

Спектр возбуждений в ансамбле бозонов Хаббарда

В. В. Вальков¹⁾

Институт физики им. Л. В. Киренского, Федеральный исследовательский центр
“Красноярский научный центр Сибирского отделения Российской академии наук”, 660036 Красноярск, Россия

Поступила в редакцию 27 октября 2022 г.

После переработки 6 ноября 2022 г.

Принята к публикации 6 ноября 2022 г.

На основе атомного представления и метода Дайсона с введением индефинитной метрики развит подход, позволяющий в режиме сильных корреляций ($U \gg |t_{fm}|$) корректно вывести уравнения, описывающие бозе-конденсацию и спектр элементарных возбуждений бозонного ансамбля Хаббарда. В такой системе существенную роль играет кинематическое взаимодействие Дайсона, обусловленное свойствами коммутационных соотношений динамических переменных. В рамках операторной формы теории возмущений при конечных U получен эффективный гамильтониан и показано, что свойства ансамбля бозонов Хаббарда, кроме кинематического взаимодействия, определяются также коррелированными перескоками и притяжением между хаббардовскими бозонами. Численные расчеты продемонстрировали влияние этих взаимодействий на характеристики энергетического спектра возбуждений ансамбля бозонов Хаббарда, а также на зависимости концентрации конденсатных частиц от концентрации бозонов в системе.

DOI: 10.31857/S1234567822240089, EDN: neukuu

1. Введение. Статические и кинетические свойства однокомпонентной бозе-системы [1–3], а также многокомпонентных смесей ультрахолодных атомов [4–6] в значительной степени определяются конкуренцией между конденсацией Бозе–Эйнштейна и межатомным взаимодействием. Подобные эффекты могут наблюдаться также и в ультрахолодных молекулах [7]. В последнее время актуальными стали исследования, связанные с наблюдением в сильно вырожденных полупроводниках индуцированной электромагнитным полем Бозе конденсации электронно-дырочных пар [8]. Поскольку величиной межатомного взаимодействия можно управлять посредством изменения условий резонанса Фешбаха, то ультрахолодный Бозе ансамбль атомов, молекул, или электронно-дырочных пар представляет собой перспективную платформу для изучения многочастичных эффектов и развития теоретических представлений [9].

Аналитические методы исследования бозе-эйнштейновской конденсации хорошо разработаны для относительно слабого взаимодействия бозонов [10]. В этом случае использование свойства макроскопической заселенности состояния с нулевым значением квазиимпульса и среднеполевого приближения для оператора взаимодействия позволяет получать удовлетворительные результаты.

Если же взаимодействие бозонов превосходит их

кинетическую энергию, то метод Боголюбова [10] нуждается в корректировке. Этого можно достичь, например, посредством применения атомного представления [11], которое активно используется в теории сильно коррелированных электронных систем [12–17]. При таком подходе оператор взаимодействия бозонов на одном узле приобретает диагональный вид, что дает возможность корректно учесть вклады в наблюдаемые характеристики от этого оператора при любом значении параметра взаимодействия.

В данной работе применение атомного представления [11] и метода Дайсона [18], использующего индефинитную метрику, позволило рассмотреть конденсацию Бозе–Эйнштейна в режиме, когда взаимодействие бозонов значительно превосходит их кинетическую энергию. В этом случае конденсация сильно коррелированных бозонов происходит при участии кинематического взаимодействия Дайсона [18], являющегося результатом особых коммутационных соотношений для операторов Хаббарда.

2. Бозоны в оптической решетке. В работе [19] было показано, что система ультрахолодных атомов в оптической решетке описывается гамильтонианом Бозе–Хаббарда

$$H = \sum_f [(\varepsilon - \mu)\hat{n}_f + \frac{U}{2}\hat{n}_f(\hat{n}_f - 1)] - \sum_{fm} t_{fm}c_f^\dagger c_m, \quad (1)$$

в котором суммирование происходит по решеточным узлам, нумеруемым индексами f и m . Бозевские операторы c_f и c_m^\dagger удовлетворяют обычным перестано-

¹⁾e-mail: vvv@iph.krasn.ru

вочным соотношениям: $[c_f, c_m^+]_- = c_f c_m^+ - c_m^+ c_f = \delta_{fm}$, δ_{fm} – символ Кронекера, $\hat{n}_f = c_f^+ c_f$ – оператор числа бозонов на узле f . Энергия атома на узле f обозначена как ε , а μ – химпотенциал системы. Интенсивность перескока атома между ближайшими узлами m и f описывается параметром t_{fm} . Энергия парного взаимодействия бозонов, находящихся на одном узле, обозначена через U .

