

# Уплотнение зон и слияние уровней Ландау в сильно коррелированных двумерных электронных системах (Миниобзор)

В. Т. Долгополов<sup>+</sup>, М. Ю. Мельников<sup>+</sup>, А. А. Шашкин<sup>+1)</sup>, С. В. Кравченко<sup>\*1)</sup>

<sup>+</sup>Институт физики твердого тела, 142432 Черноголовка, Россия

<sup>\*</sup>Physics Department, Northeastern University, Boston, Massachusetts 02115, USA

Поступила в редакцию 27 апреля 2022 г.

После переработки 10 июня 2022 г.

Принята к публикации 21 июня 2022 г.

В этом обзоре мы обсуждаем недавние экспериментальные результаты, указывающие на уплотнение зон и слияние уровней Ландау на уровне химического потенциала в сильно коррелированных двумерных (2D) электронных системах. В сверхчистой сильно взаимодействующей двумерной электронной системе в квантовых ямах SiGe/Si/SiGe эффективная масса электрона на уровне Ферми монотонно возрастает во всем диапазоне электронных плотностей, в то время как усредненная по энергии масса насыщается при низких плотностях. Качественно различное поведение двух масс в этой электронной системе указывает на вызванное межэлектронным взаимодействием уплотнение одночастичного спектра на уровне химического потенциала, при котором происходит “конденсация” электронов на уровне Ферми в диапазоне импульсов, в отличие от конденсации бозонов. В сильных магнитных полях, перпендикулярных двумерному электронному слою, аналогичный эффект разного заполнения квантовых уровней на уровне химического потенциала — слияние расщепленных по спину и долине уровней Ландау — наблюдается в инверсионных слоях на поверхности кремния и в двухслойных двумерных электронных системах на основе GaAs. Эксперименты также указывают на слияние квантовых уровней композитных фермионов с разными долинными индексами в сверхчистых квантовых ямах SiGe/Si/SiGe.

DOI: 10.31857/S1234567822150058, EDN: jfpnmo

**I. Введение.** В системе невзаимодействующих фермионов с непрерывным спектром вероятность заполнения квантового состояния при фиксированных химическом потенциале и температуре зависит только от одночастичной энергии [1]. Если температура стремится к нулю, энергетический интервал, разделяющий заполненные и пустые квантовые состояния, также стремится к нулю. Для свободных частиц в импульсном пространстве возникает поверхность Ферми размерности  $d - 1$ , где  $d$  — размерность фермионов.

В общем случае это рассуждение неверно для взаимодействующих фермионов [2–8], когда одночастичная энергия зависит от распределения электронов, а числа заполнения квантовых состояний на уровне химического потенциала могут различаться, попадая в диапазон от нуля до единицы. Был предсказан топологический фазовый переход при температуре  $T = 0$  в сильно коррелированных фермионных системах, связанный с появлением плоского участ-

ка одночастичного спектра на уровне химического потенциала по мере того как увеличивается энергия фермион-фермионного взаимодействия (верхняя вставка на рис. 1). Этот переход связан с уплотнением зоны или распуханием поверхности Ферми в импульсном пространстве, которому предшествует возрастающая эффективная масса квазичастиц  $m_F$  на уровне Ферми, которая расходится в квантовой критической точке. Создание и исследование материалов с плоскими зонами в настоящее время является передовым направлением современной физики [9–12]. Интерес вызывает, в частности, тот факт, что из-за аномальной плотности состояний уплотнение зоны может быть важно для создания сверхпроводимости при комнатной температуре. Появление плоской зоны теоретически предсказано [13–15] в ряде систем, включая тяжелые фермионы, высокотемпературные сверхпроводящие материалы,  $^3\text{He}$  и двумерные электронные системы.

Роль электрон-электронных взаимодействий в поведении двумерных электронных систем возрастает по мере уменьшения электронной плотности.

<sup>1)</sup>e-mail: shashkin@issp.ac.ru; s.kravchenko@northeastern.edu

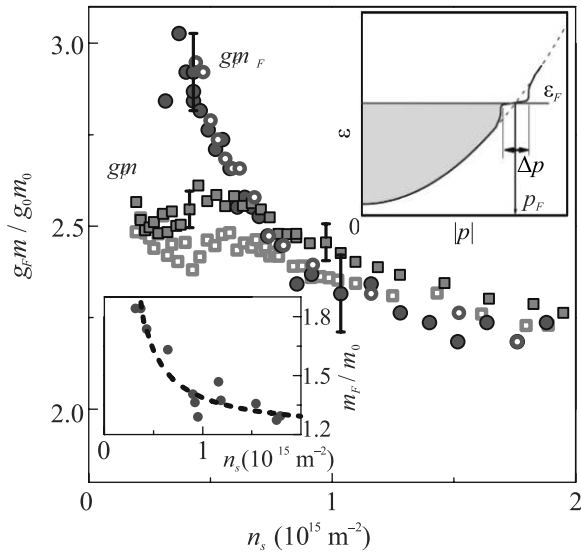


Рис. 1. (Цветной онлайн) Произведение фактора Ланде и эффективной массы в квантовых ямах SiGe/Si/SiGe в зависимости от плотности электронов, определенное по измерениям поля полной спиновой поляризации (квадраты) и по осцилляциям Шубникова-де Гааза (кружки) при  $T \approx 30$  мК. Пустые и заполненные символы соответствуют двум образцам. Экспериментальная неопределенность соответствует разбросу данных и составляет около 2% для квадратов и около 4% для кружков ( $g_0 = 2$  и  $m_0 = 0,19 m_e$  – значения для невзаимодействующих электронов). На верхней вставке схематично показан одночастичный спектр электронной системы в состоянии, предшествующем уплощению зоны на уровне Ферми (сплошная черная линия). Штриховая фиолетовая линия соответствует обычному параболическому спектру. Заштрихованная область соответствует заполненным электронным состояниям при  $T = 0$ . Нижняя вставка: эффективная масса  $m_F$  в зависимости от плотности электронов, определенная путем анализа температурной зависимости амплитуды осцилляций Шубникова-де Гааза аналогично тому, как это было сделано в работе [38]. Пунктирная линия показывает ожидаемое по эксперименту поведение. Из работы [16]

Энергия взаимодействия характеризуется радиусом Вигнера-Зейтца,  $r_s = 1/(\pi n_s)^{1/2} a_B$  (здесь  $n_s$  – электронная плотность и  $a_B$  – эффективный боровский радиус в полупроводнике), который в однодолинном случае равен отношению кулоновской и кинетической энергий.

Экспериментально было показано, что с уменьшением электронной плотности (или с увеличением энергии взаимодействия) в сверхчистых квантовых ямах SiGe/Si/SiGe масса электронов на уровне Ферми монотонно возрастает во всем диапазоне электронных плотностей [16]. Напротив, масса, усредненная по энергии, насыщается при низких плотностях.

Качественно различное поведение двух масс указывает на вызванное взаимодействием уплощение одночастичного спектра на уровне Ферми в этой электронной системе.

В системе взаимодействующих фермионов, помещенной в сильное перпендикулярное магнитное поле, можно ожидать аналогичный эффект разного заполнения квантовых уровней на уровне химического потенциала. Если энергии двух квантовых уровней пересекаются друг с другом при изменении внешнего параметра, они могут совпадать с химическим потенциалом в диапазоне значений параметра, т.е. квантовые уровни могут сливаться на уровне химического потенциала в этом диапазоне [17]. Слияние уровней подразумевает наличие притяжения между двумя частично заполненными квантовыми уровнями. Интервал слияния определяется возможностью перераспределения квазичастиц между уровнями. Эффект слияния находится в контрасте с простым пересечением квантовых уровней при некотором значении электронной плотности/магнитного поля. Экспериментально такое слияние уровней Ландау обнаружено в кремниевых полевых транзисторах металлоокисел-полупроводник (МОП) [18] и двухслойных структурах на основе GaAs [19]. Кроме того, сообщалось об указании на слияние уровней композитных фермионов с разными долинными индексами в сверхчистых квантовых ямах SiGe/Si/SiGe [20]. Ниже мы рассмотрим соответствующие недавние экспериментальные данные.

