

# Генерация и применение широкополосных бифотонных полей (Миниобзор)

К. Г. Катамадзе<sup>+\*1)</sup>, А. В. Пащенко<sup>+</sup>, А. В. Романова<sup>+</sup>, С. П. Кулик<sup>+</sup>

<sup>+</sup> Центр квантовых технологий, физический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова, 119991 Москва, Россия

<sup>\*</sup> Физико-технологический институт им. К. А. Валиева РАН, 117218 Москва, Россия

Поступила в редакцию 19 апреля 2022 г.

После переработки 20 апреля 2022 г.

Принята к публикации 20 апреля 2022 г.

Бифотонные поля, получаемые в процессе спонтанного параметрического рассеяния света, являются одним из основных инструментов современной квантовой оптики. При этом ключевую роль играют временные корреляции между фотонами пары, которые проявляются тем сильнее, чем шире спектр бифотонного поля. В настоящей статье представлено развернутое описание широкополосных бифотонных полей и их ключевых характеристик, перечислены их возможные применения и изложены основные методы их генерации.

DOI: 10.31857/S1234567822100044, EDN: dylvdx

**1. Введение.** Одной из ключевых проблем квантовой оптики является задача приготовления неклассических полей с заданными параметрами. В большинстве случаев требуются фокковские [1] состояния света с заданным числом фотонов, причем чаще всего это число не превышает двух. Таким образом, наиболее востребованными с фундаментальной и прикладной точек зрения квантовыми состояниями света являются одно- и бифотонные поля, при этом одним из распространенных типов источников однофотонных состояний является источник бифотонного света, в котором второй фотон играет роль триггера [2, 3].

Кроме того, бифотонное поле является простейшей квантово-оптической системой, способной продемонстрировать явление перепутанности, т.е. непредставимости волновой функции многокомпонентной системы в виде произведения волновых функций ее компонент.

Состояние бифотонного поля (или бифотонов) характеризуется поляризационными, пространственными и частотно-временными параметрами [4]. Управление поляризационными состояниями на сегодняшний день не представляет практической сложности [5–9], однако поляризационный базис однофотонного состояния состоит лишь из двух элементов, что существенно ограничивает его применение для многих задач. В то же время частотный и угловой базисы принципиально не ограничены,

поэтому управление частотно-угловым спектром бифотонного поля имеет неизмеримо больший потенциал для практических применений.

Чаще всего бифотоны получают в процессе спонтанного параметрического рассеяния (СПР) [10]. Феноменологически СПР описывается как спонтанный распад фотонов накачки в среде с квадратичной диэлектрической восприимчивостью  $\chi^{(2)}$  на пару фотонов. Один из фотонов этой пары традиционно называют сигнальным (signal), а второй — холостым (idler) [11].

Закон сохранения энергии требует равенства частот  $\omega_p = \omega_s + \omega_i$ , а закон сохранения поперечной компоненты импульса (в случае, когда поперечные размеры нелинейной среды больше поперечного размера луча накачки) — равенства для поперечных компонент волновых векторов  $\mathbf{q}_p = \mathbf{q}_s + \mathbf{q}_i$ . Здесь и далее индекс  $p$  соответствует излучению накачки,  $s$  — сигнальному фотону, а  $i$  — холостому. При этом расстройка продольной компоненты волнового вектора может быть отлична от нуля:  $\Delta\mathbf{k} = \mathbf{k}_p - \mathbf{k}_s - \mathbf{k}_i$ . Условие  $\Delta\mathbf{k} = 0$  называют условием фазового синхронизма. Параметрическое рассеяние происходит наиболее эффективно в направлении, определяемом этим условием. В случае конечной длины нелинейной среды  $L$  достаточно потребовать выполнения условия фазового синхронизма с точностью порядка  $1/L$  [12].

