

Протяженные векторные солитоны с существенным различием частот поляризационных компонент

В. В. Тютин¹⁾

Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, 603155 Н. Новгород, Россия

Поступила в редакцию 19 декабря 2021 г.

После переработки 20 апреля 2022 г.

Принята к публикации 23 апреля 2022 г.

Найден протяженный векторный солитон огибающей при существенном различии частот поляризационных компонент. В качестве модельного использовано связанное нелинейное уравнение Шредингера, учитывающее различие реакции анизотропной среды на волновые поля разных поляризаций и разных частот. Найденный векторный солитон отличается от хорошо известного солитона Манакова соотношением волновых чисел и частот поляризационных компонент. Но при отсутствии различия реакции анизотропной среды на волновые поля разных поляризаций найденный солитон совпадает с солитоном Манакова. Определены условия существования найденного векторного солитона. В численном эксперименте подтверждена устойчивость аналитического решения.

DOI: 10.31857/S1234567822100111, EDN: dyvohu

Введение. В настоящее время уделяется большое внимание к стационарным нелинейным волновым пакетам – солитонам. Этот интерес вызван тем, что солитоны могут распространяться на большие расстояния без изменения своей формы, перенося при этом без потерь энергию и информацию. В частности, солитоны используются в нелинейных оптических волоконных линиях связи в качестве импульсов – носителей информации. Солитоны могут быть описаны в виде решений модельных нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих распространение и эволюцию интенсивных волновых полей в нелинейных средах с дисперсией. Такие уравнения широко применяются в различных разделах современной физики: при исследовании поверхностных волн на глубокой воде, электромагнитных волн в плазме, оптических импульсов в волоконной оптике [1–4].

Эволюция высокочастотного волнового поля $U(x, t) \exp(i\omega t - ikx)$ в изотропной нелинейной среде с дисперсией при значительной длительности $\omega T \gg 1$ и значительной протяженности $kL \gg 1$ (где T – характерный масштаб по времени, а L – характерный пространственный масштаб огибающей $U(x, t)$ волнового пакета) корректно описывается во втором приближении теории дисперсии нелинейных волн. Основным модельным уравнением для медленно изменяющейся огибающей U волнового пакета

в этом случае является классическое нелинейное уравнение Шредингера [5, 6]:

$$2i \frac{\partial U}{\partial t} + q \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + 2\alpha |U|^2 U = 0,$$

где $\xi = x - V_g^L t$ – пространственная переменная, соответствующая системе отсчета, движущейся с групповой скоростью линейных волн V_g^L , q – параметр линейной дисперсии второго порядка, α – параметр кубичной нелинейности. Это уравнение имеет хорошо известное решение в виде солитона огибающей [5], который существует в результате баланса эффектов дисперсионного расплывания и нелинейного сжатия волнового пакета:

$$U(\xi, t) = \frac{A_0}{\cosh\left(A_0(\xi - Vt) \sqrt{\frac{\alpha}{q}}\right)} \times \exp\left(i \left(\frac{\alpha A_0^2}{2} - \frac{V^2}{2q}\right) t + i \frac{V}{q} \xi\right).$$

Здесь A_0 – максимальная амплитуда, V – скорость солитона. Динамика и взаимодействие таких солитонов в рамках классического нелинейного уравнения Шредингера детально исследованы, например в [5–7].

Рассмотрим динамику протяженного (более нескольких сотен длин волны) волнового пакета $E = \mathbf{e}_1 U(x, t) \exp(i\omega_V t - ik_0 x) + \mathbf{e}_2 W(x, t) \exp(i\omega_W t - ik_0 x)$ в анизотропной двояколучепреломляющей среде. Здесь \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 – взаимно перпендикулярные вектора, определяющие две различные поляризации

¹⁾e-mail: vtyutin@hse.ru

волнового поля, $U(x, t)$ и $W(x, t)$ – медленно меняющиеся комплексные огибающие волнового пакета с поляризациями \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 соответственно. Такие волновые пакеты, состоящие из двух компонент различной взаимно-ортогональной поляризации, обычно называют “векторные” волновые пакеты.