В дальнейшем рассматриваем режим сильных корреляций $U \gg |t_{fm}|$. В этом случае естественно использовать формализм, в котором оператор взаимодействия включается в гамильтониан нулевого приближения, а перескоки в оператор возмущения.

3. Атомное представление, бозоны Хаббарда и кинематическое взаимодействие. Реализация сформулированной концепции, как известно, достигается посредством перехода к атомному представлению. Введем собственные состояния $|n\rangle$ оператора c^+c :

$$c^+c |n\rangle = n |n\rangle, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

Здесь временно опущен индекс узла f , который в дальнейшем легко восстанавливается, n обозначает число бозонов в состоянии $|n\rangle$. Поскольку

$$c|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad c^+|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle, \quad (3)$$

то операторы c и c^+ в атомном представлении записываются следующим образом

$$c^+ = \sum_{n=0} \sqrt{n+1} X^{n+1,n}, \quad c = \sum_{n=0} \sqrt{n+1} X^{n,n+1}. \quad (4)$$

В этих выражениях операторы Хаббарда

$$X^{n+1,n} = |n+1\rangle\langle n|, \quad X^{n,n+1} = |n\rangle\langle n+1|, \quad (5)$$

действуя на состояния с n и $n+1$ числом бозонов переводят их соответственно в состояния, с числом бозонов $n+1$ и n . Поэтому операторы $X^{n+1,n}$ и $X^{n,n+1}$ можно рассматривать соответственно как операторы рождения и уничтожения такого бозона (в дальнейшем будем называть его бозоном Хаббарда по аналогии с введенными ранее для сильно коррелированных электронных систем фермионов Хаббарда), который жестко связан с конкретным переходом. Имея это в виду, можно сказать, что бозоны Хаббарда являются цветными.

Это обстоятельство определяет важнейшее отличие исходного бозона, описываемого операторами c и c^+ , от “цветных” бозонов Хаббарда. Из (4) видно, что первоначальному бозону соответствует суперпозиция цветных бозонов Хаббарда со своими весовыми множителями.

Физическим следствием “цветности” бозонов Хаббарда является кинематическое взаимодействие между ними, которое в математическом отношении проявляется как результат коммутационных соотношений для операторов Хаббарда

$$[X_f^{n,m}, X_g^{p,q}]_- = \delta_{fg}(\delta_{mp} X_f^{n,q} - \delta_{nq} X_f^{p,m}), \quad (6)$$

соответствующих алгебре Ли.

Следует подчеркнуть, что впервые на существование особого взаимодействия в системах, динамические переменные которых описываются операторами, подчиняющимися алгебре Ли, обратил внимание Дайсон [18]. Он же назвал это взаимодействие кинематическим.

Важная роль кинематического взаимодействия в сильно коррелированных электронных системах отмечалась ранее в работах [12–17].

С учетом полученных выражений гамильтониан принимает необходимую форму

$$H = H_0 + \hat{T}, \quad (7)$$

в которой оператор

$$H_0 = \sum_f \sum_{n=0} E_n X_f^{n,n}, \quad (8)$$

$$E_n = (\varepsilon - \mu)n + Un(n-1)/2, \quad (9)$$

имеет диагональный вид и точно учитывает одноузельное взаимодействие бозонов.

Второе слагаемое (7) определяется выражением:

$$\hat{T} = -t \sum_{f\Delta} \sum_{n,m=1} \sqrt{nm} X_f^{n,n-1} X_{f+\Delta}^{m-1,m} \quad (10)$$

и описывает процессы перескоков бозонов Хаббарда между ближайшими узлами.

Подчеркнем, что несмотря на квадратичную по X_l^{rt} форму, оператор H_{int} неявно отражает наличие отмеченного выше кинематического взаимодействия между бозонами Хаббарда.

4. Предел сильного взаимодействия. Влияние кинематического взаимодействия на свойства системы бозонов Хаббарда проведем прежде всего в режиме, когда это взаимодействие проявляется в чистом виде. С этой целью рассмотрим предельный случай $U \rightarrow \infty$, $n < 1$, для которого актуальный сектор гильбертова пространства формируется на основе прямого произведения подпространств, определяемых базисными векторами $|0, f\rangle$ и $|1, f\rangle$.