В коллинеарном режиме СПР (когда волновые вектора накачки, сигнальной и холостой волн сонаправлены), условие фазового синхронизма можно записать в следующем виде:

<sup>1)</sup>e-mail: kgk@quantum.msu.ru

$$\Delta k = k_s + k_i - k_p \simeq 0. \quad (1)$$

Перейдя к показателям преломления  $n(\omega)$ , получим

$$\omega_s n(\omega_s) + \omega_i n(\omega_i) - \omega_p n(\omega_p) \simeq 0, \quad (2)$$

а для вырожденного режима, т.е. для  $\omega_s = \omega_i = \omega_p/2 = \omega$ :

$$\omega n_s(\omega) + \omega n_i(\omega) - 2\omega n_p(\omega) \simeq 0. \quad (3)$$

В общем случае это равенство не может быть выполнено из-за наличия дисперсии в среде. Чтобы ее скомпенсировать, используют среды, обладающие двулучепреломлением.

Так, в одноосном отрицательном кристалле<sup>2)</sup> существуют два типа коллинеарного синхронизма:

$$\begin{aligned} n_e(2\omega) &= n_o(\omega), \\ n_e(2\omega) &= [n_o(\omega) + n_e(\omega)]/2. \end{aligned} \quad (4)$$

Первое равенство здесь отвечает синхронизму типа I, а второе — синхронизму типа II (рис. 1).

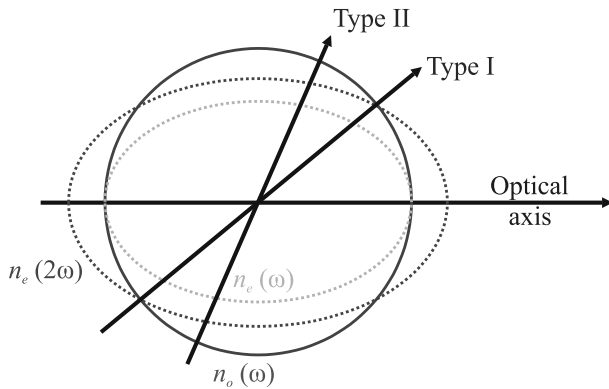


Рис. 1. (Цветной онлайн) Коллинеарный вырожденный синхронизм типа I и II. Стрелками обозначены оптическая ось и направления синхронизмов,  $n_e$  — проекция эллипсоида постоянного показателя преломления необыкновенной волны, а  $n_o$  — обыкновенной

Подбирая параметры нелинейной среды и накачки, в процессе СПР можно генерировать бифотонное поле в широком диапазоне от рентгеновского [13] до терагерцового [14–16]. В настоящей работе мы ограничимся рассмотрением бифотонных полей в видимом и ближнем ИК-диапазоне и сконцентрируемся на случаях, когда ширина спектра каждого из фотонов пары максимальна, в то время как спектральные корреляции между фотонами пары сохраняются.

<sup>2)</sup>То есть в кристалле, имеющем одну ось анизотропии показателя преломления, причем фазовая скорость необыкновенной волны ( $e$ ) больше фазовой скорости обыкновенной волны ( $o$ ).

С учетом спектрального разложения состояние бифотонного поля в фиксированных поляризационных и пространственных модах имеет вид [17, 18]:

$$|\Psi\rangle = \sqrt{1 - \zeta^2} |\text{vac}\rangle + \zeta |\psi\rangle, \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \int d\omega_s d\omega_i d^2\mathbf{q}_s d^2\mathbf{q}_i \times \\ &\times F(\omega_s, \omega_i, \mathbf{q}_s, \mathbf{q}_i) a_s^\dagger(\omega_s, \mathbf{q}_s) a_i^\dagger(\omega_i, \mathbf{q}_i) |\text{vac}\rangle. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь  $a_{s,i}^\dagger(\omega_{s,i}, \mathbf{q}_{s,i})$  — операторы рождения фотонов в сигнальной и холостой модах с частотами  $\omega_{s,i}$  и поперечными компонентами волновых векторов  $\mathbf{q}_{s,i}$  соответственно, а параметр  $\zeta \ll 1$  связан с величиной поля накачки и с эффективностью нелинейного процесса. Комплексная функция  $F(\omega_s, \omega_i, \mathbf{q}_s, \mathbf{q}_i)$  называется спектральной амплитудой бифотонного поля и определяет его частотно-угловой спектр. В общем виде она записывается как [18]:

$$F(\omega_s, \omega_i, \mathbf{q}_s, \mathbf{q}_i) \propto \sqrt{\omega_s \omega_i} E_p \int_{-L/2}^{L/2} dz \chi^{(2)}(z) e^{i\Delta k z}, \quad (7)$$

где  $E_p(\omega_p = \omega_s + \omega_i, \mathbf{q}_p = \mathbf{q}_s + \mathbf{q}_i)$  — частотно-угловой спектр поля накачки,  $\Delta k(\omega_s, \omega_i, \mathbf{q}_s, \mathbf{q}_i, z)$  — продольная фазовая расстройка,  $L$  — длина нелинейной среды вдоль  $z$ , а  $c$  — скорость света в вакууме. В случае пространственно однородного нелинейного кристалла интеграл в (7) легко берется аналитически:

$$F(\omega_s, \omega_i, \mathbf{q}_s, \mathbf{q}_i) \propto \sqrt{\omega_s \omega_i} E_p L \chi^{(2)} \text{sinc}(\Delta k L/2). \quad (8)$$

Квадрат модуля спектральной амплитуды бифотонного поля определяет плотность распределения вероятности фотонов по частотно-угловым модам. Как правило, частотные и пространственные степени свободы рассматриваются по отдельности. Тогда распределение вероятности по частотам имеет вид

$$P(\omega_s, \omega_i) = |F(\omega_s, \omega_i, \mathbf{q}_s = \text{const}, \mathbf{q}_i = \text{const})|^2, \quad (9)$$

а все остальные степени свободы полагаются фиксированными.

В дальнейшем под шириной спектра бифотонного поля  $\Delta\omega_s$  мы будем понимать ширину безусловного распределения

$$p_\Delta(\omega_s) = \int d\omega_i P(\omega_s, \omega_i). \quad (10)$$

Широкополосные бифотонные поля обладают высокой степенью перепутывания и малым временем когерентности, что делает их востребованными в различных информационных и метрологических приложениях. Поэтому настоящая работа построена

следующим образом. В разделе 2 описана связь спектральных параметров бифотонного поля с различными мерами перепутанности. В разделе 3 рассматривается связь спектральной амплитуды бифотонов с его корреляционными свойствами. В разделе 4 описаны прикладные задачи, в которых требуются бифотонные поля с широким спектром. Раздел 5 посвящен различным методам приготовления широкополосных бифотонов.

**2. Ширина спектра бифотонного поля и степень перепутанности.** В задачах квантовой информатики, в особенности в квантовых вычислениях, степень перепутанности квантовой системы часто является одним из основных ресурсов.

Для определения степени перепутанности системы, состоящей из двух подсистем с размерностями  $d_1 \leq d_2$ , используется разложение Шмидта [19]. Можно показать [20], что любое чистое состояние такой системы представимо в виде

$$|\Psi\rangle = \sum_{i=1}^k \lambda_i |\psi_i^{(A)}\rangle |\psi_i^{(B)}\rangle, \quad (11)$$

где  $\lambda_i$  – положительные действительные коэффициенты, соответствующие ненулевым сингулярным числам, так что  $\sum_i \lambda_i^2 = 1$ . Величину  $k \leq d_1$  – количество отличных от нуля слагаемых – называют рангом (иногда числом [20, 21]) Шмидта.