**II. Уплощение зон на уровне Ферми.** Начнем с указания на уплощение зоны на уровне Ферми, о котором сообщалось в работе [16]. Необработанные экспериментальные данные, полученные в сильно коррелированных двумерных электронных системах, можно разделить на две группы: данные, описывающие электронную систему как целое (такие, как магнитное поле, необходимое для полной поляризации электронных спинов, термодинамическая плотность состояний или намагниченность электронной системы) и данные, относящиеся исключительно к электронам на уровне Ферми (такие как амплитуда осцилляций Шубникова-де Гааза, дающая эффективную массу  $m_F$  и  $g$ -фактор Ланде  $g_F$  на уровне Ферми). Как правило, данные первой группы интерпретируются на языке квазичастиц, в котором используются усредненные по энергии значения эффективной массы  $m$  и  $g$ -фактора Ланде  $g$ . Для определения этих величин используются формулы, справедливые в случае невзаимодействующих электро-

нов. Хотя такой подход идеологически неверен, результаты для  $m$  и  $g$  часто оказываются такими же, как и результаты для  $m_F$  и  $g_F$ . В частности, об одновременном увеличении усредненной по энергии эффективной массы и массы на уровне Ферми в двумерной электронной системе в кремниевых МОП-транзисторах сообщалось в более ранних публикациях [21–27]; было обнаружено, что эффективная масса сильно увеличена при низких плотностях, в то время как  $g$ -фактор остается близким к своей величине в объеме кремния, что не подтвердило существование Стонеровской нестабильности в двумерной электронной системе в кремнии. Перенормировка массы не зависит от беспорядка, будучи определяемой только электрон-электронным взаимодействием [28]. Сильно увеличенная эффективная масса в кремниевых МОП-структурах была интерпретирована в пользу формирования Вигнеровского кристалла или предшествующей промежуточной фазы, чье происхождение и существование может зависеть от уровня беспорядка в электронной системе.

Экспериментальные результаты, представленные в этом разделе, были получены в сверхчистых (001) квантовых ямах SiGe/Si/SiGe, подробно описанных в работах [29, 30]. Максимальная подвижность электронов в этих образцах достигала  $240 \text{ м}^2/\text{Вс}$ , что является самым высоким показателем подвижности для этой электронной системы и примерно на два порядка выше, чем максимальная подвижность электронов в наиболее чистых кремниевых МОП-структурах. Магнитосопротивление в параллельном магнитном поле позволяет определить поле полной спиновой поляризации  $B_c$ , которое соответствует отчетливому “излому” экспериментальных зависимостей с последующим насыщением сопротивления [31, 32] (см. нижнюю вставку к рис. 2). Магнитное поле, в котором наступает полная спиновая поляризация, показано как функция электронной плотности на рис. 2 для двух образцов. В диапазоне концентраций электронов  $0.7 \times 10^{15} \text{ м}^{-2} < n_s < 2 \times 10^{15} \text{ м}^{-2}$  данные хорошо описываются линейной зависимостью, которая экстраполируется к нулю при  $n_s \approx 0.14 \times 10^{15} \text{ м}^{-2}$  (штриховая черная линия). Однако при более низких плотностях электронов вплоть до  $n_s \approx 0.2 \times 10^{15} \text{ м}^{-2}$  (до  $r_s \approx 12$ ) экспериментальная зависимость  $B_c(n_s)$  отклоняется от прямой и линейно экстраполируется в начало координат.

Сплошной красной линией на рис. 2 показано поле поляризации  $B_c(n_s)$ , рассчитанное с использованием метода квантового Монте-Карло [33]. Экспериментальные результаты хорошо согласуются с теоретическими расчетами для чистого предела  $k_F l \gg 1$

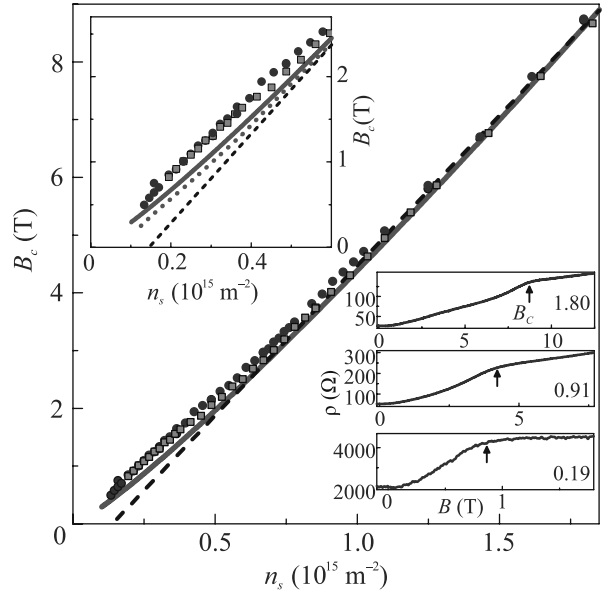


Рис. 2. (Цветной онлайн) Зависимость поля полной спиновой поляризации  $B_c$  от электронной плотности при температуре 30 мК для двух образцов SiGe/Si/SiGe (точки и квадраты). Черная пунктирная линия представляет собой линейную аппроксимацию данных при высокой плотности, которые экстраполируются в ноль при плотности  $n_s \approx 0.14 \times 10^{15} \text{ м}^{-2}$ . Сплошная красная линия соответствует расчету [33] для чистого предела. Верхняя вставка: область низкой плотности из основного рисунка в увеличенном масштабе. Также красной пунктирной линией показан расчет [33] с учетом рассеяния электронов. Нижняя вставка: магнитосопротивление в параллельном поле при температуре 30 мК при различных концентрациях электронов в единицах  $10^{15} \text{ м}^{-2}$ . Поле поляризации  $B_c$ , определяемое пересечением касательных, отмечено стрелками. Из работы [16]

(здесь  $k_F$  – волновой вектор Ферми и  $l$  – длина свободного пробега), если считать  $g$ -фактор Ланде, перенормированный электрон-электронным взаимодействием, равным 2.4. Хотя в работе [33]  $g$ -фактор Ланде был равен 2, причина 20 % расхождения между теорией и экспериментом может быть связана с конечным размером волновой функции электрона в направлении, перпендикулярном интерфейсу. Кроме того, произведение  $k_F l$  уменьшается с уменьшением электронной плотности, что приводит к отклонению теоретической зависимости вниз, как показано красной пунктирной линией на верхней вставке к рис. 2.

Чтобы проверить, влияет ли остаточный беспорядок на результаты для магнитного поля полной спиновой поляризации, мы сравним наши данные с данными, полученными ранее на образцах Si/SiGe с подвижностью электронов на порядок ниже, чем в на-

ших образцах [34]. При высоких концентрациях электронов зависимость  $B_c(n_s)$  в работе [34] также является линейной и экстраполируется к нулю при конечной плотности. При этом наклон зависимости равен  $6 \times 10^{-15} \text{ Тл} \cdot \text{м}^2$  и близок к наклону  $5.4 \times 10^{-15} \text{ Тл} \cdot \text{м}^2$ , который наблюдался в нашем эксперименте. Однако электронная плотность, в которую экстраполируется зависимость  $B_c(n_s)$ , равна примерно  $0.3 \times 10^{15} \text{ м}^{-2}$  в [34], что заметно выше, чем в нашем случае. Таким образом, беспорядок влияет на поведение поля поляризации  $B_c$  в соответствии с работами [33, 35]. Хорошее соответствие наших экспериментальных данных для  $B_c$  и расчетов для чистого предела [33] свидетельствует о том, что электронные свойства наших образцов слабо чувствительны к остаточному беспорядку, и чистый предел в наших образцах достигнут.

Произведение  $g_F m$ , характеризующее всю двумерную электронную систему, в чистом пределе может быть определено из равенства зеемановского расщепления и энергии Ферми полностью спин-поляризованной электронной системы

$$g_F \mu_B B_c = \frac{2\pi \hbar^2 n_s}{m g_v}, \quad (1)$$

где  $g_v = 2$  – долинное вырождение и  $\mu_B$  – магнетон Бора.