Возникающая в отмеченном пределе система бозонов Хаббарда описывается гамильтонианом

$$H_\infty = \sum_f (\varepsilon - \mu) X_f^{11} - t \sum_{f\Delta} X_f^{10} X_{f+\Delta}^{01}. \quad (11)$$

Решение задачи о бозе-конденсации и спектре возбуждений проведем на основе метода Дайсона [18].

Введем новые бозевские операторы a_f и a_f^\dagger , через которые определим псевдохаббардовские операторы

$$\begin{aligned}\tilde{X}_f^{11} &= a_f^\dagger a_f, & \tilde{X}_f^{00} &= 1 - a_f^\dagger a_f, \\ \tilde{X}_f^{10} &= a_f^\dagger, & \tilde{X}_f^{01} &= (1 - a_f^\dagger a_f) a_f,\end{aligned}\quad (12)$$

удовлетворяющие тем же самым коммутационным соотношениям, что и операторы Хаббарда X_f^{nm} .

Если формально отождествить операторы \tilde{X}_f^{nm} и X_f^{nm} , то формулы (12) соответствуют преобразованию Дайсона-Малева [18, 20] для спиновых операторов со спином $S = 1/2$.

В действительности, \tilde{X}_f^{nm} и X_f^{nm} разные операторы. Прежде всего, они действуют в гильбертовых пространствах разной размерности. Во-вторых, из (12) видно, что операторы \tilde{X}_f^{01} и \tilde{X}_f^{10} не являются эрмитовыми по отношению друг к другу.

Поскольку свойство эрмитовой сопряженности непосредственно связано с определением скалярного произведения, то Дайсон [18] предложил ввести новую метрику (оказавшейся индефинитной), в которой эрмитовая сопряженность отмеченных операторов будет иметь место.

Реализация такой программы приводит к алгоритму получения точных бозе-аналогов квантовых $SU(2)$ и $SU(3)$ гамильтонианов [21, 22]

$$H(a_f, a_f^\dagger) = \hat{F} H(\tilde{X}), \quad (13)$$

где \hat{F} – метрический оператор. В нашем случае [21]

$$\hat{F} = \prod_f \hat{F}_f, \quad \hat{F}_f = 1 + \sum_{n=2} A_n (a_f^\dagger)^n a_f^n, \quad (14)$$

$$A_2 = -1/2, \quad A_3 = 1/3, \quad A_4 = -1/8, \quad \dots, \quad (15)$$

а оператор $H(\tilde{X})$ получается из (11) посредством замены в нем операторов Хаббарда на псевдохаббардовские (12). Заметим, что наличие метрического оператора не только решает проблему эрмитовости бозевского гамильтониана, но и позволяет корректно отсеять вклады от так называемых нефизических состояний. Последнее обстоятельство связано с тем, что в атомном представлении одноузельное гильбертово пространство определяется двумя базисными векторами, тогда как размерность одноузельного бозевского базиса бесконечна.

Используя приведенные выше выражения и оставляя в бозе-аналоге слагаемые не выше четвертой степени по операторам вторичного квантования,

получим, что в квазиимпульсном представлении система описывается гамильтонианом:

$$\begin{aligned}H &= \sum_k (\varepsilon - \mu - t_k) a_k^\dagger a_k - \\ &- \frac{1}{N} \sum_{1-4} (\varepsilon - \mu - t_1 - t_4) a_1^\dagger a_2^\dagger a_3 a_4 \Delta(1+2-3-4),\end{aligned}\quad (16)$$

где фурье-образ t_k связан с параметрами t_{fm} обычным соотношением $t_{fm} = (1/N) \sum_k \exp[ik(f-m)] t_k$.

Во втором слагаемом правой части уравнения (16) для краткости квазиимпульсы обозначены цифрами. Символ Кронекера $\Delta(1+2-3-4)$ отражает закон сохранения квазиимпульса при взаимодействии.

Заметим, что учет метрического оператора \hat{F} в (13) приводит к ренормировке матричного элемента взаимодействия бозонов.

При вычислении спектра элементарных возбуждений необходимо учесть бозе-конденсацию при нулевом значении квазиимпульса [10]. Для этого проведем операцию “сдвига” [23]

$$a_0 \longrightarrow \sqrt{N_0} + \alpha_0, \quad a_0^\dagger \longrightarrow \sqrt{N_0} + \alpha_0^\dagger, \quad (17)$$

в которой N_0 – среднее число частиц в конденсате, а α_0 и α_0^\dagger – новые операторы, обусловленные флуктуациями числа конденсатных частиц.