Для количественного определения степени перепутанности часто применяется эффективное число Шмидта [22]:

$$K = \frac{1}{\sum_i \lambda_i^4}. \quad (12)$$

Поскольку число Шмидта не может быть непосредственно измерено в эксперименте, для процессов двухчастичного распада и, в том числе, СПР было показано [23–26], что число Шмидта связано с шириной условных и безусловных распределений.

В том случае, когда накачкой служит фурьеограниченное узкополосное нефокусированное лазерное излучение, распределение имеет вид, схематично представленный на рис. 2а. Распределение имеет форму эллипса, вытянутого вдоль направления  $\omega_s + \omega_i = \text{const}$ . Толщина же этого эллипса определяется шириной частотного распределения накачки<sup>3)</sup>.

<sup>3)</sup>В случае широкополосной импульсной накачки форма распределения  $p_\omega$  может отличаться от приведенной на рис. 2а. Распределения могут принимать форму окружностей или эллипсов с большой полуосью, расположенной в направлении  $\omega_s = \omega_i$  [27–32]. Рассмотрение таких случаев, однако, выходит за рамки данной работы.

Степень перепутанности для таких состояний можно характеризовать отношением большой полуоси эллипса к малой, или, что то же самое, отношением

$$R = \frac{\Delta\omega}{\delta\omega}, \quad (13)$$

где  $\delta\omega$  – ширина условного распределения

$$p_\delta(\omega_s) = P(\omega_s, \omega_i = \text{const}). \quad (14)$$

Данное соотношение получило название параметра Федорова. Этот параметр имеет операциональный смысл: его значение можно легко измерить в эксперименте. В работах [23–26] показано, что отношение  $R$  примерно равно эффективному числу Шмидта  $K$ , причем как для характеристики перепутанности бифотонов по частотам, так и по поперечным компонентам волновых векторов. Таким образом, при заданном излучении накачки степень перепутанности определяется только шириной безусловного распределения  $p_\Delta(\omega_s)$ .

Из приведенных соображений следует, что при использовании узкополосной накачки увеличение ширины частотного спектра бифотонного поля ведет к увеличению степени перепутанности сигнальной и холостой мод по частоте.

### 3. Связь спектральных и корреляционных свойств бифотонного поля.

#### 3.1. Корреляционная функция второго порядка.

Во многих задачах, где используют двухфотонный свет, важную роль играют его корреляционные свойства. Поэтому в данном разделе будет описана связь между спектральными и корреляционными характеристиками бифотонного поля.

Пусть  $a^\dagger(t, \mathbf{r})$  и  $a(t, \mathbf{r})$  – операторы рождения и уничтожения фотона в момент времени  $t$  в точке  $\mathbf{r}$ . Фурье-преобразование ( $\omega \rightarrow t$ ,  $\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{r}$ ) операторов уничтожения запишется как

$$a(t, \mathbf{r}) = \int d\omega d^2\mathbf{q} a(\omega, \mathbf{q}) \exp[-i(\omega t + \mathbf{q}\mathbf{r})], \quad (15)$$

а коммутационные соотношения [18] – как

$$[a^\dagger(t_1, \mathbf{r}_1), a(t_2, \mathbf{r}_2)] = \delta(t_1 - t_2) \delta^{(2)}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2). \quad (16)$$

Тогда выражение (16) запишется как

$$|\psi\rangle = \int dt_s dt_i d^2\mathbf{q}_s d^2\mathbf{q}_i \times \\ \times \tilde{F}(t_s, t_i, \mathbf{r}_s, \mathbf{r}_i) a_s^\dagger(t_s, \mathbf{q}_s) a_i^\dagger(t_i, \mathbf{q}_i) |\text{vac}\rangle, \quad (17)$$

