

# Солитоноподобные диссипативные объекты поперечного ультразвука в деформированном парамагнитном кристалле

С. В. Сазонов<sup>1)</sup>

Национальный исследовательский центр “Курчатовский институт”, 123182 Москва, Россия

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, 119991 Москва, Россия

Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет), 125993 Москва, Россия

Поступила в редакцию 20 октября 2022 г.

После переработки 28 октября 2022 г.

Принята к публикации 29 октября 2022 г.

Продemonстрирована возможность существования в деформированном и находящемся во внешнем магнитном поле неравновесном парамагнитном кристалле микросекундных солитоноподобных диссипативных импульсов поперечного ультразвука с несущей частотой субгигагерцового диапазона. Показано, что данный метастабильный объект обладает непрерывным свободным параметром, сохраняющим память о входных условиях. Свойства и условия формирования такого объекта коренным образом отличаются его как от консервативных, так и от диссипативных солитонов.

DOI: 10.31857/S1234567822240053, EDN: neagmy

**1. Введение.** Исследования диссипативных солитонов различной физической природы в настоящее время приобретают все большую популярность. В значительной степени это касается оптических диссипативных солитонов [1–9]. Как показывает анализ, нелинейные оптические эффекты часто находят свои акустические аналоги [10]. Так, например, были предсказаны и обнаружены резонансные и нерезонансные консервативные солитоны акустической природы в кристаллах, содержащих парамагнитные примеси [11–16]. Следуя далее этой логике, необходимо осуществлять поиски и проводить исследования акустических диссипативных солитонов. Здесь большей частью речь идет об ультразвуковых сигналах микросекундных длительностей и субгигагерцовых частот, способных распространяться в твердых телах.

В [17, 18] теоретически рассмотрены ультразвуковые локализованные диссипативные объекты в парамагнитных кристаллах. Речь в этих работах идет как о квазимонохроматических [17], так и об униполярных [18] импульсах. Данные импульсы способны формироваться в неравновесных средах, обладающих запасом энергии. Время жизни  $T_1$  рассмотренных сред в неравновесных состояниях (время, в течение которого сохраняется инверсная населенность квантовых состояний) является конечным и лежит в интервале от миллисекунд до нескольких

десятков секунд. Таким образом, данные состояния можно рассматривать как метастабильные. По этой причине рассмотренные в [17, 18] ультразвуковые импульсы названы локализованными диссипативными объектами (структурами), а не диссипативными солитонами. Время  $\Delta t$ , в течение которого такие диссипативные объекты могут наблюдаться, и их временная длительность  $\tau_p$  должны удовлетворять неравенству  $\Delta t, \tau_p \ll T_1$ . Диссипация здесь происходит в результате процессов фазовой релаксации с характерным временем  $T_2$  [19]. Чтобы эти процессы внесли свой вклад в формирование локализованных диссипативных объектов, необходимо выполнение условия  $\Delta t \geq T_2$ . Таким образом, имеем двойное неравенство

$$T_2 \leq \Delta t, \quad \tau_p \ll T_1. \quad (1)$$

Отметим, что в [20, 21] импульсы, удовлетворяющие (1), названы некогерентными солитонами.

В работе [22] показано, что в статически деформированном парамагнитном кристалле, помещенном в магнитное поле  $\mathbf{B}$ , при условии (1) могут формироваться униполярные локализованные импульсы сдвиговой деформации. Статическая деформация вызывает квадрупольное штарковское расщепление квантовых уровней парамагнитных ионов с эффективным спином  $S = 1$ , на которое накладывается относительно слабое зеемановское расщепление магнитным полем (рис. 1). При этом именно зеемановские подуровни обладают неравновесной (инверсной) населенностью. Здесь возникает естествен-

<sup>1)</sup>e-mail: sazonov.sergey@gmail.com

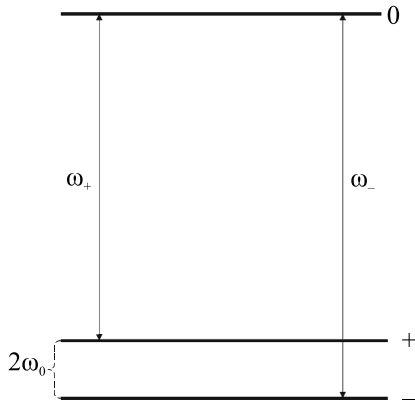


Рис. 1. Схема квантовых переходов, индуцированных поперечным ультразвуком в парамагнетике, подверженном продольной статической деформации в направлении внешнего магнитного поля  $\mathbf{V}$ . Штарковский уровень "0" соответствует проекции  $S_z = 0$  эффективного спина на направление  $\mathbf{V}$ . Зеемановские подуровни "+" и "-", переход между которыми запрещен, обладают проекциями спина, равными соответственно +1 и -1

ный вопрос о том, сможет ли сформироваться солитоноподобный диссипативный объект при инверсной населенности наиболее вышележащего по энергии штарковского уровня эффективного спина (рис. 1). Исследованию данного вопроса и посвящена настоящая работа.