После подстановки преобразования (17) в (16) гамильтониан принимает вид:

$$H = E_0 + H_{(2)} + H_{(4)}, \quad (18)$$

где

$$E_0 = (1 - n_0)(\varepsilon - \mu - t_0) N_0 + t_0 n_0 N_0 \quad (19)$$

есть энергия находящихся в конденсате частиц, полученная без учета флуктуационных ренормировок. Через $n_0 = N_0/N$ обозначена узельная плотность бозонного конденсата.

При записи (18) учтено требование равенства нулю линейной по операторам α_0 и α_0^\dagger формы. Это дает первое уравнение системы для нахождения n_0 и μ :

$$(1 - 2n_0)(\varepsilon - \mu - t_0) = -2n_0 t_0. \quad (20)$$

Оператор $H_{(2)}$ имеет стандартную структуру

$$H_{(2)} = \sum_{k \neq 0} [A_k a_k^\dagger a_k + \frac{1}{2} B_k (a_k^\dagger a_{-k}^\dagger + a_{-k} a_k)], \quad (21)$$

в которой

$$\begin{aligned}A_k &= (1 - 4n_0)\Gamma_k + t_0, & B_k &= -2n_0\Gamma_k, \\ \Gamma_k &= \varepsilon - \mu - t_0 - t_k.\end{aligned}\quad (22)$$

Диагонализация (21) посредством преобразования Боголюбова

$$a_k = \cosh(\varphi_k)b_k + \sinh(\varphi_k)b_{-k}^+, \quad (23)$$

в котором: $\cosh(2\varphi_k) = A_k/\omega_k$, $\sinh(2\varphi_k) = -B_k/\omega_k$ приводит к выражению для энергии возбуждения

$$\omega_k = \sqrt{(1-2n_0)(1-6n_0)\varepsilon_k^2 + 4n_0t_0\varepsilon_k}, \quad (24)$$

в котором $\varepsilon_k = t_0 - t_k$.

При этом второе уравнение системы для вычисления n_0 и μ имеет вид:

$$n = n_0 + \frac{1}{2N} \sum_k \frac{A_k - \omega_k}{\omega_k}. \quad (25)$$

Совместное решение уравнений (20) и (25) при использовании выражения (24) позволяет проследить за изменением спектра возбуждений при возрастании концентрации частиц в системе.

Численные расчеты проводились для двумерной решетки при учете перескоков только между ближайшими узлами. Соответствующий интеграл перескока обозначен через t . В этом случае

$$t_0 = 4t, \quad t_k = 4t\gamma_k, \quad \gamma_k = (\cos(k_x) + \cos(k_y))/2.$$

На рисунке 1 представлены результаты численных расчетов энергетического спектра элементарных возбуждений в ансамбле бозонов Хаббарда в режиме предельно сильных одноузельных корреляций. Кинематическое взаимодействие хаббардовских бозонов проявляется в двух отношениях. Во-первых, появляются надконденсатные частицы, поскольку $n_0 < n$, а спектр элементарных возбуждений на малых значениях квазиимпульса приобретает линейный характер. При этом относительная доля надконденсатных частиц возрастает с возрастанием n , когда вклад кинематического взаимодействия увеличивается. Кроме того, увеличение n сопровождается возрастанием жесткости элементарных возбуждений при малых значениях квазиимпульса.

5. Режим больших, но конечных U . Если $|t_{fm}| \ll U < \infty$, то даже при $n < 1$ перескоки бозонов Хаббарда сопровождаются появлением состояний с двукратным заполнением. Поскольку такие состояния обладают большой энергией, то их генерирование носит виртуальный характер и проявляется в виде возникновения эффективного межузельного взаимодействия хаббардовских бозонов.