С другой стороны,  $g$ -фактор Ланде  $g_F$  и эффективная масса  $m_F$  на уровне Ферми могут быть определены из анализа осцилляций Шубникова–де Гааза в относительно слабых магнитных полях, как это было сделано в работе [16]:

$$A = \sum_i A_i^{LK} \cos \left[ \pi i \left( \frac{\hbar c \pi n_s}{e B_{\perp}} - 1 \right) \right] Z_i^s Z_i^v, \quad (2)$$

$$A_i^{LK} = 4 \exp \left( -\frac{2\pi^2 i k_B T_D}{\hbar \omega_c} \right) \frac{2\pi^2 i k_B T / \hbar \omega_c}{\sinh(2\pi^2 i k_B T / \hbar \omega_c)},$$

$$Z_i^s = \cos \left( \pi i \frac{\Delta_Z}{\hbar \omega_c} \right) = \cos \left( \pi i \frac{g_F m_F}{2m_e} \right),$$

$$Z_i^v = \cos \left( \pi i \frac{\Delta_v}{\hbar \omega_c} \right),$$

где  $T_D$  – температура Дингла,  $T$  – температура,  $\hbar \omega_c$  – циклотронное расщепление,  $\Delta_Z$  – зеемановское расщепление,  $\Delta_v$  – долинное расщепление. Из соотношения (2) видно, что если задать  $Z_i^v = 1$  в исследуемом диапазоне магнитных полей, подгоночными параметрами являются  $T_D m_F$ ,  $m_F$  и  $g_F m_F$  [36]. Значения  $T_D m_F$  и  $m_F$  получены в области температур, где спиновое расщепление незначительно. Будучи слабо чувствительной к этим двум подгоночным параметрам, форма подгонки при самых низких температурах оказывается очень чувствительной к

произведению  $g_F m_F$ . Качество подгонки показано на рис. 3. Нормированное на  $\rho_0$  магнитосопротивление

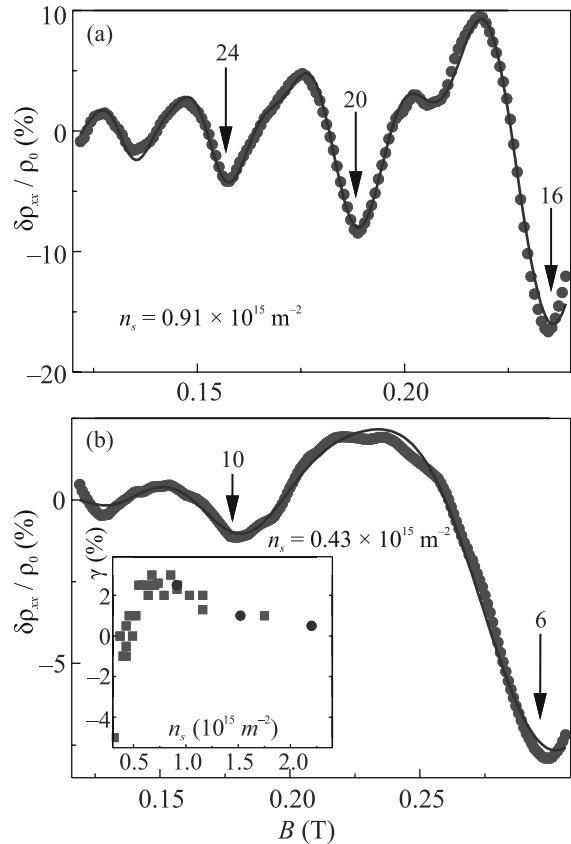


Рис. 3. (Цветной онлайн) Подгонка нормированного магнитосопротивления  $\delta\rho_{xx}/\rho_0$  в квантовой яме SiGe/Si/SiGe при температуре  $\approx 30 \text{ мК}$  (точки) с использованием уравнения (2) с (а)  $g_F m_F/m_e = 0.905$ ,  $T_D = 0.12 \text{ К}$ ,  $m_F = 0.25 m_e$  и  $\gamma = 2.5 \%$  и (б)  $g_F m_F/m_e = 1.11$ ,  $T_D = 0.15 \text{ К}$ ,  $m_F = 0.33 m_e$  и  $\gamma = -0.5 \%$ . Указаны факторы заполнения  $\nu = n_s \hbar c / e B_{\perp}$  в минимумах. Вставка: коэффициент асимметрии  $\gamma$  [36], который описывает немного разные температуры Дингла  $T_D^{u,d} = T_D(1 \pm \gamma)$  для двух спиновых подзон, в зависимости от плотности электронов для двух образцов. Температура Дингла для энергетически выгодного направления спина меньше в диапазоне электронных плотностей  $0.6 \times 10^{15} \text{ м}^{-2} < n_s < 2 \times 10^{15} \text{ м}^{-2}$ , тогда как при меньших плотностях величина  $\gamma$  меняет знак. Из работы [16]

$\delta\rho_{xx} = \rho_{xx} - \rho_0$  (где  $\rho_0$  – монотонное изменение диссипативного сопротивления с магнитным полем) хорошо описывается уравнением (2).

Основной результат, показанный на рис. 1, состоит в том, что произведения усредненного значения  $g_F m$  и  $g_F m_F$  на уровне Ферми ведут себя аналогично при высоких плотностях электронов, когда электрон-электронные взаимодействия относительно

но слабы, но качественно отличаются при низких плотностях, где взаимодействия становятся особенно сильными [37]. Произведение  $g_F m_F$  монотонно возрастает с уменьшением электронной плотности во всем диапазоне концентраций электронов, а произведение  $g_F m$  выходит на насыщение при малых  $n_s$ . Подчеркнем, что важна качественная разница в поведении двух наборов данных, а не сравнение абсолютных значений. Принимая во внимание слабость обменных эффектов в двумерной электронной системе в кремнии [21, 22], это различие можно объяснить только разным поведением двух эффективных масс. Качественно различное их поведение свидетельствует о вызванном взаимодействием уплотнения зоны на уровне Ферми в этой электронной системе. Для большей уверенности в наших результатах и выводах на нижней вставке к рис. 1 приведены данные для эффективной массы  $m_F$ , определенной из анализа температурной зависимости амплитуды осцилляции Шубникова–де Гааза, как это было сделано в работе [38]. Аналогичное поведение  $m_F$  и  $g_F m_F$  как функции электронной плотности позволяет исключить возможное влияние  $g$ -фактора на поведение произведения эффективной массы и  $g$ -фактора, что согласуется с ранее полученными результатами для двумерной электронной системы в кремнии.

Экспериментальные результаты естественным образом интерпретируются в рамках концепции фермионной конденсации [2, 4, 8], происходящей на уровне Ферми в диапазоне импульсов, в отличие от конденсации бозонов. С увеличением энергии электрон-электронного взаимодействия одночастичный спектр становится все более плоским в области  $\Delta p$  вблизи импульса Ферми  $p_F$  (верхняя вставка к рис. 1). При относительно высоких концентрациях электронов  $n_s > 0.7 \times 10^{15} \text{ м}^{-2}$  этот эффект несущественен, так как одночастичный спектр не меняется заметным образом в интервале  $\Delta p$ , и поведение усредненной по энергии эффективной массы и массы на уровне Ферми практически одинаковы. Уменьшение электронной плотности в диапазоне  $n_s < 0.7 \times 10^{15} \text{ м}^{-2}$  приводит к уплотнению спектра, так что эффективная масса на уровне Ферми,  $m_F = p_F/v_F$ , продолжает возрастать (здесь  $v_F$  – скорость Ферми). Напротив, с усредненной по энергии эффективной массой этого не происходит, поскольку она не особенно чувствительна к этому уплотнению. Ожидается, что в критической области, где эффективная масса на уровне Ферми расходится,  $m_F$  будет зависеть от температуры. Слабое уменьшение величины  $g_F m_F$  с температурой действительно наблюдается в точке наименьшей плотности на

рис. 1. В критической области рост  $m_F$  ограничивается предельным значением, определяемым температурой:  $m_F < p_F \Delta p / 4k_B T$ . В наших экспериментах увеличение  $m_F$  достигает примерно двух раз при  $n_s = 0.3 \times 10^{15} \text{ м}^{-2}$  и  $T \approx 30 \text{ мК}$ , что позволяет оценить отношение  $\Delta p/p_F \sim 0.06$ . Именно малость интервала  $\Delta p$  обеспечивает хорошее согласие расчета [33] с нашим экспериментом.

Следует отметить, что эффективная масса на уровне Ферми имеет тенденцию расходиться при плотности  $n_m$ , выше критической плотности электронов  $n_c$  перехода металл-изолятор, что свидетельствует о качественном различии между квантовыми ямами SiGe/Si/SiGe со сверхнизким беспорядком и наименее разупорядоченными кремниевыми МОП-структурами, в которых наблюдается обратное соотношение  $n_c \geq n_m$  [39]. Это указывает на то, что эти две плотности не связаны напрямую, а фермионная конденсация и переход металл-изолятор являются двумя разными переходами.

**III. Слияние уровней Ландау в сильно взаимодействующей двумерной электронной системе.** Другим примером нетривиального проявления межфермионных взаимодействий в сильно коррелированных Ферми-жидкостях является слияние квантовых уровней в Ферми-системе с дискретным спектром, когда заполнения двух квантовых уровней на уровне химического потенциала различны [18].

