind: The Legacy of Maximilian Kreuzer*, World Scientific Publishing, Hackensack (2013); arXiv:1112.5754.
19. A. Mironov, A. Morozov, and An. Morozov, JHEP **03**, 034 (2012); arXiv:1112.2654.
20. L. Kauffman, *Knots, abstract tensors and Yang-Baxter equation*, in *Knots, Topology and Quantum Field Theory*, World Scientific Publishing, Singapore (1991).
21. S. Willetts, arXiv:2003.09854.
22. B. Abdesselam, D. Arnaudon, and A. Chakrabarti, J. Phys. A: Math. Gen. **28**, 5495 (1995); arXiv:q-alg/9504006v2.