Для описания эволюции таких волновых пакетов, при учете взаимодействия волновых полей различных поляризаций в анизотропной среде с дисперсией в качестве базового уравнения традиционно используется так называемое связанное нелинейное уравнение Шредингера 2-го порядка (СНУШ, так называемая “система Манакова” [7]):

$$2i \frac{\partial U}{\partial t} + q \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + 2\alpha(|U|^2 + \sigma|W|^2)U = 0,$$

$$2i \frac{\partial W}{\partial t} + q \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + 2\alpha(|W|^2 + \sigma|U|^2)W = 0.$$

Здесь $\xi = x - V_g^L t$ – пространственная переменная, соответствующая системе отсчета, движущейся со скоростью V_g^L – одинаковой для U и W – компонент групповой скоростью линейных волн. σ – коэффициент нелинейного взаимодействия между поляризационными компонентами волнового пакета. В такой форме связанное нелинейное уравнение Шредингера используется при условии близости частот поляризационных компонент $|\omega_U - \omega_W| \ll \{\omega_U, \omega_W\}$. Система Манакова хорошо изучена, например, в [7–12]. В рамках этой системы существует протяженный векторный солитон (двухкомпонентное солитонное решение, так называемый “солитон Манакова” [7]):

$$U(\xi, t) = \frac{A_0}{\cosh\left(A_0(\xi - Vt)\sqrt{\frac{\alpha}{q}(1 + \lambda^2\sigma)}\right)} \times \quad (1)$$

$$\times \exp\left(i\left(\frac{\alpha A_0^2(1 + \lambda^2\sigma)}{2} - \frac{V^2}{2q}\right)t + i\frac{V}{q}\xi\right), \quad W = \lambda U.$$

Здесь A_0 – максимальная амплитуда U – компоненты, V – скорость векторного солитона. λ – коэффициент пропорциональности поляризационных компонент, удовлетворяющий условию $(\lambda^2 - 1)(\sigma - 1) = 0$.

Данная работа посвящена описанию протяженных векторных солитонов огибающей при учете существенного различия частот поляризационных компонент. В этом случае существует векторный солитон, отличный от солитона Манакова.

Векторные солитоны при различной реакции среды на волновые поля разных поляризаций. Рассмотрим протяженный двухкомпонентный волновой пакет при существенном различии частот поляризационных компонент $|\omega_U - \omega_W| \sim \{\omega_U, \omega_W\}$. В этом случае в модельном уравнении,

в отличие от ранее использованного Манаковым связанного нелинейного уравнения Шредингера, следует учесть различие реакции анизотропной среды на разные поляризационные компоненты волнового поля с разными частотами. И модельное уравнение при этом имеет вид:

$$2i \left(\frac{\partial U}{\partial t} - \delta \frac{\partial U}{\partial \xi} \right) + q_U \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + 2\alpha_U(|U|^2 + \sigma|W|^2)U = 0, \quad (2)$$

$$2i \left(\frac{\partial W}{\partial t} + \delta \frac{\partial W}{\partial \xi} \right) + q_W \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + 2\alpha_W(|W|^2 + \sigma|U|^2)W = 0. \quad (3)$$

Здесь $\xi = x - V_g^L t$ – пространственная переменная, соответствующая системе отсчета, движущейся со скоростью V_g^L – средней для U и W – компонент групповой скоростью линейных волн. δ – параметр, равный половине разности групповых скоростей линейных волн U и W компонент. σ – коэффициент нелинейного взаимодействия между поляризационными компонентами волнового пакета.

При анализе динамики векторных волновых пакетов важны характерные соотношения для внутренней энергии разных поляризационных компонент пакета. При условии ограниченности в пространстве волнового пакета $U, W, \frac{\partial U}{\partial \xi}, \frac{\partial W}{\partial \xi} \Big|_{\xi \rightarrow \pm\infty} = 0$ имеет место условие сохранения энергии компонент волнового пакета:

$$N_U = \int_{-\infty}^{+\infty} |U|^2 d\xi = \text{const},$$

$$N_W = \int_{-\infty}^{+\infty} |W|^2 d\xi = \text{const},$$

т.е.

$$\frac{\partial N_U}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial N_W}{\partial t} = 0.$$

Таким образом, хотя U и W компоненты между собой взаимодействуют через нелинейные члены в (2)–(3), обмена энергией между ними нет. Взаимодействие приводит к перераспределению энергии внутри компонент, к изменению их профилей, амплитуд и фаз. Аналогичное утверждение справедливо и для ранее описанного солитона Манакова (1).