**2. Вывод волнового уравнения.** Пусть кристалл кубической симметрии, содержащий парамагнитные ионы с эффективным спином  $S = 1$ , подвержен продольной относительной статической деформации  $\varepsilon_{zz}^{(0)}$  вдоль оси  $z$  четвертого порядка. В параллельном направлении приложено магнитное поле.

Вдоль другой оси  $x$  четвертого порядка, перпендикулярно к оси  $z$ , распространяется импульс поперечного ультразвука, характеризуемый компонентой  $\varepsilon_{zx}$  тензора относительной деформации.

Учитывая схему разрешенных спин-фононных переходов, показанную на рис. 1, запишем систему уравнений для элементов  $\rho_{\mu\nu}$  матрицы плотности эффективного спина [22]

$$i \frac{\partial \rho_{0+}}{\partial t} = (\omega_+ - i/T_2) \rho_{0+} - \Omega(\rho_{00} - \rho_{++} + \rho_{+-}^*), \quad (2)$$

$$i \frac{\partial \rho_{0-}}{\partial t} = (\omega_- - i/T_2) \rho_{0-} - \Omega(\rho_{00} - \rho_{--} + \rho_{+-}), \quad (3)$$

$$i \frac{\partial \rho_{+-}}{\partial t} = 2\omega_0 \rho_{+-} + \Omega(\rho_{0-} + \rho_{0+}^*), \quad (4)$$

$$i \frac{\partial \rho_{++}}{\partial t} = \Omega(\rho_{0+} - \rho_{0+}^*), \quad i \frac{\partial \rho_{--}}{\partial t} = \Omega(\rho_{0-}^* - \rho_{0-}), \quad (5)$$

$$i \frac{\partial \rho_{00}}{\partial t} = \Omega(\rho_{0+}^* - \rho_{0+} + \rho_{0-} - \rho_{0-}^*). \quad (6)$$

Здесь

$$\Omega = \frac{G_{\perp} \varepsilon_{zx}}{2\sqrt{2}\hbar}, \quad (7)$$

$\hbar$  – постоянная Планка,  $\omega_{\pm} = \omega_S \mp \omega_0$  – частоты квантовых переходов  $+ \leftrightarrow 0$  и  $- \leftrightarrow 0$  соответственно (рис. 1),  $\omega_S = |G_{\parallel} \varepsilon_{zz}^{(0)}|/\hbar$  и  $\omega_0 = g\mu_B B/\hbar$  – частоты квадрупольного штарковского и зеемановского расщеплений соответственно,  $g$  – фактор Ланде,  $\mu_B$  – магнетон Бора (при этом  $\omega_0 \ll \omega_S$  и  $G_{\parallel} \varepsilon_{zz}^{(0)} < 0$ ),  $G_{\parallel}$  и  $G_{\perp}$  – постоянные взаимодействия спина с объемной и сдвиговой деформациями кристалла соответственно, нижние индексы +, 0 и - у элементов матрицы плотности обозначают соответственно значения проекции эффективного спина +1, 0 и -1 на ось  $z$  (рис. 1).

Дополним систему (2)–(6) волновым уравнением для компоненты тензора поперечной (сдвиговой) деформации упругого импульса [22]

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} = \frac{nG_{\perp}^2}{32\hbar\rho} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\rho_{0+} + \rho_{0+}^* - \rho_{0-} - \rho_{0-}^*), \quad (8)$$

где  $a$  – линейная скорость волн сдвиговой деформации в рассматриваемом кристалле,  $\rho$  – плотность кристалла,  $n$  – концентрация парамагнитных ионов.

В отличие от [22] здесь необратимые потери обусловлены фазовой релаксацией, а не рассеянием импульса на дефектах и микронеоднородностях. Фазовая релаксация учтена феноменологически слагаемым  $i/T_2$  в первых скобках материальных уравнений (2) и (3) для недиагональных элементов матрицы плотности на разрешенных квантовых переходах  $+ \leftrightarrow 0$  и  $- \leftrightarrow 0$ . Аналогичной релаксацией на запрещенном переходе  $+ \leftrightarrow -$  мы здесь пренебрегли.