Приложение перпендикулярного магнитного поля  $B$  к однородной двумерной электронной системе создает две подсистемы уровней Ландау с номерами  $i$ , отличающиеся  $\pm$ -проекциями спина электрона на направление поля. Энергетические уровни  $\varepsilon_i^\pm$  в каждом наборе разделены циклотронным расщеплением  $\hbar\omega_c = \hbar eB/m^*c$ , а два набора уровней Ландау сдвинуты относительно друг друга спиновым расщеплением  $\Delta_Z = g\mu_B B$ , где  $m^*$  и  $g$  – значения массы и Ланде  $g$ -фактора, перенормированные электронным взаимодействием (долинным вырождением для простоты пока пренебрегается). Уровни Ландау с противоположными направлениями спина должны пересекаться при изменении электронной плотности, что обусловлено сильной зависимостью эффективной массы от  $n_s$  при слабой зависимости  $g$ -фактора от  $n_s$ . В частности, при больших плотностях электронов циклотронное расщепление обычно превышает спиновое, тогда как при малых плотностях должно иметь место противоположное соотношение  $\hbar\omega_c < \Delta_Z$  из-за резко возрастающей массы.

Как термодинамические, так и кинетические свойства электронной системы определяются положением химического потенциала относительно

квантовых уровней, которое, в свою очередь, определяется магнитным полем и плотностью электронов. Фактор заполнения равен  $\nu = n_s/n_0$ , где  $n_0 = eB/hc$  – вырождение уровня. Когда  $\nu$  является дробным, химический потенциал совпадает с частично заполненным квантовым уровнем. Вероятность найти электрон на уровне химического потенциала определяется дробной частью фактора заполнения и может варьироваться от нуля до единицы. При целочисленном факторе заполнения наблюдается скачок химического потенциала. В эксперименте скачок проявляется как минимум продольного электрического сопротивления. Минимумы сопротивления в плоскости  $(B, n_s)$  соответствуют веерной диаграмме уровней Ландау.

При фиксированном внешнем магнитном поле и заполнении многих квантовых уровней изменение электронной плотности на квантовом уровне мало по сравнению с  $n_s$ . Изменение энергии  $\varepsilon_\lambda$  оценивается с помощью соотношения Ландау

$$\delta\varepsilon_\lambda = \sum_{\sigma} \Gamma_{\lambda\sigma} \delta n_{\sigma}, \quad (3)$$

где  $\Gamma_{\lambda\sigma}$  – амплитуда электрон-электронного взаимодействия, являющаяся феноменологической компонентой теории ферми-жидкости [1]. Выбирая магнитное поле, при котором разность между соседними уровнями Ландау  $\varepsilon_i^+$  и  $\varepsilon_{i+1}^-$

$$D = \varepsilon_i^+ - \varepsilon_{i+1}^- = \Delta_Z(n_s, B) - \hbar\omega_c(n_s, B) \quad (4)$$

занимается при факторе заполнения  $\nu = n_s hc/eB = 2i + 2$ , стартуем с более высокой плотности, где оба уровня  $(i + 1)^-$  и  $i^+$  полностью заполнены при  $\nu = N = 2i + 3$ , причем разность  $D(N)$  отрицательна. Удаление электронов с уровня  $(i + 1)^-$  означает уменьшение электронной плотности и увеличение  $D$ . Пересечение уровней происходит в точке  $\nu = 2i + 2$ , т.е. уровень  $i^+$  становится пустым, а уровень  $(i + 1)^-$  полностью заполнен при условии  $\Gamma(i) = (\Gamma_{i+1, i+1}^{--} - \Gamma_{i, i+1}^{+-}) - (\Gamma_{i+1, i}^{-+} - \Gamma_{i, i}^{++}) \leq 0$ .

В противоположном случае

$$\Gamma(i) > 0 \quad (5)$$

одночастичные уровни притягиваются друг к другу и сливаются на уровне химического потенциала  $\mu$  согласно условию  $\varepsilon_{i+1}^- = \varepsilon_i^+ = \mu$ . Оба уровня частично заполнены с долями пустых состояний  $0 < f_i < 1$  и  $0 < f_{i+1} < 1$ , удовлетворяющими условию нормировки  $f_i + f_{i+1} = f = N - \nu$ . Слияние начинается, когда на уровне  $\varepsilon_i^+$  появляются пустые состояния, и заканчивается, когда этот уровень полностью опустошается. Это соответствует увеличению доли пустых состояний  $f$  в диапазоне между  $f = 1$  (или  $\nu = 2i + 2$ )

и  $f = \min(1 + \Gamma(i)/(\Gamma_{i+1, i+1}^{--} - \Gamma_{i, i+1}^{+-}), 2)$ . Вне области слияния реализуется обычная диаграмма уровней Ландау. Отметим, что щель между соседними уровнями Ландау  $\varepsilon_i^+$  и  $\varepsilon_{i+1}^-$  оказывается невидимой в транспортных и термодинамических экспериментах. Верхняя граница области слияния  $n_m(B)$  может быть записана

$$\hbar\omega_c - \Delta_Z = 0. \quad (6)$$

Электронная система в (100) кремниевых МОП-структурах характеризуется наличием в спектре двух долин, так что каждый энергетический уровень  $\varepsilon_i^\pm$  расщепляется на два уровня, как схематично показано на рис. 4. Легко видеть, что долинные расщеп-

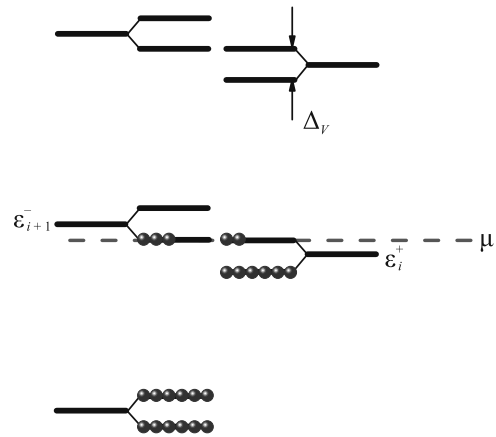


Рис. 4. (Цветной онлайн) Схема слияния расщепленных по спину и долине уровней Ландау на уровне химического потенциала. Занятые уровни обозначены точками. Заполнения двух квантовых уровней на уровне химического потенциала изменяются при изменении электронной плотности. Из работы [18]

ление  $\Delta_v$  способствует слиянию квантовых уровней. Чем больше долинное расщепление, тем выше плотность электронов, при которой уровни  $(i + 1)^-$  и  $i^+$  с разными долинными индексами должны сливаться на уровне химического потенциала при факторе заполнения  $\nu = 4i + 4$ . Верхняя граница области слияния  $n_m(B)$  определяется соотношением

$$\hbar\omega_c - \Delta_Z - \Delta_v = 0, \quad (7)$$

которое отличается от уравнения (6) наличием долинного расщепления. Поскольку распределения электронной плотности, соответствующие двум долинам, разнесены на расстояние  $\alpha$  в направлении, перпендикулярном границе раздела Si-SiO<sub>2</sub>, междолинный перенос заряда создает добавочное электрическое поле, приводящее к  $\Gamma(i) = 4\pi e^2 \alpha / \kappa$ , где  $\kappa$  – диэлектрическая проницаемость.  $\Gamma(i)$  определяет силу эффекта слияния, а нижняя граница

области слияния соседних уровней Ландау описывается выражением  $\hbar\omega_c + n_0\Gamma(i) - \Delta_Z - \Delta_v = 0$ .

В пределе высокой плотности, когда эффекты электрон-электронного взаимодействия пренебрежимо малы, эффективная масса и  $g$ -фактор равны  $m_0 = 0.19 m_e$  и  $g_0 = 2$ , так что циклотронное расщепление значительно превышает спиновое. При низких плотностях электронов, когда эффекты взаимодействия сильны, эффективная масса  $m^*(n_s)$ , как обнаружено, расходится согласно  $m_0/m^* \simeq (n_s - n_c)/n_s$  в квантовой критической точке, близкой к переходу металл-изолятор, который происходит при  $n_c \simeq 8 \times 10^{10} \text{ см}^{-2}$ , в то время как  $g$ -фактор остается близким к  $g_0$ , будучи равным  $g \simeq 1.4 g_0$  [21, 22, 24, 25]. Верная диаграмма уровней Ландау для этой электронной системы в перпендикулярных магнитных полях представлена на рис. 5. Минимумы квантовых осцилляций