где

$$\tilde{F}(t_s, t_i, \mathbf{r}_s, \mathbf{r}_i) = \int dt_s dt_i d^2\mathbf{q}_s d^2\mathbf{q}_i F(\omega_s, \omega_i, \mathbf{q}_s, \mathbf{q}_i) \times \\ \times \exp[-i(\omega_s t_s + \omega_i t_i + \mathbf{q}_s \mathbf{r}_s + \mathbf{q}_i \mathbf{r}_i)]. \quad (18)$$

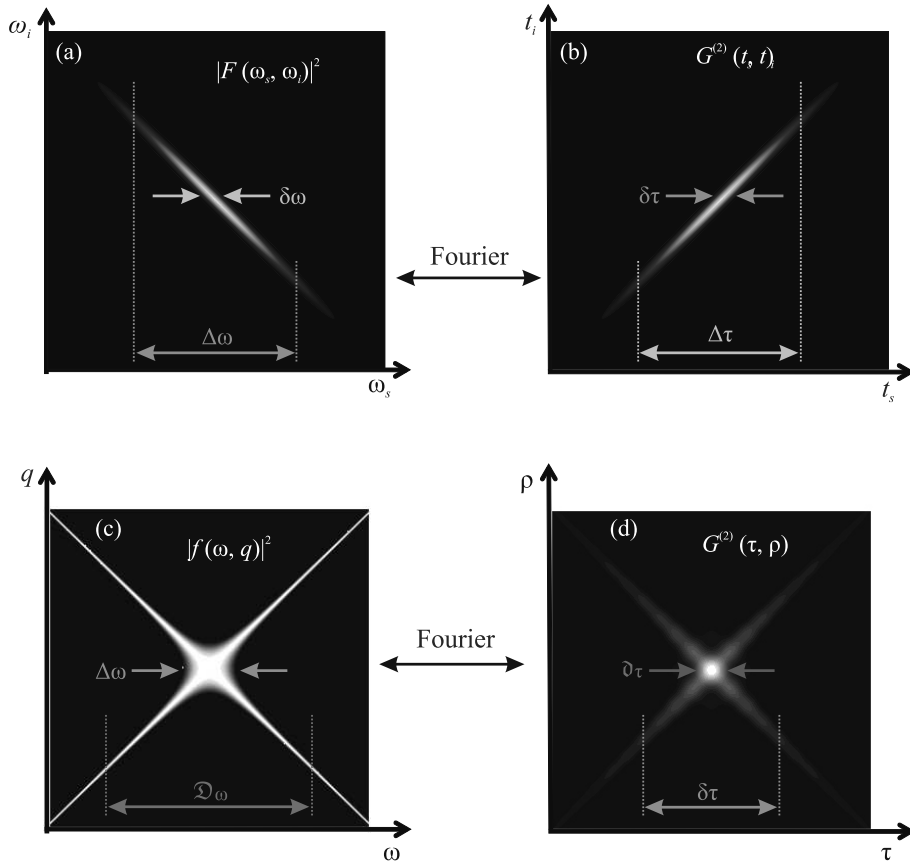


Рис. 2. (Цветной онлайн) Связь спектральных и корреляционных характеристик бифотонного поля. (а) – Двухчастотное распределение фотонов  $|F(\omega_s, \omega_i)|^2$ , ширина маргинального распределения  $\Delta\omega$  и ширина условного распределения  $\delta\omega$ . (б) – Двухфотонная временная корреляционная функция второго порядка  $G^{(2)}(t_s, t_i)$ , время корреляции между фотонами пары  $\delta\tau \sim 1/\Delta\omega$  и общая длительность двухфотонного волнового пакета  $\Delta\tau \sim 1/\delta\omega$ . (с) – Распределение каждого из фотонов пары по частоте и поперечной компоненте волнового вектора  $|f(\omega, q)|$ , ширина спектра в коллинеарном режиме  $\Delta\omega$ , интегральная ширина спектра во всем угловом диапазоне  $\mathcal{Q}\omega$ . (д) – Корреляционная функция второго порядка  $G^{(2)}$  в зависимости от задержки между фотонами  $\tau$  и расстоянием между ними в ближней зоне  $\rho$ , время корреляции без пространственной фильтрации  $\delta\tau \sim 1/\Delta\omega$ , и при выделении фотонов, пришедших в одну точку  $\delta\tau \sim 1/\mathcal{Q}\omega$