Для получения вида этого взаимодействия воспользуемся операторной формой теории возмущений [24, 25]. В рассматриваемом случае актуальный

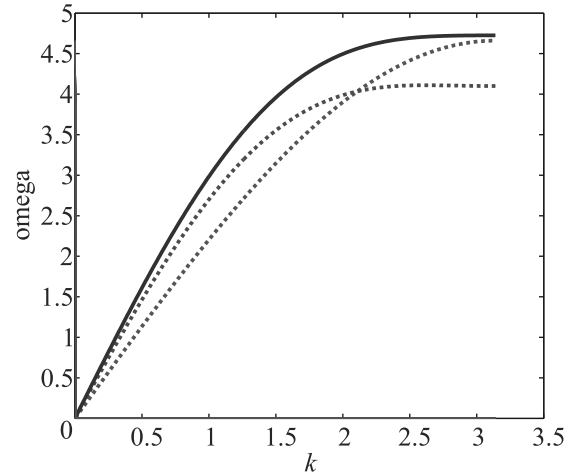


Рис. 1. (Цветной онлайн) Квазиимпульсные зависимости энергий возбуждений в ансамбле бозонов Хаббарда при $U = \infty$ в направлении главной диагонали зоны Бриллюэна ($k_x = k_y = k$). Красная пунктирная линия: $n = 0.25, n_0 = 0.164$; зеленая штриховая линия: $n = 0.6, n_0 = 0.282$; синяя сплошная линия: $n = 0.98, n_0 = 0.341$

сектор гильбертова пространства определяется прямым произведением одноузельных подпространств, построенных на базисных векторах $|f, 0\rangle$ и $|f, 1\rangle$.

Определив проекционный оператор на этот сектор в виде $\hat{P} = \prod_f (X_f^{00} + X_f^{11})$, получим, что с точностью до членов второго порядка малости по параметру $|t_{fm}|/U$ эффективный гамильтониан рассматриваемого ансамбля определяется выражением

$$H_{\text{eff}} = \hat{P}H\hat{P} + \hat{P}\hat{T}\frac{1}{H_0 - E_0}(\hat{P}\hat{T}\hat{P} - \hat{T}\hat{P}), \quad (26)$$

в котором E_0 — энергия нулевого приближения.

Проводя несложные вычисления, находим

$$H_{\text{eff}} = H_{\infty} - \hat{V}, \quad \hat{V} = V \left(\sum_{f\Delta} X_{f+\Delta}^{11} X_f^{11} + \sum_{f\Delta \neq \Delta_1} X_{f+\Delta}^{10} X_f^{11} X_{f+\Delta_1}^{01} \right), \quad (27)$$

где H_{∞} определен формулой (11), а параметр взаимодействия $V = 2t^2/U$. Суммирование по Δ и Δ_1 означает суммирование по ближайшим узлам.

Применяя тот же метод перехода к бозевскому представлению для гамильтониана, что и в предыдущем параграфе, находим, что в рассматриваемом приближении A_q и B_q получают замену:

$$A_q \longrightarrow A_q - 2n_0 \left(\frac{t_0^2}{U} \right) (1 + \gamma_q)^2, \quad B_q \longrightarrow B_q - 4n_0 \left(\frac{t_0^2}{U} \right) \gamma_q. \quad (28)$$

При этом первое уравнение системы для n_0 и μ принимает вид

$$(1 - 2n_0)(\varepsilon - \mu) = [1 - 4n_0(1 - t_0/U)]t_0, \quad (29)$$

а второе уравнение имеет тот же вид (25).

Из приведенных формул следует аналитическое выражение для квадрата спектра элементарных возбуждений ансамбля бозонов Хаббарда при учете кинематического взаимодействия Дайсона, межузельного притяжения между хаббардовскими бозонами, а также коррелированных перескоков:

$$\omega_k^2 = [1 - 2n_0(1 - l_k)][1 - 2n_0(3 - r_k)]\varepsilon_k^2 + 4n_0t_0[1 - 2\frac{t_0}{U}][1 + \frac{2n_0}{1 - 2n_0}l_k]\varepsilon_k, \quad (30)$$

где

$$l_k = \frac{t_0 + t_k}{U}, \quad r_k = \frac{5t_0 + t_k}{U}. \quad (31)$$

На рисунке 2 представлены результаты численных вычислений спектра бозевских возбуждений в ансамбле бозонов Хаббарда при $U = 10t$ в том же приближении ближайших соседей. В данном случае, кроме кинематического взаимодействия между хаббардовскими бозонами реализуется притяжение, а также коррелированные перескоки. Это следует из вида оператора (27).