Правая часть уравнения (8) пропорциональна параметру  $\eta = \frac{nG_{\perp}^2}{32\hbar\omega_S\rho a^2}$ , содержащему штарковскую частоту  $\omega_S$ , близкую по величине к частотам разрешенных переходов  $\omega_+$  и  $\omega_-$ . Взяв для статической деформации  $\varepsilon_{zz}^{(0)} \sim 10^{-4}$  и постоянной взаимодействия  $G_{\parallel} \sim G_{\perp} \sim 10^{-13}$  эрг [19, 23], найдем  $\omega_S \sim 10^{10}$  с $^{-1}$ . Полагая теперь для кристалла MgO, содержащего примесные парамагнитные ионы Fe $^{2+}$ ,  $n \sim 10^{21}$  см $^{-3}$ ,  $\rho \approx 3$  г/см $^3$ ,  $a \sim 5 \cdot 10^5$  см/с [11, 19, 23], будем иметь  $\eta \sim 10^{-2}$ . Малое значение данного параметра позволяет применить к волновому уравнению (8) приближение однонаправленного распространения [24]. В результате данное уравнение редуцируется к первому порядку:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial \Omega}{\partial t} = \frac{nG_{\perp}^2}{64\hbar\rho a^3} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_{0+} + \rho_{0+}^* - \rho_{0-} - \rho_{0-}^*). \quad (9)$$

Для исключения из (2)–(6) и (9) материальных переменных будем считать, что для разрешенных и запрещенного квантовых переходов выполняются соответственно условия

$$\varepsilon_1 = (\omega_S \tau_*)^{-1} \ll 1, \quad \varepsilon_2 = \omega_0 \tau_* \ll 1, \quad (10)$$

где  $\tau_*$  – характерный временной масштаб ультразвукового импульса.

В случае квазимонохроматического импульса  $\tau_* \sim 1/\omega$ , где  $\omega$  – несущая частота импульса. Тогда (10) принимают вид  $\varepsilon_1 = \omega/\omega_S \ll 1$  и  $\varepsilon_2 = \omega_0/\omega \ll 1$ . В случае униполярного импульса  $\tau_* \sim \tau_p$ . Тогда  $\varepsilon_1 = (\omega_S \tau_p)^{-1} \ll 1$  и  $\varepsilon_2 = \omega_0 \tau_p \ll 1$ .

Условия (10) использовались ранее при исключении материальных переменных в задачах оптики предельно коротких импульсов [25–27].

Благодаря первому условию (10), левые части в (2) и (3) могут быть учтены методом последовательных приближений. Следуя подходам, использованным в [22, 27], из (2), (3), (5) и (6) получим в приближении первого неравенства (10)

$$\begin{aligned} \rho_{0+} &= \frac{\Omega}{\omega_+} (\rho_{00} - \rho_{++} + \rho_{+-}^*) + \\ &+ i \frac{w_0 - w_+}{(\omega_+ - i/T_2)^2} \frac{\partial \Omega}{\partial t} - \frac{w_0 - w_+}{\omega_+^3} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \rho_{0-} &= -\frac{\Omega}{\omega_-} (\rho_{00} - \rho_{--} + \rho_{+-}) - \\ &- i \frac{w_0 - w_-}{(\omega_- - i/T_2)^2} \frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{w_0 - w_-}{\omega_-^3} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \rho_{++(-)} &= w_{+(-)} + \frac{w_0 - w_{+(-)}}{\omega_s^2} \left( \frac{2}{T_2} \int_{-\infty}^t \Omega^2 dt' + \Omega^2 \right), \\ \rho_{00} &= 1 - \rho_{++} - \rho_{--}. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь  $w_0$ ,  $w_+$  и  $w_-$  – начальные населенности спиновых уровней 0, + и – соответственно.

В силу второго неравенства (10) правая часть уравнения (4) мала. Поэтому при подстановке сюда выражений (11) и (12) учтем в них только главные члены относительно малого параметра  $\varepsilon_1$ , заменив к тому же диагональные элементы матрицы плотности начальными населенностями квантовых уровней. В результате (4) примет вид

$$i \frac{\partial \rho_{+-}}{\partial t} = 2\omega_0 \rho_{+-} + \frac{\Omega^2}{\omega_S} (w_- - w_+).$$

Здесь мы пренебрегли различием между частотами  $w_+$  и  $w_-$ , положив  $w_+ \approx w_- \approx \omega_S$ .

