

О сильном влиянии нерезонансных трехволновых взаимодействий на насыщение низкопороговой параметрической распадной неустойчивости

Е. З. Гусаков, А. Ю. Попов¹⁾

Физико-технический институт им. А. Ф. Иоффе РАН, 194021 С.-Петербург, Россия

Поступила в редакцию 26 апреля 2022 г.

После переработки 11 мая 2022 г.

Принята к публикации 13 мая 2022 г.

Показано, что нерезонансное трехволновое взаимодействие между запертыми в плазме дочерними волнами, сопровождающееся возбуждением сильнозатухающих вынужденных колебаний, оказывает значительное влияние на нелинейную эволюцию низкопороговой параметрической распадной неустойчивости, приводя к ее насыщению в результате каскада последовательных низкопороговых распадов. В результате может существенно снижаться аномальное поглощение СВЧ волны накачки при электронном циклотронном нагреве плазмы в тороидальных установках с магнитным удержанием.

DOI: 10.31857/S1234567822130067, EDN: iwwttee

1. Введение. В преддверие физического пуска токамака ITER, который, как ожидается, продемонстрирует возможность осуществления управляемого термоядерного горения, фокус исследований в области термоядерного синтеза смещается в сторону детального анализа методов, необходимых для успешного управления разрядом. В частности, проводятся подробные исследования поведения мощных пучков СВЧ волн, которые используются при электронном циклотронном резонансном нагреве (ЭЦРН) плазмы для локальной модификации профиля тока с целью стабилизации неоклассической тириг-неустойчивости. К настоящему времени в экспериментах по ЭЦРН накоплено большое количество данных, указывающих на нелинейный характер поведения СВЧ волн. А именно, в ЭЦРН экспериментах наблюдались аномальное рассеяние назад пучков накачки [1], явное уширение профиля энерговыделения СВЧ мощности [2, 3], а также сопутствующее присутствию СВЧ волн ускорение ионов [4] и излучение плазмы на субгармониках частоты внешнего генератора (гиротрона) [5]. Обнаруженные аномальные явления оказались возможным интерпретировать как результат развития низкопороговой параметрической распадной неустойчивости (ПРН) волны накачки в области плазмы с немонотонным профилем плотности [6–8]. В результате этого распада резонансно возбуждаются две дочерние волны, волновые вектора и частоты которых удовлетворя-

ют в области нелинейного взаимодействия распадным условиям. В общем случае, одна из дочерних волн – это локализованная в локальном максимуме плотности верхняя гибридная (ВГ) волна, для которой конвективный вынос энергии вдоль направления неоднородности полностью подавлен и сохраняются только слабые дифракционные потери в плоскости локализации нагревного пучка [7, 8]. Адекватность этого сценария низкопорогового распада подтверждена в численных расчетах [9] и недавних ЭЦРН экспериментах на ведущих тороидальных установках для удержания плазмы ASDEX-Upgrade [10] и Wendelstein 7-X [11], где обнаружена ПРН пучка СВЧ волн при его прохождении через область плазмы с немонотонным профилем плотности, возникшим в силу различных причин. В работах [12–16] было изучено насыщение этой низкопороговой ПРН за счет каскада последовательных низкопороговых распадов первичной ВГ волны, приводящего к появлению вторичных локализованных ВГ волн и ионных бернштейновских (ИБ) волн. Было показано, что в случае нечетного числа ступеней каскада вторичных распадов неустойчивость насыщается на сравнительно невысоком уровне, что приводит к умеренному аномальному поглощению мощности накачки на уровне, меньшем 25%. Предложенный сценарий насыщения первичной ПРН позволил, в частности, воспроизвести частотные спектры аномального рассеяния СВЧ волн на разных установках [12, 17], а также интерпретировать частотные полосы рассеянного сигнала, сдвинутые в красную и синюю область