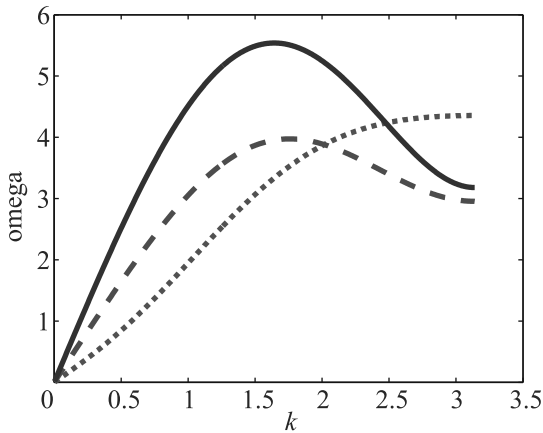


Рис. 2. (Цветной онлайн) Квазиимпульсные зависимости энергий возбуждений в ансамбле бозонов Хаббарда при $U = 10t$ в направлении главной диагонали зоны Бриллюэна. Красная пунктирная линия: $n = 0.25, n_0 = 0.2235$; зеленая штриховая линия: $n = 0.6, n_0 = 0.40315$; синяя сплошная линия: $n = 0.98, n_0 = 0.4558$

Видно, что возрастание концентрации бозонов в системе приводит к увеличению вклада, связанного с притяжением бозонов. В результате в квазиимпульсной зависимости ω_q появляется особенность, характеризующая уменьшением энергии возбуждения с

ростом квазиимпульса. Качественно такая картина соответствует появлению ротонного участка спектра.

На рисунке 3 показаны зависимости концентрации частиц, находящихся в конденсате, от полной концентрации бозонов в системе. Видно, что разность $n - n_0$ увеличивается с ростом n . Наибольшее значение эта разность имеет место при $U = \infty$. Для конечных значений U эта разность меньше. Физически это является следствием того, что на фоне кинематического взаимодействия бозонов Хаббарда начинает проявляться притяжение между ними $\sim t^2/U$, которое растет при уменьшении U .

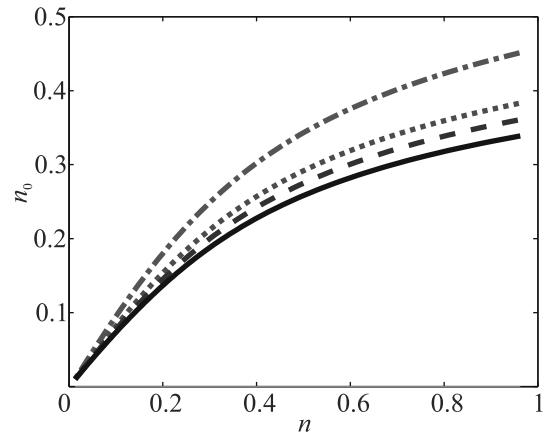


Рис. 3. (Цветной онлайн) Зависимости конденсатных концентраций n_0 от полной концентрации частиц n в $2D$ решетке при различных значениях U : $U = 10t$ – красная штрих-пунктирная линия; $U = 25t$ – зеленая штриховая линия; $U = 50t$ – синяя пунктирная линия; $U = \infty$ – черная сплошная линия

Из представленных зависимостей следует, что даже при $n \sim 1$, когда взаимодействие наиболее эффективно, доля конденсатных бозонов не меньше 30%. В этой связи заметим, что в He-4 эта доля не превышает 10%. Такое расхождение является естественным следствием используемого приближения, когда игнорируются флуктуационные вклады. Их учет может быть реализован на основе диаграммной формы теории возмущений. При этом существенно, что предложенный метод позволяет находить затравочные функции Грина, необходимые для вычисления петлевых ренормировок. Соответствующие вычисления составят предмет отдельной работы.

6. Заключение. Развитый в работе метод изучения свойств сильно коррелированного бозонного ансамбля заключается в последовательном применении известных в теории конденсированного состояния концепций.

Прежде всего это идеология атомного представления, позволяющая сильное бозонное взаимодей-

ствие учитывать точно в гамильтониане нулевого приближения, а оператор кинетической энергии рассматривать по теории возмущений.

В атомном представлении динамическими переменными являются операторы Хаббарда, описывающие внутриузельные переходы. Соответственно этому по узлам решетки перемещаются не первоначальные бозоны, а “цветные” бозоны Хаббарда. “Цветность” обусловлена тем, что каждому внутриузельному переходу однозначно соответствует свой бозон Хаббарда. При этом исходные бозоны представляются в виде линейной суперпозиции “цветных” бозонов Хаббарда со своими весовыми вкладами.