Решение системы (2), (3) будем искать в виде стационарных волновых пакетов, используя переменную $\eta = \xi - Vt$, где $V = V_U = V_W$ – скорость движения пакета, одинаковая для обоих поляризационных компонент:

$$U(\eta, t) = A_U(\eta) \exp(i\Omega_U t + iK_U \eta),$$

$$W(\eta, t) = A_W(\eta) \exp(i\Omega_W t + iK_W \eta).$$

Здесь A_U, A_W – действительные амплитуды, K_U, K_W – добавочные волновые числа, а Ω_U, Ω_W – добавочные частоты для компонент U, W .

Подставив в таком виде U, W в систему (2), (3) и разделив полученные уравнения на действительную и мнимую части, имеем:

$$q_U \frac{\partial^2 A_U}{\partial \eta^2} + (2VK_U + 2\delta K_U - q_U K_U^2 - 2\Omega_U)A_U + 2\alpha_U(A_U^3 + \sigma A_W^2 A_U) = 0, \quad (4)$$

$$(-2V - 2\delta + 2q_U K_U) \frac{\partial A_U}{\partial \eta} = 0, \quad (5)$$

$$q_W \frac{\partial^2 A_W}{\partial \eta^2} + (2VK_W - 2\delta K_W - q_W K_W^2 - 2\Omega_W)A_W + 2\alpha_W(A_W^3 + \sigma A_U^2 A_W) = 0, \quad (6)$$

$$(-2V + 2\delta + 2q_W K_W) \frac{\partial A_W}{\partial \eta} = 0. \quad (7)$$

Так как $\frac{\partial A_{U,W}}{\partial \eta} \neq 0$ в общем случае, то из уравнений (5) и (7) получим:

$$V = q_U K_U - \delta = q_W K_W + \delta, \quad \text{а так же}$$

$$K_U = \frac{V + \delta}{q_U}, \quad K_W = \frac{V - \delta}{q_W}. \quad (8)$$

Характерно, что $K_U \neq K_W$ даже при $q_U = q_W$ из-за наличия сдвига δ , в отличие от солитона Манакова (для которого $K_U = K_W$).

Далее будем считать $A_W = \lambda A_U$, где $\lambda \neq 0$. С учетом (8), получим из (4) и (6):

$$q_U \frac{\partial^2 A_U}{\partial \eta^2} + (q_U K_U^2 - 2\Omega_U)A_U + 2\alpha_U(1 + \lambda^2 \sigma)A_U^3 = 0, \quad (9)$$

$$\lambda \left(q_W \frac{\partial^2 A_U}{\partial \eta^2} + (q_W K_W^2 - 2\Omega_W)A_U + 2\alpha_W(\lambda^2 + \sigma)A_U^3 \right) = 0. \quad (10)$$

Уравнения (9) и (10) имеют нетривиальное решение при выполнении условий пропорциональности:

$$\frac{q_U}{q_W} = \frac{q_U K_U^2 - 2\Omega_U}{q_W K_W^2 - 2\Omega_W} = \frac{\alpha_U(1 + \lambda^2 \sigma)}{\alpha_W(\lambda^2 + \sigma)}. \quad (11)$$

Из (11) получаем требование, полностью определяющее коэффициент пропорциональности поляризационных компонент:

$$\lambda^2 = \frac{\alpha_U q_W - \sigma \alpha_W q_U}{\alpha_W q_U - \sigma \alpha_U q_W}. \quad (12)$$

Здесь имеем $\lambda^2 > 0$ либо при $\sigma > \max \left\{ \frac{\alpha_U q_W}{\alpha_W q_U}; \frac{\alpha_W q_U}{\alpha_U q_W} \right\}$, либо при $\sigma < \min \left\{ \frac{\alpha_U q_W}{\alpha_W q_U}; \frac{\alpha_W q_U}{\alpha_U q_W} \right\}$, что является условием существования векторного солитона в рамках (2)–(3). В противном случае, при $\min \left\{ \frac{\alpha_U q_W}{\alpha_W q_U}; \frac{\alpha_W q_U}{\alpha_U q_W} \right\} < \sigma < \max \left\{ \frac{\alpha_U q_W}{\alpha_W q_U}; \frac{\alpha_W q_U}{\alpha_U q_W} \right\}$, имеет место условие $\lambda^2 < 0$, а система (2)–(3) не имеет двухкомпонентного солитонного решения. С другой стороны, при $\alpha_U q_W = \alpha_W q_U$ это условие принимает вид $(\lambda^2 - 1)(1 - \sigma) = 0$, совпадающий с условием существования солитона Манакова.