¹⁾e-mail: a.popov@mail.ioffe.ru

[10, 17]. Кроме того, оказалось возможным предсказать и спектр излучения плазмы на субгармониках гиротрона [18], обнаруженный позднее в экспериментах [5]. Тем не менее, парадоксальным образом в случае четного числа ступеней каскада вторичных распадов этот механизм не приводит к насыщению неустойчивости [14–16]. При этом, насыщение неустойчивости может достигаться из-за значительного истощения волны накачки при очень высоком уровне возбужденных плазменных волн и коэффициенте аномального поглощения порядка 80–90%. Кроме того, наибольшую амплитуду в режиме насыщения имеют первичная ВГ волна и дочерние ВГ волны, относящиеся к четным шагам каскада ее распадов [15, 16]. Количество шагов вторичных распадов определяется конкретными экспериментальными условиями: шириной и высотой локального максимума плотности, который неоднократно наблюдался во вращающихся и статических магнитных островах, на периферии плазменного шнура при развитии ELM колебаний, в центре плазменного шнура, а также степенью пространственной неоднородности магнитного поля в установке [5, 17, 20].

В настоящем письме мы покажем, что нерезонансное трехволновое взаимодействие между дочерними ВГ волнами с наибольшей амплитудой, которое ведет, казалось бы, к слабому эффекту, а именно, к возбуждению сильнозатухающих вынужденных колебаний, может оказывать сильное влияние на процесс насыщения неустойчивости, определяя уровень аномального поглощения мощности накачки при четном числе вторичных распадов. При этом насыщение ПРН происходит на существенно меньшем уровне, чем при учете только истощения волны накачки.

2. Влияние нерезонансных биений ВГ волн на каскадное насыщение низкороговой параметрической распадной неустойчивости. Нерезонансное взаимодействие двух ВГ волн с близкими частотами приводит к возбуждению низкочастотных вынужденных колебаний на разностной частоте. В рамках ВКБ (Вентцеля–Крамерса–Бриллюэна) приближения потенциалы ВГ волн, запертых в окрестности локального максимума плотности плазмы, могут быть записаны в виде [16]

$$\varphi_m(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{4T_e}{\omega_m D_{m\omega}}} \frac{a_m(y, z)}{w} \phi_m(x) \exp(-i\omega_m t) + \text{c.c.},$$

где

$$\phi_m(x) = \sum_{j=\pm} \frac{1}{L_m^j(x)^{1/2}} \exp\left(i \int_{x_{ml}}^x q_{mx}^j(\xi) d\xi - i \frac{\pi}{4} \cdot j\right)$$

– собственные функции, описывающие локализацию волны в окрестности локального максимума плотности вдоль направления неоднородности x ; z и y – координаты вдоль магнитной силовой линии и перпендикулярно к ней на магнитной поверхности; $a_m(y, z)$ – безразмерное распределение потенциала на магнитной поверхности; T_e и w – температура и поперечный размер пучка накачки, распространяющегося вдоль x в области распада; $q_{mx}^\pm = q_x^\pm(\omega_m)$ – решение дисперсионного уравнения ВГ волны $D_{UH}(\mathbf{q}) = 0$ при $q_{y,z} = 0$ [16]; $L_m^\pm(x) = |D_{mq}^\pm(x)| \int_{x_{mr}}^x dx' (|D_{mq}^+(x')|^{-1} + |D_{mq}^-(x')|^{-1})$; $D_{mq}^\pm = \partial D_{UH} / \partial q_x |_{q_{mx}^\pm}$; $D_{m\omega} = \langle \partial D_{UH} / \partial \omega |_{\omega_m, q_{mx}^\pm} \rangle$; $\langle \dots \rangle$ – усреднение по области локализации моды; собственная частота ω_m является решением уравнения $\int_{x_{ml}}^{x_{mr}} (q_x^+(\omega_m, x) - q_x^-(\omega_m, x)) dx = \pi(2m + 1)$, $x_{ml, mr}$ – точки поворота волны. Потенциал вынужденных гармонических колебаний $\varphi(\Omega, \mathbf{r})$ на частоте $\Omega = \omega_m - \omega_r$ является решением уравнения Пуассона, где источником выступает нелинейная плотность заряда [16]. В рамках ВКБ приближения решение этого уравнения имеет вид