Интегрируя данное уравнение, будем иметь

$$\rho_{+-} = -i \frac{w_- - w_+}{\omega_S} \int_{-\infty}^t \Omega^2 e^{-2i\omega_0(t-t')} dt'.$$

Тогда

$$\rho_{+-} + \rho_{+-}^* = -2 \frac{w_- - w_+}{\omega_S} \int_{-\infty}^t \Omega^2 \sin 2\omega_0(t-t') dt'.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_{+-} + \rho_{+-}^*) &= \\ &= -2\omega_0 \frac{w_- - w_+}{\omega_S} \int_{-\infty}^t \Omega^2 \cos 2\omega_0(t-t') dt'. \end{aligned}$$

Учитывая здесь второе неравенство (10), запишем приближенно

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_{+-} + \rho_{+-}^*) = -2\omega_0 \frac{w_- - w_+}{\omega_S} \int_{-\infty}^t \Omega^2 dt'. \quad (14)$$

Используя (9), (11)–(14), получим нелинейное волновое уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \frac{1}{a_0} \frac{\partial \Omega}{\partial t} &= \alpha \Omega^2 \frac{\partial \Omega}{\partial t} - \\ &- \left( \mu - \beta \frac{\partial}{\partial t} \right) \Omega \int_{-\infty}^t \Omega^2 dt' + \gamma \frac{\partial^2 \Omega}{\partial t^2} + \sigma \frac{\partial^3 \Omega}{\partial t^3}. \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь  $a_0 = a/[1 + 2\eta(1 - 3w_0)] \approx a$ ,  $\alpha = 9\eta \frac{1-3w_0}{a\omega_s^2}$ ,  $\mu = 4\eta\omega_0 \frac{w_- - w_+}{a\omega_S}$ ,  $\beta = 6\eta \frac{1-3w_0}{T_2 a \omega_s^2}$ ,  $\gamma = 2\eta \frac{1-3w_0}{T_2 a \omega_s^2}$ ,  $\sigma = \eta \frac{1-3w_0}{a\omega_s^2}$ .

Уравнение (15) обобщает уравнения, полученные ранее в других работах. В отсутствие диссипации  $T_2 \rightarrow \infty$  имеем  $\beta = \gamma = 0$ . Пренебрегая также когерентностью (14) на запрещенном переходе  $+ \leftrightarrow -$ , т.е. полагая  $\mu = 0$ , получаем из (15) модифицированное уравнение Кортевега–де Вриза [26], описывающее динамику консервативных солитонов. Если импульс униполярный и его длительность значительно превышает время релаксации  $T_2$ , то в пренебрежении той же когерентностью на запрещенном переходе полагаем в (15)  $\alpha = \sigma = \mu = 0$ . В этом случае (15) переходит в уравнение, полученное в [18] для исследования динамики униполярного диссипативного солитоноподобного объекта.

Ниже будет показано, что в рассматриваемом нами случае когерентность на запрещенном переходе имеет принципиальное значение.

**3. Квазимонохроматический диссипативный солитоноподобный объект.** Считая упругий импульс квазимонохроматическим с несущей частотой  $\omega$ , представим его в виде

$$\Omega = \psi e^{i(\omega t - kx)} + \text{с.с.}, \quad (16)$$

где  $\psi$  – комплексная медленно меняющаяся огибающая (ММО),  $k$  – волновое число. После подстановки (16) в (15) и использования стандартного приближения ММО [28] с учетом условия  $\omega \gg 1/T_2$  будем иметь

$$i \frac{\partial \psi}{\partial x} = -2(\beta\omega + i\mu)\psi \int_{-\infty}^{\tau} |\psi|^2 d\tau' - \quad (17)$$

$$- (\alpha\omega + \mu/2\omega)|\psi|^2\psi - i\gamma\omega^2\psi - 2\gamma\omega \frac{\partial \psi}{\partial \tau} - 3\sigma\omega \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2},$$

где “бегущее” время  $\tau = t - x/v_g$ , а линейная групповая скорость  $v_g$  и волновое число определяются выражениями  $1/v_g = \partial k/\partial \omega = 1/a_0 + 3\sigma\omega^2$ ,  $k = \omega/a_0 + \sigma\omega^3$ .

Для нахождения приближенного решения уравнения (17) представим комплексную огибающую  $\psi$  в виде

$$\psi = Q e^{i\varphi}, \quad (18)$$

где  $Q$  и  $\varphi$  – действительные функции переменных  $x$  и  $\tau$ .