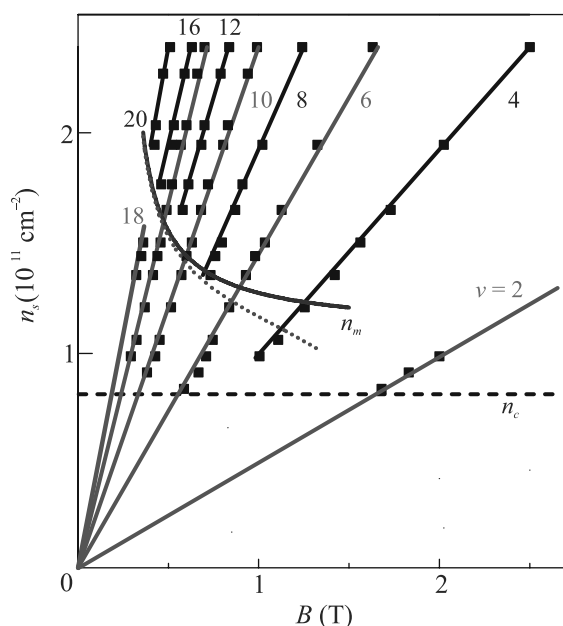


Рис. 5. (Цветной онлайн) Положения минимумов осцилляций Шубникова–де Гааза в кремниевой МОП-структуре в координатах  $(B, n_s)$  (квадраты) и ожидаемые положения циклотронного и спинового минимумов, рассчитанные по формуле  $n_s = \nu eB/hc$  (сплошные линии). Указано положение перехода металл-изолятор в  $B = 0$ . Расчетная граница слияния  $n_m(B)$  показана сплошной синей линией при использовании уравнения (7) и пунктирной фиолетовой линией при учете нелинейных (кубических) поправок к спектру вблизи поверхности Ферми. Из работы [18]

ляций при факторе заполнения  $\nu = 4i + 4$  исчезают ниже некоторой электронной плотности  $n^*$ , зависящей от  $\nu$ , в то время как минимумы при  $\nu = 4i + 2$  сохраняются вплоть до существенно меньших плот-

ностей. Хотя такое поведение согласуется с резким ростом эффективной массы при уменьшении  $n_s$ , зависимость плотности  $n^*$  от фактора заполнения (или  $B$ ) оказывается аномально сильной, что объяснить не удается. В частности, эта зависимость не может быть объяснена вызванным примесями уширением квантовых уровней согласно  $\omega_c\tau \sim 1$  (где  $\tau$  – время упругого рассеяния), когда падение подвижности  $e\tau/m^*$  при низких плотностях электронов определяется увеличением массы [24].

Ожидаемая верхняя граница области слияния  $n_m(B)$ , показанная сплошной синей линией на рис. 5, определена в работе [18]. Расчетная граница согласуется с экспериментальной плотностью  $n^*(B)$ , при которой исчезают минимумы осцилляций при  $\nu = 4i + 4$ . Этот факт свидетельствует о слиянии уровней в двумерной электронной системе в кремнии.

Описание данных  $n^*(B)$  в сильном магнитном поле улучшается в картине слияния, если учесть нелинейные (кубические) поправки к спектру на поверхности Ферми вблизи квантовой критической точки, которые естественным образом приводят к уменьшению эффективной массы с возрастанием магнитного поля. Скорректированная зависимость  $n_m(B)$  показана пунктирной фиолетовой линией на рис. 5; подробнее об этом см. [18].

**IV. Вызванное взаимодействием слияние уровней Ландау в электронной системе двойных квантовых ям.** Как обсуждалось в предыдущем разделе, спектр двумерной электронной системы, находящейся в перпендикулярном магнитном поле, состоит из двух эквидистантных лестниц квантовых уровней, соответствующих направлениям спина вверх и вниз. Если магнитное поле наклонено на угол  $\beta$ , расстояние между квантовыми уровнями в каждой из спиновых лестниц равно  $\hbar\omega_c = \hbar eB \cos(\beta)/m^*c$ , а сдвиг между лестницами равен  $g\mu_B B$ . Увеличение угла наклона приводит к пересечению квантовых уровней двух лестниц. В первый раз пересечение происходит при значении угла  $\beta_1$ , удовлетворяющем условию  $\cos(\beta_1) = gm^*/2m_e$ . При  $\beta = \beta_1$  скачки химического потенциала при четных факторах заполнения и соответствующие линии верной диаграммы должны исчезнуть. Если учесть взаимодействие между электронами соседних квантовых уровней и увеличивать угол наклона в окрестности  $\beta_1$ , то квантовый уровень, заполненный до пересечения, должен с ростом  $\beta$  опустошаться. Однако предположим, что одночастичная энергия электронов на опустошающемся уровне уменьшается за счет электронного взаимодействия. В этом случае оба уровня остаются прикрепленными к хи-

мическому потенциалу в широком диапазоне углов  $\Delta\beta_1$ , определяемом силой взаимодействия. Вероятность найти электрон на уровне химического потенциала различна для противоположных ориентаций спина, будучи зависящей от внешнего параметра, угла наклона. Такое поведение соответствует слиянию квантовых уровней.

В приведенном выше гипотетическом рассмотрении пересечение или слияние квантовых уровней контролируется углом наклона магнитного поля. В экспериментах с сильно взаимодействующей двумерной электронной системой в (100) кремниевых МОП-структурах анализировалось исчезновение минимумов продольного сопротивления при изменении как перпендикулярного магнитного поля, так и электронной плотности при фиксированном факторе заполнения  $\nu = 4(i + 1)$ , где  $i$  – целое число. В этом случае слияние уровней происходит вблизи квантовой критической точки, как это контролируется эффективной массой, зависящей от электронной плотности [18]. Можно было бы думать, что слияние уровней является предвестником распухания поверхности Ферми. На самом деле, эти два эффекта не обязательно связаны друг с другом. Ниже продемонстрировано, что эффект слияния уровней имеет место в двухслойной 2D-электронной системе с туннельным барьером между электронными слоями [19]. Отметим, что увеличение эффективной массы несущественно в этом случае.

Образец, использованный в этом разделе, представляет собой параболическую квантовую яму с узким туннельным барьером, выращенную на подложке GaAs (подробное описание см. в работе [19]). Приложение напряжения  $V_g$  между затвором и контактом к квантовой яме позволяет регулировать плотность электронов. Электроны появляются в задней части квантовой ямы при напряжении на затворе выше  $V_{th1} \approx -0.7$  В и заполняют одну подзону вплоть до  $V_g = V_{th2} \approx -0.3$  В (рис. 6). При  $V_g > V_{th2}$  электроны появляются в передней части ямы и заполняют вторую подзону вплоть до точки баланса  $V_g = V_{balance} \approx 0$ .

Авторы ориентируются на диапазон затворных напряжений между  $V_{th2}$  и  $V_{balance}$ , где электроны в перпендикулярных магнитных полях заполняют две квантовые лестницы. Положения квантовых уровней определяются магнитным полем и напряжением на затворе. В заштрихованных областях на рис. 6 щели в одночастичном спектре и скачки химического потенциала защищены квантовыми эффектами [40]. В остальных областях слияние квантовых уровней в принципе возможно.

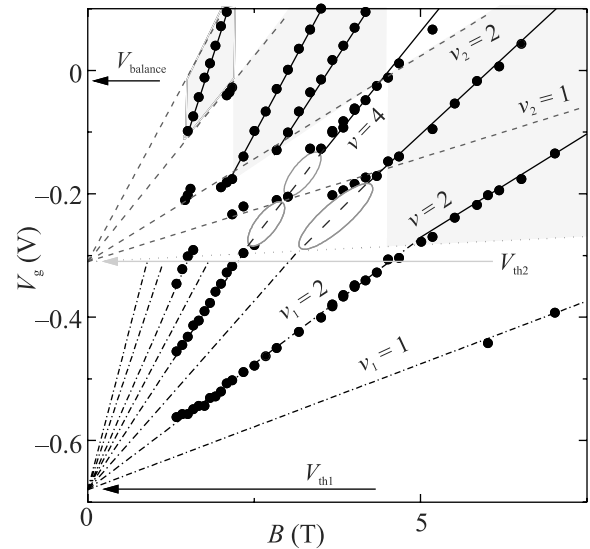


Рис. 6. (Цветной онлайн) Верная диаграмма уровней Ландау для двойной квантовой ямы AlGaAs, исследованной в работе [19]. Положения минимумов продольного сопротивления в плоскости  $(B, V_g)$  отмечены точками. Указаны фактор заполнения  $\nu$  для двухслойной электронной системы, а также фактор заполнения  $\nu_1$  ( $\nu_2$ ) для заднего (переднего) слоя. В заштрихованных областях слияние квантовых уровней в перпендикулярных магнитных полях невозможно. В областях, отмеченных овалами, минимумы сопротивления в перпендикулярном магнитном поле не наблюдаются, тогда как в наклонном магнитном поле они появляются. Из работы [19]