$$\varphi(\Omega, \mathbf{r}) = \frac{T_e}{w^2 B} \frac{\kappa(x)}{2} a_m(y, z) a_r(y, z)^* \exp(-i\Omega t) + \text{c.c.}, \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} \kappa(x) &= \frac{4}{|\omega_{ce} \omega_{pe}^2|} \sqrt{\frac{\omega_m \omega_r}{D_{m\omega} D_{r\omega}}} \times \\ &\times \sum_{j,k=\pm} \frac{q_{mx}^j(x) q_{rx}^k(x) (q_{mx}^j(x) - q_{rx}^k(x))^2}{D(\Omega, q_{mx}^j(x) - q_{rx}^k(x))} \times \\ &\times \frac{\exp\left(i \int_{x_{ml}}^x (q_{mx}^j(\xi) - q_{rx}^k(\xi)) d\xi\right)}{\sqrt{L_m^j(x) L_r^k(x)}} \quad [16]; \end{aligned}$$

ω_{ce} и ω_{pe} – ЭЦ и электронная плазменная частоты. Поскольку частота Ω значительно превосходит ионную циклотронную, ионный вклад в дисперсионное уравнение для колебаний конечной амплитуды становится “незамагниченным” (режим стохастического поглощения [19]). В этом случае, мы можем записать соответствующую этим колебаниям дисперсионную функцию в виде $D(\Omega, q_I) = q_I^2 (1 + \omega_{pe}^2 / \omega_{ce}^2) + 2\omega_{pi}^2 / v_{ti}^2 (1 + Z(\Omega / q_I v_{ti}))$, где $\text{Re} D$ – невязка линейного дисперсионного уравнения для колебаний на частоте Ω с волновым вектором $q_I = q_{mx}^j - q_{rx}^k$; $\text{Im} D$ – описывает стохастическое затухание вынужденных колебаний; $Z(\lambda)$ – плазменная дисперсионная функция; ω_{pi} и v_{ti} – ионная плазменная частота и тепловая скорость. Действительная часть функции $\kappa(x)$ (она пропорциональна $\sim \text{Re} D / |D|^2$) приводит к нелинейному смещению частоты взаимодействующих ВГ волн, а

мнимая часть ($\sim \text{Im}D/|D|^2$) обеспечивает “перекачку” мощности от ВГ волны с большей частотой и меньшим собственным числом (ω_m и m) к ВГ волне с меньшей частотой $\omega_r < \omega_m$ и большим собственным числом $r > m$. Далее, учтем эффект возбуждения вынужденных низкочастотных колебаний при описании ПРН гауссовского пучка волн накачки, имеющего поперечный диаметр w и распространяющегося вдоль x . Рассмотрим случай, когда в результате первичной неустойчивости необыкновенной волны накачки возбуждаются запертая в плазме ВГ волна и свободно распространяющаяся необыкновенная волна. Поскольку при четном количестве вторичных распадов для заданных параметров ЭЦРН экспериментов их конкретное число не приводит сильному изменению уровня аномального поглощения [15], для иллюстрации модели мы сосредоточимся на условиях, когда число вторичных распадов наименьшее из четных, и проанализируем насыщение этой неустойчивости в результате двухшагового распадного процесса. Пусть в результате вторичных неустойчивостей возбуждаются локализованные вторичные ВГ волны и свободные вторичные ИБ волны, покидающие область взаимодействия вдоль направления неоднородности x . Тогда для распределения поперек направления неоднородности x амплитуд локализованных ВГ волн (моды $m < n < r$, рождающиеся одна за другой) можно получить систему уравнений, подробный вывод которой приведен в [16]