После подстановки (18) в (17) приходим к системе уравнений, записанной в исходных независимых переменных

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{1}{v_g} \frac{\partial Q}{\partial t} = \Gamma \left( 1 + \frac{1}{\omega} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) Q - \quad (19)$$

$$- 2\mu Q \int_{-\infty}^t Q^2 dt' - 3\sigma\omega \left( 2 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} Q \right),$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{v_g} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 2\beta\omega \int_{-\infty}^t Q^2 dt' + \left( \frac{\mu}{2\omega} + \omega\alpha \right) Q^2 - \quad (20)$$

$$- 2 \frac{\Gamma}{\omega Q} \frac{\partial Q}{\partial t} + 3\sigma\omega \left[ \frac{1}{Q} \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 \right],$$

где коэффициент усиления определяется выражением

$$\Gamma = -\gamma\omega^2 = 2\eta\omega^2 \frac{3w_0 - 1}{T_2 a \omega_S^2}. \quad (21)$$

Так как импульс является квазимонохроматическим, то  $\omega\tau_p \gg 1$ . Учитывая также, что  $\partial\varphi/\partial t \sim 1/\tau_p$ , будем иметь оценку  $\frac{1}{\omega} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right| \ll 1$ . Приняв к

тому же во внимание (1), (21) и выражение для  $\sigma$ , приходим к выводу, что последним слагаемым в (19), содержащим коэффициент  $3\sigma\omega$ , также можно пренебречь. Суммируя сказанное, перепишем (19) в виде

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{1}{v_g} \frac{\partial Q}{\partial t} = \Gamma Q - 2\mu Q \int_{-\infty}^t Q^2 dt'. \quad (19a)$$

Умножая (19a) на  $2Q$ , после интегрирования получим

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{1}{v_g} \frac{\partial \theta}{\partial t} = 2\Gamma\theta - 2\mu\theta^2, \quad (22)$$

где

$$\theta = \int_{-\infty}^t Q^2 dt'. \quad (23)$$

Ниже будем считать, что начальная населенность квантовых уровней неравновесна, так что выполняется условие  $w_0 > 1/3$ . Поэтому  $\Gamma > 0$ . Кроме того, коэффициенты  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\sigma$  отрицательны, как следует из соответствующих выражений. С другой стороны, положим, что уровень “+” заселен сильнее, нежели уровень “-”. Таким образом, выполняется неравенство  $w_- > w_+$  и, как следствие,  $\mu > 0$ . Добиться описанной в этом абзаце ситуации можно, например, с помощью предварительного воздействия на кристалл, в направлении магнитного поля, резонансным циркулярно-поляризованным электромагнитным импульсом с несущей частотой, равной частоте перехода  $+ \leftrightarrow 0$ . В этом случае населенность уровня “0” возрастет за счет частичного опустошения состояния “+”.

В описанных выше условиях уравнение (22) имеет решение типа бегущей волны

$$\theta = \frac{\Gamma}{2\mu} (1 + \tanh \xi), \quad (24)$$

где  $\xi = (t - x/v)/\tau_p$ , а скорость  $v$  распространения импульса определяется выражением

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{a_0} - \Gamma\tau_p. \quad (25)$$

Из (23) и (24) найдем

$$Q = \sqrt{\frac{\Gamma}{2\mu\tau_p}} \operatorname{sech} \xi. \quad (26)$$

Возвращаясь к уравнению (20), будем считать, что  $(\omega_0\omega_S/\omega^2)(T_2/\tau_p) \ll 1$ . Тогда легко видеть, что в

(20) можно отбросить последние два слагаемых, содержащих усиливающий  $\Gamma$  и дисперсионный  $\sigma$  коэффициенты. Тогда с учетом (24)–(26) для отклонения  $\delta\omega = \partial\varphi/\partial t$  локальной частоты от значения получим

$$\delta\omega = -\frac{3}{2} \frac{3w_0 - 1}{w_- - w_+} \frac{\omega}{\omega_S \omega_0 \tau_p} \times \left[ \frac{1}{T_2} (1 + \tanh \xi) + \frac{3}{4\tau_p} \operatorname{sech}^2 \xi \right]. \quad (27)$$

Здесь использованы выражения для  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\mu$ .

Таким образом, формирование солитоноподобного объекта с огибающей (26) сопровождается локальным уменьшением его несущей частоты:  $\delta\omega < 0$ .

Устремляя верхний предел в интеграле (23) к  $+\infty$ , придем к функции  $W(x)$ , пропорциональной энергии солитоноподобного импульса:  $W(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} Q^2 dt'$ . Тогда из (22) будем иметь