Так же из (11), имеем: $\Omega_W = \Omega_U \frac{q_W}{q_U} + \frac{q_W}{2}(K_W^2 - K_U^2)$.

Итого, при учете (11) система (9)–(10) преобразуется к уравнению

$$\frac{\partial^2 A_U}{\partial \eta^2} + \frac{q_U K_U^2 - 2\Omega_U}{q_U} A_U + 2 \frac{\alpha_U}{q_U} (1 + \lambda^2 \sigma) A_U^3 = 0.$$

Из последнего уравнения для локализованных пакетов A_U ; $\frac{\partial A_U}{\partial \eta} \Big|_{\eta \rightarrow \pm \infty} = 0$, при $\frac{\alpha_U}{q_U} > 0$, также учитывая $A_W = \lambda A_U$, (8) и (11), получим решение в виде векторного солитона системы уравнений (2) и (3):

$$U = \frac{A_0}{\cosh \left(A_0 (\xi - Vt) \sqrt{\frac{\alpha_U}{q_U} (1 + \lambda^2 \sigma)} \right)} \times \quad (13)$$

$$\times \exp \left(i \left(\frac{(A_0)^2 \alpha_U (1 + \lambda^2 \sigma)}{2} + \frac{\delta^2 - V^2}{2q_U} \right) t + i \frac{V + \delta}{q_U} \xi \right),$$

$$W = \frac{\lambda A_0}{\cosh \left(A_0 (\xi - Vt) \sqrt{\frac{\alpha_W}{q_W} (\lambda^2 + \sigma)} \right)} \times \quad (14)$$

$$\times \exp \left(i \left(\frac{(A_0)^2 \alpha_W (\lambda^2 + \sigma)}{2} + \frac{\delta^2 - V^2}{2q_W} \right) t + i \frac{V - \delta}{q_W} \xi \right).$$

Здесь A_0 – максимальная амплитуда U – компоненты, V – скорость, одинаковая для обоих поляризационных компонент. При этом V и A_0 – свободные параметры решения.

В общем случае данное решение отличается от хорошо известного солитона Манакова (1). Но при $q_U = q_W = q$ и $\alpha_U = \alpha_W = \alpha$, $\delta = 0$ это решение (13), (14) полностью совпадает с солитоном Манакова (1).

Численный эксперимент. Проверка устойчивости векторного солитона. Для проверки корректности аналитического результата, в рамках системы (2)–(3) был проведен численный эксперимент. При начальных условиях, совпадающих с точным решением (13)–(14), векторный солитон движется без

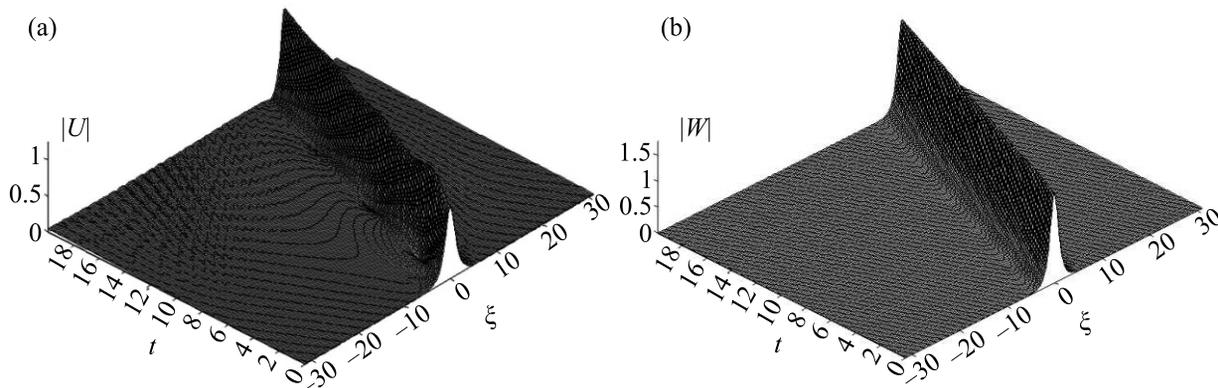


Рис. 1. Эволюция $|U|$ (a) и $|W|$ (b) к стационарному состоянию при малом возмущении ширины U -компоненты