$$\begin{cases} \frac{\partial a_m}{\partial t} - i\Lambda_{my} \frac{\partial^2 a_m}{\partial y^2} - i\Lambda_{mz} \frac{\partial^2 a_m}{\partial z^2} = \\ = \gamma_p a_m \exp\left(-\frac{y^2}{w^2} - \frac{z^2}{w^2}\right) - \gamma_s |a_n|^2 a_m - v |a_r|^2 a_m, \\ \frac{\partial a_n}{\partial t} + i\Lambda_{ny} \frac{\partial^2 a_n}{\partial y^2} + i\Lambda_{nz} \frac{\partial^2 a_n}{\partial z^2} = \gamma_s |a_m|^2 a_n - \gamma_t |a_r|^2 a_n, \\ \frac{\partial a_r}{\partial t} - i\Lambda_{ry} \frac{\partial^2 a_r}{\partial y^2} - i\Lambda_{rz} \frac{\partial^2 a_r}{\partial z^2} = \gamma_t |a_n|^2 a_r + v |a_m|^2 a_r, \end{cases} \quad (2)$$

где $\Lambda_{m,n,ry}$ и $\Lambda_{m,n,rz}$ – коэффициенты дифракции, усредненные по областям локализации собственных мод; $\gamma_{p,s,t}$ – коэффициенты усиления дочерних ВГ волн за счет первичной, вторичной и третичной неустойчивостей. Коэффициент нелинейной связи между дочерними ВГ волнами v , приводящий к нелинейной перекачке мощности от первичной к третичной ВГ волне (v'), а также нелинейному изменению фазы этих волн (v''), получается с помощью подстановки выражения (1) в нелинейные уравнения для амплитуд ВГ волн (см. [16]) и имеет вид

$$v = v' + iv'' = i \frac{T_e}{w^2 B^2} \frac{c^2 \omega_m \omega_r}{\omega_{ce}^2 \omega_{pe}^4} \frac{\sqrt{\omega_m \omega_r}}{D_{m\omega} D_{r\omega}} \times$$

$$\times \sum_{j,k=\pm} \int_{x_{m1}}^{x_{mr}} \frac{q_{mx}^j(x)^2 q_{rx}^k(x)^2 (q_{mx}^j(x) - q_{rx}^k(x))^4}{D(\Omega, q_{mx}^j(x) - q_{rx}^k(x)) L_m^j(x) L_r^k(x)} dx, \quad (3)$$

где B – локальное значение магнитного поля. Как показал анализ и подтвердили численные расчеты, при четном числе вторичных распадов без учета обсуждаемого эффекта первичная и третичные ВГ волны имеют наибольшую амплитуду [16]. По этой причине мы учли слабый эффект возбуждения вынужденных колебаний только под действием биений этих дочерних волн. Отметим также, что в системе уравнений (2) не учтен эффект истощения волны накачки.

Далее, решим систему уравнений (2) численно, предполагая тепловой начальный уровень всех ВГ волн и накладывая периодические граничные условия на границах бокса. Размер бокса выбирается таким, чтобы для наиболее низко-пороговых мод расчет требовал промежутка времени, который много меньше времени возвращения ВГ волны обратно в область распада при циркуляции в этом боксе. Таким образом, полученное решение будет промежуточной асимптотикой, которая, однако, будет правильно описывать экспериментальные наблюдения и механизм насыщения неустойчивости. Мы проиллюстрируем обсуждаемый эффект, используя при численном решении параметры, типичные для экспериментов по ЭЦР нагреву (пучок необыкновенных волн $f_0 = 140$ ГГц в экваториальной плоскости установки) на токамаке TEXTOR ($R_0 = 175$ см, $a = 46$ см – большой и малый радиус установки). Целью этих экспериментов было изучение возможности контроля неоклассической тиринг-моды ($T_e = 600$ эВ, $T_i = 400$ эВ и $B = 2$ Т в области магнитного острова) [1]. Профиль плотности в магнитном острове ($m = 2/n = 1$) был немонотонным, с локальным максимумом в О-точке этой магнитной структуры [20]. В процессе полоидального вращения ширина и максимум возмущения плотности в экваториальной плоскости менялись. В частности, был возможен распад волны накачки и каскадное возбуждение локализованных ВГ волн, которые описываются системой (2). Коэффициенты этой системы уравнений предполагались постоянными. Результаты численного решения системы (2) при мощности и диаметре пучка накачки $P_0 = 1$ МВт, $w = 1$ см, а именно, эволюция энергии первичных (сплошная линия), вторичных (пунктирная линия) и третичных (штрих-пунктирная линия) ВГ волн в области распада $\varepsilon_j = (\pi w^2)^{-1} \int dy dz |a_j(z)|^2 \exp(-(y^2 + z^2)/w^2)$, $j = m, n, r$ показаны на рис. 1 и 2. На рисунке 1 показан результат расчета без учета эффекта биений ($v = 0$). Видно, что система не имеет стационарного