Рассмотрим фактор заполнения  $\nu = 3$ . При  $V_g = V_{th2}$  магнитное поле равно  $B_\nu = n_1(V_{th2})hc/3e$ , где  $n_1(V_{th2})$  – плотность электронов в заднем слое. Энергия  $\varepsilon_0 - g\mu_B B_\nu/2$  уровня со спином вверх лестницы переднего слоя совпадает с энергией  $\varepsilon_1 - g\mu_B B_\nu/2$  уровня со спином вверх лестницы заднего слоя (рис. 7а). Поскольку вдали от точки баланса плотность электронов в заднем слое практически не меняется при увеличении  $V_g$  выше  $V_{th2}$  (см., например, рис. 6b работы [41]), плотность электронов в переднем слое в магнитном поле  $B = B_\nu + \Delta B$  вдоль штриховой линии при  $\nu = 3$ , ограниченной овалом на рис. 6, равна  $n_2 \simeq \Delta n = 3e\Delta B/hc$ . Чтобы сбалансировать изменение циклотронной энергии  $\hbar e\Delta B/m^*c$  и прикрепить оба уровня к химическому потенциалу  $\mu$ , необходимо перенести небольшое количество электронов между уровнями

$$\delta n_2 = -\delta n_1 > 0, \quad (8)$$

что приводит к сдвигу одночастичных уровней

$$\begin{aligned} \delta\varepsilon_1^b &= \Gamma_1^{bb}\delta n_1 + \Gamma_1^{bf}\delta n_2, \\ \delta\varepsilon_0^f &= \Gamma_0^{fb}\delta n_1 + \Gamma_0^{ff}\delta n_2, \end{aligned} \quad (9)$$



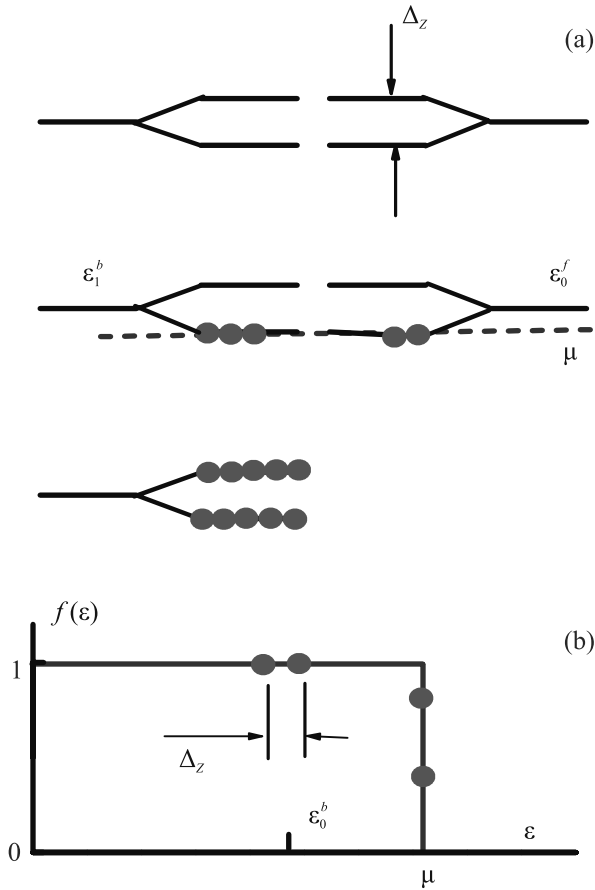


Рис. 7. (Цветной онлайн) (а) – Расположение и заполнение квантовых уровней в двухслойной электронной системе в режиме слияния при факторе заполнения  $\nu = 3$ . (б) – Функция распределения электронов в режиме слияния при  $\nu = 3$ . Из работы [19]

где  $\Gamma_j^{\lambda\sigma}$  – амплитуда электронного взаимодействия, индекс  $b$  ( $f$ ) относится к заднему (переднему) слою, и  $j = 0.1$  – номер уровня Ландау. Оба уровня прикрепляются к химическому потенциалу при условии  $\delta\varepsilon_0 - \delta\varepsilon_1 = \hbar e\Delta B/m^*c$ , что дает

$$\delta n_2 = \frac{\hbar e\Delta B}{m^*c\Gamma}, \quad (10)$$

где  $\Gamma = \Gamma_1^{bb} + \Gamma_0^{ff} - \Gamma_1^{bf} - \Gamma_0^{fb}$ . В приближении плоского конденсатора получаем

$$\Gamma \simeq \frac{4\pi e^2 a}{\kappa}, \quad (11)$$

где  $a$  – расстояние между центрами масс распределений электронной концентрации в направлении  $z$  в обеих подзонах. Слияние уровней справедливо для фактора заполнения

$$\nu_2 = \frac{(n_2 + \delta n_2)\hbar c}{eB} < 1. \quad (12)$$

Авторы подчеркивают, что в широком диапазоне магнитных полей при фиксированном факторе заполнения  $\nu$  вероятность найти электрон с энергией, равной химическому потенциалу, различна для двух слившихся уровней, как показано на рис. 7б.

Хотя для простоты выше был рассмотрен случай фактора заполнения  $\nu = 3$ , те же аргументы справедливы и для более высоких факторов заполнения.

Факт слияния квантовых уровней в эксперименте подтверждается использованием наклонных магнитных полей. С наклоном магнитного поля минимумы магнитосопротивления и скачки химического потенциала возникают [42], в частности, вдоль штриховых линий при  $\nu = 3$  и  $\nu = 4$ , указанных овалами на рис. 6. Появление скачков химического потенциала в двухслойной электронной системе в наклонных магнитных полях свидетельствует о том, что квантовые уровни достаточно узкие.

Как упоминалось выше, скачки химического потенциала могут быть защищены квантовыми эффектами. В общем случае перенос электронов между квантовыми уровнями разных подзон приводит к смешиванию волновых функций подзон и открытию энергетической щели, если недиагональные матричные элементы не равны нулю [40]. Это реализуется в заштрихованных областях на рис. 6. Напротив, в областях слияния при  $\nu = 3$  и  $\nu = 4$ , указанных овалами на рис. 6, недиагональные матричные элементы в перпендикулярных магнитных полях равны нулю из-за ортогональности находящейся в плоскости части волновых функций в двухслойной электронной системе. Наклон магнитного поля нарушает ортогональность волновых функций соседних квантовых уровней, и возникает энергетическая щель [42, 43].

**V. Слияние квантовых уровней композитных фермионов.** Наконец, рассмотрим указание на слияние квантовых уровней композитных фермионов с разными долинными индексами [20]. Концепция композитных фермионов [44–48] успешно описывает дробный квантовый эффект Холла с нечетными знаменателями, сводя его к обычному целочисленному квантовому эффекту Холла для композитных частиц. В простейшем случае композитный фермион состоит из электрона и двух квантов магнитного потока и движется в эффективном магнитном поле  $B^*$ , определяемом разностью внешнего магнитного поля  $B$  и поля, соответствующего фактору заполнения электронов  $\nu = 1/2$ . Фактор заполнения для композитных фермионов  $p$  связан с  $\nu$  согласно выражению  $\nu = p/(2p \pm 1)$ . Дробная энергетическая щель, которая, как предсказано, определяется кулоновским взаимодействием в виде  $e^2/\kappa l_B$ , соот-

ветствует циклотронной энергии композитных фермионов  $\hbar\omega_c^* = \hbar eB^*/m_{CF}c$ , где  $l_B = (\hbar c/eB)^{1/2}$  – магнитная длина и  $m_{CF}$  – эффективная масса композитного фермиона. Электрон-электронное взаимодействие входит в теорию неявно, поскольку используется приближение среднего поля в предположении, что флуктуации электронной плотности малы. Теория подтверждается экспериментальным наблюдением масштаба, соответствующего фермиевскому импульсу композитных фермионов в нулевом эффективном магнитном поле при  $\nu = 1/2$ .

Образцы, изучаемые в этом разделе, представляют собой сверхчистые двухдолинные (001) квантовые ямы SiGe/Si/SiGe, аналогичные описанным в работах [29, 30]. Продольное удельное сопротивление  $\rho_{xx}$  как функция обратного фактора заполнения показано для различных электронных плотностей на рис. 8а. Минимумы сопротивления наблюдаются при квантовых числах композитных фермионов  $p = 1, 2, 3, 4$  и  $6$  вблизи  $\nu = 1/2$  в положительных и отрицательных эффективных полях  $B^*$ , что свидетельствует о высоком качестве образцов. Высокое качество квантовой ямы также подтверждается наличием дробей  $\nu = 4/5$  и  $\nu = 4/11$  [49], соответствующих  $p = 4/3$ , которые могут быть описаны в терминах второго поколения композитных фермионов. Минимумы при  $p = 3$  исчезают ниже определенной электронной плотности, хотя окружающие минимумы при  $p = 2$  и  $p = 4$  сохраняются до значительно более низких плотностей. Ясно, что выделенность минимумов при  $p = 3$  при низких концентрациях электронов нельзя объяснить уширением уровней. С другой стороны, такое поведение удивительно похоже на эффект исчезновения циклотронных минимумов магнитосопротивления при низких плотностях электронов в кремниевых МОП транзисторах, в то время как спиновые минимумы сохраняются вплоть до заметно более низких плотностей [50], что означает, что циклотронное расщепление становится равным сумме спинового и долинного расщеплений, а соответствующие долинные подуровни сливаются [18].