$$\frac{dW}{dx} = 2\Gamma W - 2\mu W^2. \quad (28)$$

Из (28) легко видеть, что состояние с нулевой энергией импульса (с нулевым фоном) неустойчиво. В то же время состояние с  $W = \Gamma/\mu$ , соответствующее решению (24) при  $t \rightarrow +\infty$  (см. также (26)), устойчиво. Данная устойчивость является условной, так как неустойчиво состояние самой среды с инверсной населенностью квантовых состояний, время жизни которого определяется временем релаксации  $T_1$  населенностей рассматриваемых квантовых состояний. Данное время имеет порядок величины  $T_1 \sim 1-10$  с [19]. При коллективном начальном возбуждении парамагнитных ионов может произойти их коллективное спонтанное излучение (сверхизлучение (СИ)), сопровождающееся сокращением времени жизни возбужденного состояния с увеличением числа данных ионов [19, 29]. Для реализации этого нежелательного здесь эффекта необходимо выполнение условия Фридберга–Хартмана [29, 30], которое в данном случае можно записать в виде  $\Gamma l \geq 1$ , где  $l$  – характерный размер среды. В противном случае эффект СИ не реализуется, а время жизни неравновесного состояния среды по порядку величины равно  $T_1$ . Для этого в нашем случае должно выполняться условие  $l \ll 1/\Gamma$ . Используя (21), запишем  $\Gamma \sim \frac{\eta}{aT_2} \left(\frac{\omega}{\omega_S}\right)^2$ . Взяв  $T_2 \sim 10^{-6}$  с [11] и приведенные выше оценки других параметров, будем иметь  $\Gamma \sim 10^{-3}$  см $^{-1}$ . Таким образом,  $l \ll 10^3$  см. Следовательно, время развития неустойчивости нулевого фона  $\tau \approx (\Gamma a)^{-1} \sim 10^{-2}$  с. Как результат, приходим к

неравенствам  $T_2 \ll \tau \ll T_1$ . Время  $\tau$  можно рассматривать как характерное время формирования солитоноподобного импульса (26). Тогда, полагая  $\tau \sim \Delta t$ , приходим к условию (1). Таким образом, полученные результаты согласуются с исходным предположением.

Солитоноподобное решение (25)–(27) есть результат взаимной компенсации усиления, вызванного преимущественной заселенностью верхнего энергетического уровня “0”, и нелинейным поглощением, которое обусловлено нормальной (не инверсной) заселенностью состояний запрещенного перехода  $- \leftrightarrow +$ . Отмеченные процессы описываются соответственно первым и вторым слагаемыми в уравнении (19а) (см. также (22)).

Обсуждаемое решение обладает непрерывным свободным параметром, в качестве которого выбрана временная длительность  $\tau_p$  импульса. Как видно из (25) и (26), с укорочением данной длительности скорость импульса уменьшается, а амплитуда, напротив, возрастает.

Конкретное значение свободного параметра  $\tau_p$  несет в себе память об условиях на входе в среду. Данное обстоятельство является нетривиальным для систем, содержащих диссипацию. Обычно диссипативные солитоны не содержат непрерывных свободных параметров [1]. Такие характеристики диссипативного солитона, как амплитуда, скорость и длительность могут изменяться только дискретным образом и определяются параметрами среды. Данная дискретность есть результат очень грубой памяти диссипативного солитона о входных условиях.

Из (27) видно, что в центре солитоноподобного объекта (26), где  $t = x/v$ ,

$$\frac{\delta\omega}{\omega} = -\frac{3}{2} \frac{3w_0 - 1}{w_- - w_+} \frac{1}{\omega_S \omega_0 \tau_p} \left( \frac{1}{T_2} + \frac{3}{4\tau_p} \right).$$

Взяв  $\omega_S \sim 10^{11}$  с $^{-1}$ ,  $\omega_0 \sim 10^8$  с $^{-1}$ ,  $\tau_p \sim T_2 \sim 10^{-6}$  с, будем иметь  $|\delta\omega|/\omega \sim 10^{-6}$ . Таким образом, несущая частота подвержена очень слабой модуляции, которую вряд ли можно зарегистрировать экспериментально.

Используя (26), получим оценочное выражение для амплитудного значения частоты Раби диссипативного солитоноподобного объекта

$$Q_m \sim \sqrt{\frac{\Gamma}{\mu\tau_p}} \sim \frac{\omega}{\sqrt{\omega_S \omega_0 T_2 \tau_p}}. \quad (29)$$

Примем, что в дополнение к приведенным выше параметрам несущая частота  $\omega \sim 10^9$  с $^{-1}$ . Тогда из (28) для амплитудного значения частоты Раби получим  $Q_m \sim 10^6$  с $^{-1}$ . Отсюда, а также из (7), (16)

и (18) найдем для амплитуды  $\varepsilon_{zx}^{(m)}$  относительной сдвиговой деформации  $\varepsilon_{zx}^{(m)} \sim \hbar Q_m / G_{\perp} \sim 10^{-8}$ . Импульс с таким значением деформации вполне может быть зарегистрирован в экспериментальных условиях [19, 23, 31].

Из (25), с учетом приведенных выше оценочных параметров, для скорости импульса с хорошей точностью имеем  $v \approx a_0 \approx a$ . Таким образом, скорость солитоноподобного объекта практически не отличается от линейной скорости звука в кристалле.