каких-либо искажений. При малых отличиях начальных условий от точного решения (13)–(14), компоненты U и W волнового пакета после малых изменений своих параметров и формы эволюционируют к стационарному виду, описываемому (13)–(14). Например, на графиках рис. 1, показана эволюция такого возмущенного солитона при $\alpha_U = 1$, $\alpha_W = 1$, $q_U = 1$, $q_W = 2$, $\sigma = 0.2$, $\delta = 1$. Начальные условия при $t = 0$ заданы в виде $U = \frac{1}{\cosh(\xi)} \exp(i2\xi)$, $W = \frac{\sqrt{3}}{\cosh(\xi\sqrt{1.6})}$, что соответствует (13)–(14) с возмущенной по ширине U -компоненте при $A_0 = 1$, $V = 1$.

В результате эволюции этот возмущенный волновой пакет приходит к стационарному состоянию, в котором U и W компоненты описываются (13)–(14), двигаются с общей скоростью $V = 1$ и имеют отношение максимумов амплитуды ≈ 1.72 , что соответствует $\lambda^2 = 3$.

Результаты численного эксперимента подтверждают устойчивость найденного векторного солитона (13)–(14).

Заключение. В данной работе найден протяженный векторный солитон огибающей (13)–(14) при существенном различии частот поляризационных компонент. Для описания этого солитона в качестве модельного использовано связанное нелинейное уравнение Шредингера, учитывающее, в отличие от системы Манакова, различие реакции анизотропной среды на волновые поля разных поляризаций и разных частот. Найденный векторный солитон по своей структуре совпадает с солитоном Манакова (1), но отличается от него соотношением добавочных волновых чисел и частот поляризационных компонент. При отсутствии различия реакции анизотропной среды на волновые поля разных поляризаций найден-

ный векторный солитон (13)–(14) полностью совпадает с солитоном Манакова (1). Определены условия, как следствие (12), при которых существует найденный векторный солитон. В численном эксперименте проверена устойчивость этого решения. Исходный волновой пакет, совпадающий с точным аналитическим решением, остается стационарным. А при малом возмущении точного решения исходный волновой пакет эволюционирует к стационарному.

1. Y. Yang, *Solitons in Field Theory and Nonlinear Analysis*, Springer, N.Y. (2001).
2. L. A. Dickey, *Soliton Equation and Hamiltonian Systems*, World Scientific, N.Y. (2005).
3. Y. S. Kivshar and G. P. Agrawal, *Optical Solitons: From Fibers to Photonic Crystals*, Academic, San Diego (2003).
4. G. P. Agrawal, *Fiber Optic Communication Systems*, Wiley, N.Y. (2002).
5. V. E. Zakharov and A. B. Shabat, *Sov. Phys. JETP*, **34**, 62 (1972).
6. A. Hasegawa and F. Tappert, *Appl. Phys. Lett.* **23**, 142 (1973).
7. S. V. Manakov, *ZhETF* **65**, 505 (1973) [*Sov. Phys. JETP* **38**, 248 (1974)].
8. N. L. Tsitsas, N. Rompolis, I. Kourakis, P. G. Kevrekidis, and D. J. Frantzeskakis, *Phys. Rev. E* **79**, 037601 (2009).
9. C. R. Menyuk, *Opt. Lett.* **12**, 614 (1987).
10. C. R. Menyuk, *J. Opt. Soc. Amer. B Opt. Phys.* **5**, 392 (1988).
11. N. Lazarides and G. P. Tsironis, *Phys. Rev. E* **71**, 036614 (2005).
12. J. Yang, *Phys. Rev. E* **64**, 026607 (2001).