Поскольку коммутационные соотношения для операторов Хаббарда соответствуют алгебре Ли, то между бозонами Хаббарда реализуется кинематическое взаимодействие Дайсона.

Вторая концепция основана на методе Дайсона и заключается в получении точного бозевского аналога гамильтониана ансамбля хаббардовских бозонов посредством введения псевдохаббардовских операторов и индефинитной метрики. Применение такой метрики позволяет восстановить эрмитовость получаемого бозевского гамильтониана, а также отсеять вклады от нефизических состояний.

В пределе бесконечно большого параметра U и $n < 1$ изучено влияние кинематического взаимодействия бозонов Хаббарда на характеристики бозе-конденсации и спектра элементарных возбуждений. В аналитическом виде получено выражение для спектра и вычислена зависимость концентрации бозонного конденсата от концентрации бозонов.

Третья концепция связана с использованием операторной формы теории возмущений, позволяющей получить эффективный гамильтониан при конечных, но больших значениях U . В этом случае, кроме кинематического взаимодействия бозонов Хаббарда, возникают коррелированные перескоки таких бозонов, а также межузельное взаимодействие между ними, имеющее характер притяжения. Его интенсивность в приближении ближайших соседей определяется выражением $V = 2t^2/U$, где t – параметр перескока между ближайшими узлами. В результате в ансамбле бозонов Хаббарда в режиме $t \ll U$ конкуренция двух видов взаимодействия значительно сказывается на спектральных и термодинамических

характеристиках системы. В частности, в квазиимпульсной зависимости энергии элементарных возбуждений появляется особенность, соответствующая ротонному участку спектра.

1. G. Grynberg, B. Lounis, P. Verkerk, J.-Y. Courtois, and C. Salomon, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 2249 (1993).
2. P. S. Jessen and I. H. Deutsch, *Adv. At., Mol., Opt. Phys.* **37**, 95 (1996).
3. A. J. Kerman, V. Vuletic, C. Chin, and S. Chu, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 439 (2000).
4. В. П. Рубан, *Письма в ЖЭТФ* **113**, 539 (2021).
5. В. П. Рубан, *ЖЭТФ* **160**, 912 (2021).
6. В. П. Рубан, *Письма в ЖЭТФ* **115**, 450 (2022).
7. А. П. Зинган, О. Ф. Васильева, П. И. Хаджи, *ЖЭТФ* **156**, 843 (2019).
8. П. П. Васильев, *Письма в ЖЭТФ* **115**, 35 (2022).
9. Van Thu Nguyen, *ЖЭТФ* **162**, 177 (2022).
10. Н. Н. Боголюбов, *Изв. Ан. СССР, Сер. физ.* **VI**(1), 77 (1947).
11. J. Hubbard, *Proc. Roy. Soc., A* **285**, 542 (1965).
12. Р. О. Зайцев, *ЖЭТФ* **68**, 207 (1975).
13. Р. О. Зайцев, *ЖЭТФ* **70**, 1100 (1976).
14. Ю. А. Изюмов, *УФН* **161**, 1 (1991).
15. Ю. А. Изюмов, *УФН* **165**, 403 (1995).
16. Ю. А. Изюмов *УФН*, **167**, 465 (1997).
17. В. В. Вальков, С. Г. Овчинников, *Квазичастицы в сильно коррелированных системах*, Изд-во СО РАН, Новосибирск (2001) [S. G. Ovchinnikov, V. V. Val'kov, *Hubbard Operators in the Theory of Strongly Correlated Electrons*, Imperial College Press, London (2004)].
18. F. Dyson, *Phys. Rev.* **102**(1217), 1230 (1956).
19. D. Jaksch, C. Bruder, J. I. Cirac, C. W. Gardiner, and P. Zoller, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 3108 (1998).
20. С. В. Малеев, *ЖЭТФ* **33**, 1010 (1957).
21. В. В. Вальков, Т. А. Валькова, *Письма в ЖЭТФ* **52**, 1179 (1990).
22. В. В. Вальков, Т. А. Валькова, *ЖЭТФ* **99**, 1881 (1991).
23. D. van Oosten, P. van der Straten, and H. T. C. Stoof, *Phys. Rev. A* **63**, 053601 (2001).
24. Н. Н. Боголюбов, *Лекции по квантовой статистике*, Наукова думка, Киев (1949).
25. С. В. Тябликов, *Методы квантовой теории магнетизма*, Наука, М. (1965).