Частоты штарковского  $\omega_S$  и зеemanовского  $\omega_0$  расщеплений пропорциональны соответственно статической деформации  $\varepsilon_{zz}^{(0)}$  кристалла и величине индукции  $B$  приложенного к нему магнитного поля. Поэтому из (28) следует, что с помощью изменения величин статической деформации и магнитной индукции можно эффективно управлять значением амплитуды рассматриваемого солитоноподобного объекта. Здесь важно, чтобы выполнялись принятые выше неравенства  $\omega/\omega_S \ll 1$  и  $\omega/\omega_0 \gg 1$ . Приведенной выше оценке частоты  $\omega_0$  зеemanовского расщепления соответствуют относительно небольшие значения индукции магнитного поля  $B \sim 10$  Гс.

Диссипативный сигнал (26) может быть сформирован в парамагнитном кристалле после воздействия на него поперечным субгигагерцовым импульсом микросекундной длительности. Способы генерации как продольных, так и поперечных ультразвуковых импульсов хорошо разработаны на основе пьезоэлектрических эффектов и механизмов электрострикции [23, 31]. В любом случае необходимо помнить об условии (1), при котором можно пренебречь спонтанными переходами, разрушающими инверсную населенность квантовых уровней парамагнитных ионов.

**4. Заключение.** В настоящей работе показана принципиальная возможность существования солитоноподобного квазимонохроматического ультразвукового импульса в усиливающем (неравновесном) парамагнетике. При этом длительность такого импульса превышает время необратимой фазовой релаксации, что говорит о принципиальной роли диссипативных процессов.

Заметим, что акустические импульсы, в отличие от оптических, способны распространяться в проводящих средах. Это расширяет круг возможных приложений ультразвуковых диссипативных солитоноподобных объектов, дополняя возможные приложения их оптических аналогов.

Можно привести очень немного примеров решений уравнений с диссипацией, которые содержат непрерывный свободный параметр. Это, например, хорошо известное решение уравнения Бюргера в

виде бегущей доменной стенки [32]. Совсем недавно было найдено солитоноподобное униполярное решение уравнения (15) при  $\alpha = \mu = \gamma = 0$ , когда нелинейность имеет диссипативную природу, а линейные необратимые потери происходят благодаря временной диффузии [18, 33, 34]. Данное решение также содержит непрерывный свободный параметр. Это обстоятельство подчеркивает отличие найденных здесь и в [18, 33, 34] локализованных диссипативных объектов от диссипативных солитонов, описанных в [1]. Следует также подчеркнуть, что диссипативные локализованные объекты вида (25), (26) могут формироваться в метастабильных средах и существовать в них достаточно короткие времена  $\Delta t$ , удовлетворяющие неравенству (1). Таким образом, память о входных условиях, зашифрованная в значении непрерывного свободного параметра, является относительно недолгой.

Обычно непрерывными свободными параметрами обладают консервативные солитоны. Однако в нашем случае среда является неравновесной и в ней явным образом присутствуют диссипативные процессы, способствующие формированию здесь солитоноподобного объекта. Кроме того, состояние среды после распространения рассмотренного локализованного импульса отличается от ее первоначального состояния. Эти обстоятельства не позволяют здесь говорить об исследованном объекте как о консервативном солитоне.

---

1. Н. Н. Розанов, *Диссипативные оптические о родственные солитоны*, Физматлит, М. (2021).
2. Н. А. Веретенев, Н. Н. Розанов, С. В. Федоров, УФН **192**, 143 (2022) [N. A. Veretenov, N. N. Rosanov, and S. V. Fedorov, Phys.-Uspekhi **65**, 131 (2022)].
3. N. Akhmediev, A. Ankiewicz, J. M. Soto-Crespo, and Ph. Grelu, International Journal of Bifurcation and Chaos **19**, 2621 (2009).
4. N. A. Veretenov, N. N. Rosanov, and S. V. Fedorov, Phys. Rev. Lett. **117**, 183901 (2016).
5. С. В. Федоров, Н. Н. Розанов, Н. А. Веретенев, Письма в ЖЭТФ **107**, 342 (2018) [S. V. Fedorov, N. N. Rosanov, and N. A. Veretenov, JETP Lett. **107**, 327 (2018)].
6. V. E. Lobanov, O. V. Borovkova, and B. A. Malomed, Phys. Rev. A **90**, 053820 (2014).
7. V. E. Lobanov, N. M. Kondratiev, and I. A. Bilenko, Opt. Lett. **46**, 2380 (2021).
8. D. A. Dolinina, A. S. Shalin, and A. V. Yulin, Письма в ЖЭТФ **111**, 303 (2020) [D. A. Dolinina, A. S. Shalin, and A. V. Yulin, JETP Lett. **111**, 268 (2020)].