Измерения в наклонных магнитных полях позволяют сделать выбор между спиновым и долинным происхождением эффекта. Зависимость магнитосопротивления от обратного фактора заполнения показана для угла наклона  $\Theta \approx 61^\circ$  при различных плотностях электронов на рис. 8б. Здесь авторы ориентируются на минимум сопротивления при  $\nu = 3/5$ . Поведение, наблюдаемое для минимума  $\nu = 3/5$ , очень похоже на поведение в перпендикулярных магнитных полях, что справедливо для всех образцов и углов наклона. Определяем плотность  $n_s^*$ , при которой

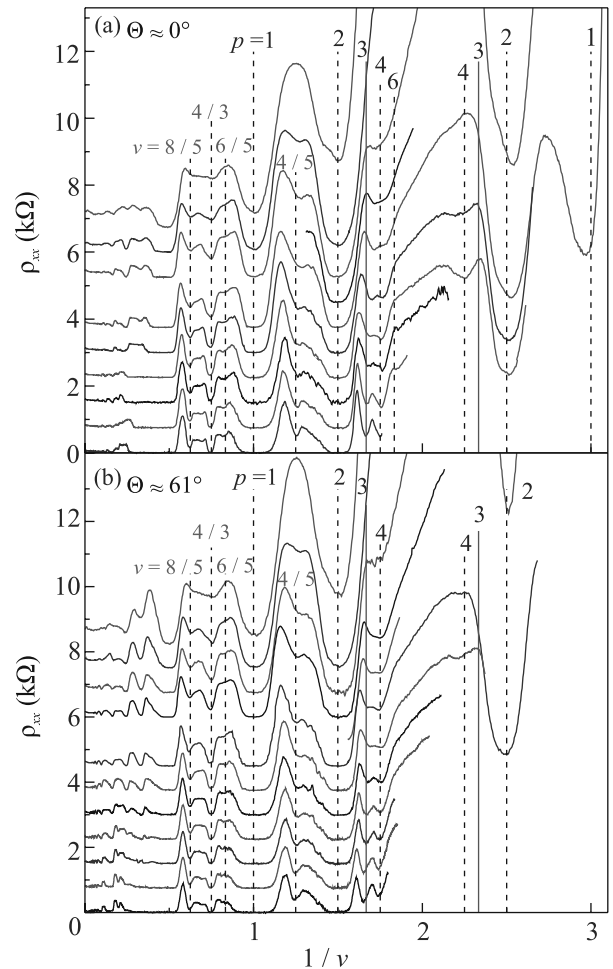


Рис. 8. (Цветной онлайн) Магнитосопротивление в квантовой яме SiGe/Si/SiGe при  $T \approx 0.03$  К (а) – в перпендикулярных магнитных полях при плотностях электронов (сверху вниз) 2.14, 2.81, 3.48, 3.81, 4.15, 4.82, 5.49, 6.15, 6.82 и  $7.49 \times 10^{10} \text{ см}^{-2}$ , и (б) – в наклонных магнитных полях при плотностях электронов (сверху вниз) 2.14, 2.81, 3.48, 4.15, 4.48, 4.82, 5.49, 6.15, 6.82, 7.49, 8.16 и  $8.83 \times 10^{10} \text{ см}^{-2}$ . Кривые сдвинуты по вертикали на  $750 \text{ } \Omega$  для ясности. Штриховыми вертикальными линиями отмечены ожидаемые положения наблюдаемых минимумов сопротивления, а сплошными вертикальными линиями – ожидаемые, но не наблюдаемые минимумы сопротивления при низких плотностях. Из работы [20]

начинает наблюдаться минимум сопротивления при  $\nu = 3/5$ , и строим ее зависимость от угла наклона, как показано на рис. 9б. Величина  $n_s^*$  оказывается независимой в пределах экспериментальной погрешности от угла наклона магнитного поля. Поскольку спиновое расщепление определяется полным магнитным полем  $\Delta_s = g\mu_B B_{\text{tot}}$ , можно ожидать, что значение  $n_s^*$  должно уменьшаться с углом наклона (вставка к рис. 9б), что противоречит эксперименту. Авто-

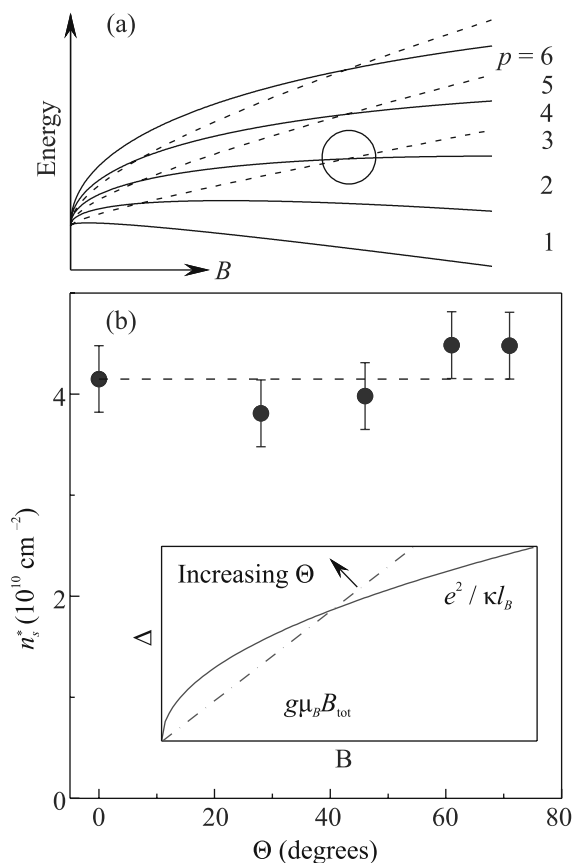


Рис. 9. (Цветной онлайн) (а) – Схематическое поведение уровней композитных фермионов с учетом расщепления между верхней (штриховые линии) и нижней (сплошные линии) долинами при изменении магнитного поля  $B$  при фиксированном  $\nu$ . В интересной области при  $\nu = 3$ , отмеченной кружком, происходит либо простое пересечение уровней, либо слияние/зацепление уровней, сопровождаемое постепенным изменением заполнения обоих уровней. (б) – Плотность  $n_s^*$ , при которой начинает наблюдаться минимум сопротивления при  $\nu = 3/5$  в квантовой яме SiGe/Si/SiGe, как функция угла наклона. Штриховая горизонтальная линия – линейная аппроксимация данных. На вставке схематично (с точностью до численного множителя) показаны зависимости циклотронной энергии композитных фермионов (сплошная линия) и зеемановской энергии (штрих-пунктирная линия) от магнитного поля  $B$  при фиксированном угле наклона. Наклон прямой линии увеличивается с увеличением  $\Theta$ . Из работы [20]

ры заключают, что спиновое происхождение эффекта можно исключить, выявляя его долинное происхождение. Долинное расщепление  $\Delta_v$ , как ожидается, нечувствительно к параллельной компоненте магнитного поля [51], так что величина  $n_s^*$  не должна зависеть от угла наклона, что согласуется с экспериментом. Таким образом, эти результаты указывают

на пересечение или слияние квантовых уровней композитных фермионов с разными долинными индексами, что свидетельствует о влиянии долин на дроби.

Понятно, что для пересечения или слияния уровней композитных фермионов с разными долинными индексами функциональные зависимости обоих расщеплений от магнитного поля (или электронной плотности) при фиксированном  $\nu$  должны различаться. Действительно, циклотронная энергия композитных фермионов  $\hbar\omega_c^*$  определяется энергией кулоновского взаимодействия  $e^2/\kappa l_B$ , а долинное расщепление  $\Delta_v$  в двумерной электронной системе в Si изменяется линейно с изменением магнитного поля (или плотности электронов) [52]. В сильных магнитных полях долинное расщепление сильно превышает циклотронную энергию композитных фермионов, так что для случая  $\nu = 3$  все три заполненных уровня композитных фермионов принадлежат одной долине (рис. 9а). При уменьшении магнитного поля при фиксированном  $\nu$  нижайший уровень с противоположным долинным индексом должен совпасть с верхним заполненным уровнем, приводя к исчезновению энергетической щели и исчезновению минимума сопротивления при  $\nu = 3$ . При дальнейшем уменьшении магнитного поля должно происходить либо простое пересечение уровней и повторное появление щели, либо слияние/зацепление уровней, сопровождаемое постепенным изменением заполнения обоих уровней [18]. По аналогии с кремниевыми МОП-транзисторами весьма вероятно, что слияние уровней композитных фермионов с разными долинными индексами происходит в квантовых ямах SiGe/Si/SiGe со сверхнизким беспорядком.