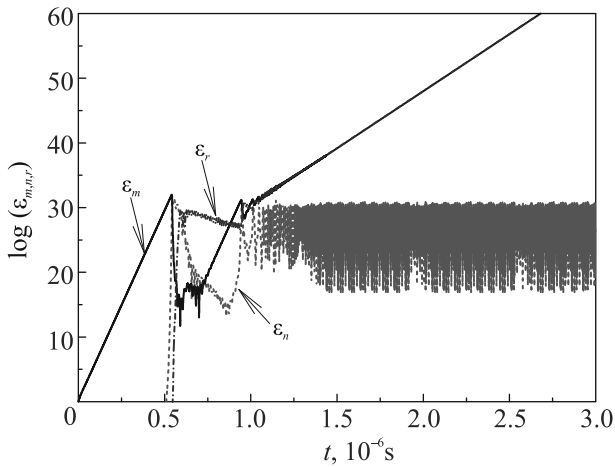


Рис. 1. (Цветной онлайн) Эволюция энергии первичных (сплошная линия), вторичных (пунктирная линия) и третичных (штрих пунктирная линия) ВГ волн в области распада при $v = 0$ в полулогарифмическом масштабе, полученная в результате численного решения системы уравнений (2). Мощность и диаметр пучка накачки – $P_0 = 1$ МВт, $w = 1$ см

решения, что находится в согласии с выводами работ [14–16]. Амплитуды дочерних волн неограниченно растут, а, значит, насыщения первичной неустойчивости не происходит. При этом доминируют ВГ волны, возбуждаемые в первичном распаде и на последнем шаге каскада последовательных распадов, а рост вторичной ВГ волны прекращается. Результаты, приведенные на рис. 2, получены с учетом эффекта биений между первичными и третичными ВГ волнами ($v \neq 0$) и обратного влияния на них вынужденных низкочастотных колебаний. Видно, что система после сложного переходного процесса эволюционирует к стационарному состоянию, в котором вторичная ВГ волна в конце концов подавляется.

Проанализируем аналитически возможность существования обнаруженного стационарного решения, а значит и насыщения неустойчивости, при учете обсуждаемого в работе эффекта биений $v \neq 0$. Предположим, что стационарный режим волнового взаимодействия, описываемого системой уравнений (2), существует. В этом случае мы можем оценить уровни насыщения ВГ волн в пределах пучка из соображений баланса различных слагаемых в уравнениях, входящих в (2), и, соответственно, процессов ими описываемых. В частности, если потери энергии ВГ волн на второй ступени каскада превосходят их параметрическую накачку $\gamma_s \varepsilon_m < \gamma_t \varepsilon_r$, то вторичные ВГ волны на стационарной стадии взаимодействия будут полностью подавлены. Для существования стационарного решения (2) будет необходим