9. D. A. Dolinina, A. S. Shalin, and A. V. Yulin, Письма в ЖЭТФ **112**, 79 (2020) [D. A. Dolinina, A. S. Shalin, and A. V. Yulin, JETP Lett. **112**, 71 (2020)].
10. Ф. В. Бункин, Ю. А. Кравцов, Г. А. Ляхов, УФН **149**, 391 (1986) [F. V. Bunkin, Yu. A. Kravtsov, and G. A. Lyakhov, Sov. Phys.-Uspekhi **29**, 607 (1986)].
11. N. S. Shiren, Phys. Rev. B **2**, 2471 (1970).
12. Г. А. Денисенко, ЖЭТФ **60**, 2270 (1971) [G. A. Denisenko, JETP **33**, 1220 (1971)].
13. В. В. Самарцев, Б. П. Смоляков, Р. З. Шарипов, Письма в ЖЭТФ **20**, 644 (1974) [V. V. Samartsev, B. P. Smolyakov, and R. Z. Sharipov, JETP Lett. **20**, 296 (1974)].
14. H.-Y. Nao and H. J. Maris, Phys. Rev. B **64**, 064302 (2001).
15. Г. Т. Адамашвили, ФТТ **33**, 1596 (1991).
16. S. V. Sazonov, J. Phys.: Condens. Matter **6**, 6295 (1994).
17. С. В. Сазонов, Письма в ЖЭТФ **113**, 612 (2021) [S. V. Sazonov, JETP Lett. **113**, 592 (2021)].
18. С. В. Сазонов, Письма в ЖЭТФ **114**, 102 (2021) [S. V. Sazonov, JETP Lett. **114**, 104 (2021)].
19. В. А. Голеницев-Кутузов, В. В. Самарцев, Н. К. Соловьев, Б. М. Хабибуллин, *Магнитная квантовая акустика*, Наука, М. (1977).
20. А. А. Афанасьев, Р. А. Власов, А. Г. Черствый, ЖЭТФ **117**, 476 (2000) [A. A. Afanas'ev, R. A. Vlasov, and A. G. Cherstvyi, JETP **90**, 428 (2000)].
21. A. A. Afanas'ev, R. A. Vlasov, O. Kh. Khasanov, T. V. Smirnova, and O. M. Fedotova, JOSA B **19**, 911 (2002).
22. С. В. Сазонов, Письма в ЖЭТФ **116**, 563 (2022).
23. Дж. Такер, В. Рэмpton, *Гиперзвук в физике твердого тела*, Мир, М. (1975) [J. W. Tucker and V. W. Rampton, *Microwave Ultrasonics in Solid State Physics*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam (1972)].
24. J. C. Eilbeck, J. D. Gibbon, P. J. Caudrey, and R. K. Bullough, J. Phys. A **6**, 1337 (1973).
25. Э. М. Беленов, П. Г. Крюков, А. В. Назаркин, А. Н. Ораевский, А. В. Усков, Письма в ЖЭТФ **47**, 442 (1988) [E. M. Belenov, P. G. Kryukov, A. V. Nazarkin, A. N. Oraevskii, and A. V. Uskov, JETP Lett. **47**, 523 (1988)].
26. Э. М. Беленов, А. В. Назаркин, Письма в ЖЭТФ **51**, 252 (1990) [E. M. Belenov and A. V. Nazarkin, JETP Lett. **51**, 288 (1990)].
27. С. В. Сазонов, А. Ф. Соболевский, ЖЭТФ **123**, 1160 (2003) [S. V. Sazonov and A. F. Sobolevskii, JETP **96**, 1019 (2003)].
28. С. А. Ахманов, В. А. Выслоух, А. С. Чиркин, *Оптика фемтосекундных лазерных импульсов*, Наука, М. (1988).
29. Л. Аллен, Дж. Эберли, *Оптический резонанс и двухуровневые атомы*, Мир, М. (1978) [L. Allen and J. Eberly, *Optical Resonance and Two-Level Atoms*, John Wiley & Sons, Inc., N.Y. (1978)].
30. R. Friedberg and S. R. Hartmann, Phys. Lett. A **37**, 285 (1971).
31. К. Н. Баранский, *Физическая акустика кристаллов*, МГУ, М. (1991).
32. Дж. Уизем, *Линейные и нелинейные волны*, Мир, М. (1977) [G. B. Whitham, *Linear and Nonlinear Waves*, John Wiley & Sons, Inc., N.Y. (1974)].
33. С. В. Сазонов, Письма в ЖЭТФ **114**, 160 (2021) [S. V. Sazonov, JETP Lett. **114**, 132 (2021)].
34. S. V. Sazonov, Laser Physics Lett. **18**, 105401 (2021).