**VI. Заключение.** Мы обсудили недавние экспериментальные результаты, указывающие на уплотнение зон и слияние уровней Ландау на уровне химического потенциала в сильно коррелированных двумерных электронных системах. Показано, что числа заполнения квантовых состояний на уровне химического потенциала могут быть разными в диапазоне от нуля до единицы, что свидетельствует о не фермижидкостном виде функции распределения.

Группа из Института физики твердого тела была поддержана в рамках госзадания. С. В. Кравченко был поддержан грантом National Science Foundation # 1904024.

1. L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Statistical Physics Part 2*, Pergamon, Oxford (1980).
2. V. A. Khodel and V. R. Shaginyan, JETP Lett. **51**, 553 (1990).
3. G. E. Volovik, JETP Lett. **53**, 222 (1991).

4. P. Nozières, *J. Phys. I (France)* **2**, 443 (1992).
5. V. A. Khodel, J. W. Clark, and M. V. Zverev, *Phys. Rev. B* **78**, 075120 (2008).
6. V. R. Shaginyan, M. Y. Amusia, A. Z. Msezane, and K. G. Popov, *Phys. Rep.* **492**, 31 (2010).
7. J. Clark, M. Zverev, and V. Khodel, *Ann. Phys.* **327**, 3063 (2012).
8. M. V. Zverev, V. A. Khodel, and S. S. Pankratov, *JETP Lett.* **96**, 192 (2012).
9. T. T. Heikkila, N. B. Kopnin, and G. E. Volovik, *JETP Lett.* **94**, 233 (2011).
10. Ed. by K. Bennemann and J. Ketterson, *Novel Superfluids*, Oxford University Press, Oxford (2013).
11. S. Peotta and P. Torma, *Nat. Commun.* **6**, 8944 (2015).
12. G. E. Volovik, *Phys. Scr. T* **164**, 014014 (2015).
13. M. Amusia, K. Popov, V. Shaginyan, and W. Stefanowicz, *Theory of Heavy-Fermion Compounds*, Springer International Publishing, N.Y. (2015).
14. A. Camjayi, K. Haule, V. Dobrosavljević, and G. Kotliar, *Nat. Phys.* **4**, 932 (2008).
15. D. Yudin, D. Hirschmeier, H. Hafermann, O. Eriksson, A. I. Lichtenstein, and M. I. Katsnelson, *Phys. Rev. Lett.* **112**, 070403 (2014).
16. M. Y. Melnikov, A. A. Shashkin, V. T. Dolgoplov, S.-H. Huang, C. W. Liu, and S. V. Kravchenko, *Sci. Rep.* **7**, 14539 (2017).
17. V. A. Khodel, J. W. Clark, H. Li, and M. V. Zverev, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 216404 (2007).
18. A. A. Shashkin, V. T. Dolgoplov, J. W. Clark, V. R. Shaginyan, M. V. Zverev, and V. A. Khodel, *Phys. Rev. Lett.* **112**, 186402 (2014).
19. A. A. Shashkin, V. T. Dolgoplov, J. W. Clark, V. R. Shaginyan, M. V. Zverev, and V. A. Khodel, *JETP Lett.* **102**, 36 (2015).
20. V. T. Dolgoplov, M. Y. Melnikov, A. A. Shashkin, S.-H. Huang, C. W. Liu, and S. V. Kravchenko, *Phys. Rev. B* **103**, L161302 (2021).
21. S. V. Kravchenko and M. P. Sarachik, *Rep. Prog. Phys.* **67**, 1 (2004).
22. A. A. Shashkin, *Phys.-Uspekhi* **48**, 129 (2005).
23. V. M. Pudalov, *Phys.-Uspekhi* **49**, 203 (2006).
24. A. A. Shashkin, S. V. Kravchenko, V. T. Dolgoplov, and T. M. Klapwijk, *Phys. Rev. B* **66**, 073303 (2002).
25. A. Mokashi, S. Li, B. Wen, S. V. Kravchenko, A. A. Shashkin, V. T. Dolgoplov, and M. P. Sarachik, *Phys. Rev. Lett.* **109**, 096405 (2012).
26. V. T. Dolgoplov, *JETP Lett.* **101**, 282 (2015).
27. A. Y. Kuntsevich, Y. V. Tupikov, V. M. Pudalov, and I. S. Burmistrov, *Nat. Commun.* **6**, 7298 (2015).
28. A. A. Shashkin, A. A. Kapustin, E. V. Deviatov, V. T. Dolgoplov, and Z. D. Kvon, *Phys. Rev. B* **76**, 241302 (2007).
29. M. Y. Melnikov, A. A. Shashkin, V. T. Dolgoplov, S.-H. Huang, C. W. Liu, and S. V. Kravchenko, *Appl. Phys. Lett.* **106**, 092102 (2015).
30. M. Y. Melnikov, V. T. Dolgoplov, A. A. Shashkin, S.-H. Huang, C. W. Liu, and S. V. Kravchenko, *J. Appl. Phys.* **122**, 224301 (2017).
31. T. Okamoto, K. Hosoya, S. Kawaji, and A. Yagi, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 3875 (1999).
32. S. A. Vitkalov, H. Zheng, K. M. Mertes, M. P. Sarachik, and T. M. Klapwijk, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 2164 (2000).
33. G. Fleury and X. Waintal, *Phys. Rev. B* **81**, 165117 (2010).
34. T. M. Lu, L. Sun, D. C. Tsui, S. Lyon, W. Pan, M. Mühlberger, F. Schäffler, J. Liu, and Y. H. Xie, *Phys. Rev. B* **78**, 233309 (2008).
35. V. T. Renard, B. A. Piot, X. Waintal, G. Fleury, D. Cooper, Y. Niida, D. Tregurtha, A. Fujiwara, Y. Hirayama, and K. Takashina, *Nat. Commun.* **6**, 7230 (2015).
36. V. M. Pudalov, M. E. Gershenson, and H. Kojima, *Phys. Rev. B* **90**, 075147 (2014).
37. V. T. Dolgoplov, *Phys.-Uspekhi* **62**, 633 (2019).
38. M. Y. Melnikov, A. A. Shashkin, V. T. Dolgoplov, S. V. Kravchenko, S.-H. Huang, and C. W. Liu, *JETP Lett.* **100**, 114 (2014).
39. M. Y. Melnikov, A. A. Shashkin, V. T. Dolgoplov, A. Y. X. Zhu, S. V. Kravchenko, S.-H. Huang, and C. W. Liu, *Phys. Rev. B* **99**, 081106(R) (2019).
40. V. T. Dolgoplov, A. A. Shashkin, E. V. Deviatov, F. Hastreiter, M. Hartung, A. Wixforth, K. L. Campman, and A. C. Gossard, *Phys. Rev. B* **59**, 13235 (1999).
41. A. G. Davies, C. H. W. Barnes, K. R. Zolleis, J. T. Nicholls, M. Y. Simmons, and D. A. Ritchie, *Phys. Rev. B* **54**, R17331 (1996).
42. E. V. Deviatov, V. S. Khrapai, A. A. Shashkin, V. T. Dolgoplov, F. Hastreiter, A. Wixforth, K. L. Campman, and A. C. Gossard, *JETP Lett.* **71**, 496 (2000).
43. C. A. Duarte, G. M. Gusev, A. A. Quivy, T. E. Lamas, A. K. Bakarov, and J. C. Portal, *Phys. Rev. B* **76**, 075346 (2007).
44. J. K. Jain, *Phys. Rev. Lett.* **63**, 199 (1989).
45. B. I. Halperin, P. A. Lee, and N. Read, *Phys. Rev. B* **47**, 7312 (1993).
46. J. K. Jain, *Science* **266**, 1199 (1994).
47. T. Chakraborty, *Adv. Phys.* **49**, 959 (2000).
48. J. K. Jain, *Composite Fermions*, Cambridge University Press, N.Y. (2007).
49. V. T. Dolgoplov, M. Y. Melnikov, A. A. Shashkin, S.-H. Huang, C. W. Liu, and S. V. Kravchenko, *JETP Lett.* **107**, 794 (2018).
50. S. V. Kravchenko, A. A. Shashkin, D. A. Bloore, and T. M. Klapwijk, *Solid State Commun.* **116**, 495 (2000).
51. V. S. Khrapai, A. A. Shashkin, and V. T. Dolgoplov, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 126404 (2003).
52. V. S. Khrapai, A. A. Shashkin, and V. T. Dolgoplov, *Phys. Rev. B* **67**, 113305 (2003).