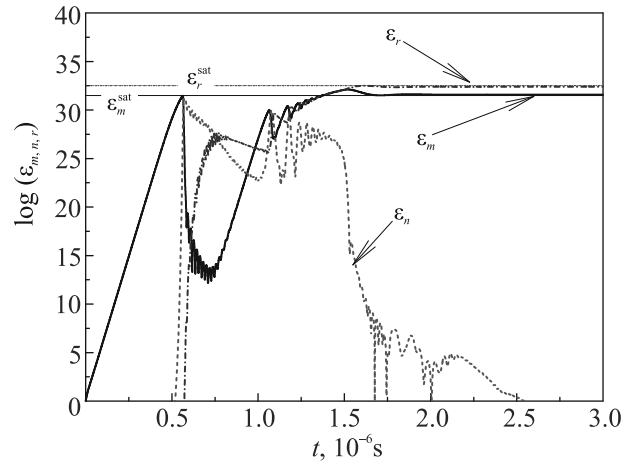


Рис. 2. (Цветной онлайн) Те же зависимости, что и на рис. 1, полученные при решении системы уравнений (2) с теми же параметрами, но при учете эффекта биений. Тонкие горизонтальные линии – оценки уровней насыщения (4) и (5)

баланс параметрической накачки ВГ волн на третьей ступени каскада и их дифракционных потерь $\tau_r = \min(w^2/\Lambda_{ry}, w^2/\Lambda_{rz})$, что позволяет найти оценку для уровня насыщения первичных ВГ волн

$$\varepsilon_m^{\text{sat}} = 1/(v' \tau_r). \quad (4)$$

В этом случае уровень насыщения ВГ волн на третьей ступени каскада будет определяться балансом параметрической накачки первичных ВГ волн и их потерь за счет нерезонансного взаимодействия

$$\varepsilon_r^{\text{sat}} = \gamma_p/v'. \quad (5)$$

Стационарные уровни первичной и третичной волн, т.е. их уровни насыщения (5), показаны тонкими горизонтальными линиями на рис. 2. Они находятся в разумном согласии с результатами численного решения системы нелинейных уравнений в частных производных. Это позволяет с доверием относиться к результатам численного решения. Отметим, что уровень возбуждения вторичных волн $\varepsilon_n^{\text{sat}} = 1$, что в размерных единицах соответствует тепловому уровню. Это эквивалентно “выпадению” второго уравнения в системе (2) и малости по сравнению с остальными членами в правых частях первого и третьего уравнений членов, которые пропорциональны $|a_n|^2$. Таким образом, эффективно система (2) сводится к случаю каскада вторичных распадов с нечетным числом шагов, при котором стационарное решение и насыщение неустойчивости существует [14–16]. В этом случае, расчет аномальных потерь мощности волны накачки дает значительную величину 40%, ко-

торая, тем не менее, меньше, чем уровень 80%, найденный в [15] при учете истощения волны накачки, как единственного механизма насыщения неустойчивости. Заметим, что определенный уровень эффективности аномальных потерь представляется достаточным для объяснения уширения области выделения энергии при ЭЦР нагреве плазмы, наблюдаемого в ряде экспериментов [2, 3].

3. Выводы. В работе показано, что сравнительно слабый эффект нерезонансного взаимодействия между различными дочерними ВГ волнами с наибольшей амплитудой, сопровождающийся возбуждением сильнозатухающих вынужденных коротковолновых колебаний в промежуточном частотном диапазоне, может оказывать существенное влияние на нелинейную динамику и уровень насыщения первичной низкочастотной параметрической неустойчивости по каскадному механизму. Обнаружено, что биеения между различными дочерними ВГ волнами приводят к насыщению первичной неустойчивости даже при четном числе шагов в каскаде распадов при вторичной неустойчивости. Полученные результаты свидетельствуют о важности учета не только резонансных, но и нерезонансных взаимодействий дочерних волн при анализе перехода ПРН СВЧ волн в режим насыщения и при расчете эффективности их аномального поглощения.

Аналитическое рассмотрение неустойчивости и ее насыщения выполнены при поддержке гранта Российского научного фонда 22-12-00010, численное моделирование – в рамках государственного контракта ФТИ им. А. Ф. Иоффе РАН 0040-2019-0023, а код для моделирования насыщения неустойчивости был разработан в рамках государственного контракта ФТИ им. А. Ф. Иоффе РАН 0034-2021-0003.

1. E. Westerhof, S.K. Nielsen, J.W. Oosterbeek, M. Salewski, M. R. De Baar, W. A. Bongers, A. Bürger, B. A. Hennen, S. B. Korsholm, F. Leipold, D. Moseev, M. Stejner, and D. J. Thoe, *Phys. Rev. Lett.* **103**, 125001 (2009).
2. Yu. N. Dnestrovskij, A. V. Danilov, A. Yu. Dnestrovskij, S. E. Lysenko, A. V. Melnikov, A. R. Nemets,

- M. R. Nurgaliev, G. F. Subbotin, N. A. Solovov, D. Yu. Sychugov, and S. V. Cherkasov, *Plasma Phys. Control. Fusion* **63**, 055012 (2021).
3. А. И. Мещеряков, И. Ю. Вафина, И. А. Гришина, *Физика плазмы* **47**, 22 (2021).
4. S. Coda, *Nucl. Fusion* **55**, 104004 (2015).
5. S. K. Hansen, S. K. Nielsen, J. Stober, J. Rasmussen, M. Stejner, M. Hoelzl, T. Jensen, and the ASDEX Upgrade team, *Nucl. Fusion* **60**, 106008 (2020).
6. A. Yu. Popov and E. Z. Gusakov, *Plasma Phys. Control. Fusion* **57**, 025022 (2015).
7. A. Yu. Popov and E. Z. Gusakov, *Europhys. Lett.* **116**, 45002 (2016).
8. А. Ю. Попов, Е. З. Гусаков, *Письма ЖЭТФ* **105**, 64 (2017).
9. M. G. Senstius, S. K. Nielsen, and R. G. L. Vann, *Plasma Phys. Control. Fusion* **63**, 065018 (2021).
10. S. K. Hansen, A. S. Jacobsen, M. Willensdorfer, S. K. Nielsen, J. Stober, K. Höfler, M. Maraschek, R. Fischer, M. Dunne, and the EUROfusion MST1 team, *Plasma Phys. Control. Fusion* **63**, 095002 (2021).
11. A. Tancetti, S. K. Nielsen, J. Rasmussen, D. Moseev, E. Z. Gusakov, A. Yu. Popov, T. Stange, S. Marsen, M. Zanini, C. Killer, M. Vecsei, H. P. Laqua, and W7-X Team, *47th EPS Conference on Plasma Physics 21–25 June 2021*, Sitges, Spain, **45A**, P4. 1048 (2021).
12. E. Z. Gusakov and A. Yu. Popov, *Phys. Plasmas* **23**, 082503 (2016).
13. E. Z. Gusakov and A. Yu. Popov, *Nucl. Fusion* **59**, 104003 (2019).
14. Е. З. Гусаков, А. Ю. Попов, *Письма в ЖЭТФ* **109**, 723 (2019).
15. E. Z. Gusakov and A. Yu. Popov, *Plasma Phys. Control. Fusion* **62**, 025028 (2020).
16. Е. З. Гусаков, А. Ю. Попов, *УФН* **190**, 396 (2020).
17. A. Tancetti, S. K. Nielsen, J. Rasmussen et al. (Collaboration), the W7-X Team, *Nucl. Fusion* **62**, 074003 (2022).
18. E. Z. Gusakov, A. Yu. Popov, and P. V. Tretinnikov, *Nucl. Fusion* **59**, 106040 (2019).
19. C. F. F. Karney and A. Bers, *Phys. Rev. Lett.* **39**, 550 (1977).
20. M. Yu. Kantor, A. J. H. Donne, R. Jaspers, H. J. van der Meiden, and TEXTOR Team, *Plasma Phys. Control. Fusion* **51**, 055002 (2009).