Пространственно-временная корреляционная функция (КФ) второго порядка [33] задается как

$$G^{(2)}(t_s, t_i, \mathbf{r}_s, \mathbf{r}_i) \equiv \langle a^\dagger(t_s, \mathbf{r}_s) a^\dagger(t_i, \mathbf{r}_i) a(t_s, \mathbf{r}_s) a(t_i, \mathbf{r}_i) \rangle \quad (19)$$

Тогда, подставляя (15)–(17) в (19), получаем

$$G^{(2)}(t_s, t_i, \mathbf{r}_s, \mathbf{r}_i) = \left| \tilde{F}(t_s, t_i, \mathbf{r}_s, \mathbf{r}_i) \right|^2, \quad (20)$$

т.е. пространственно-частотная КФ второго порядка является квадратом модуля шестимерного Фурье-образа спектральной амплитуды бифотонного поля.

Рассмотрим схематичные изображения  $|F(\omega_s, \omega_i, q_s = \text{const}, q_i = \text{const})|^2$  и  $G^{(2)}(t_s, t_i, \mathbf{r}_s = \text{const}, \mathbf{r}_i = \text{const})$  на рис. 2а, б. Видно, что распределение  $|F(\omega_s, \omega_i)|^2$  вытянуто вдоль направления  $\omega_s - \omega_i = \text{const}$  (т.е. демонстрирует

антикорреляции по частоте), тогда как распределение  $|F(t_s, t_i)|^2 \equiv G^{(2)}(t_s, t_i, \mathbf{r}_s = \text{const}, \mathbf{r}_i = \text{const})$  вытянуто вдоль направления  $t_s = t_i$  (т.е. демонстрирует корреляции по времени). При этом время корреляции  $\delta\tau$  обратно пропорционально ширине безусловного распределения по частоте  $\Delta\omega$ , в то время как ширина условного частотного распределения  $\delta\omega$ , связанная с шириной спектра накачки, определяет общую длину двухфотонного импульса  $\Delta\tau$ .

Рассмотрим случай плоской монохроматической волны накачки:

$$F(\omega_s, \omega_i, \mathbf{q}_s, \mathbf{q}_i) = \delta(\omega_s + \omega_i - \omega_p) \delta(\mathbf{q}_s + \mathbf{q}_i) f(\omega_s, \mathbf{q}_s), \quad (21)$$

где квадрат функции  $f(\omega_s, \mathbf{q}_s)$  отвечает распределению сигнального фотона и в общем случае определяется выражением

$$f(\omega_s, \mathbf{q}_s) \propto \sqrt{\omega_s(\omega_p - \omega_s)} \times \int_0^L dz \chi^{(2)}(z) e^{i\Delta k(\omega_s, \mathbf{q}_s, z)z}, \quad (22)$$

(см. рис. 2с). Видно, что интегральная ширина спектра бифотонного поля  $\mathcal{Q}\omega$  может покрывать весь диапазон частот от нуля до частоты накачки, но разным частотным компонентам отвечают разные компоненты поперечного волнового вектора, поэтому, если мы выделяем лишь излучение, распространяющееся коллинеарно с накачкой, то ширина его спектра  $\Delta\omega$  будет значительно меньше.

В случае монохроматической накачки ширина условных распределений  $\delta\omega$  и  $\delta q$  стремится к нулю, тогда, в свою очередь, ширина безусловных распределений  $\Delta t$  и  $\Delta r$  стремится к бесконечности. Подставляя (21) в (18), а затем в (20), получим, что  $G^{(2)}$  зависит лишь от разности координат  $\rho = \mathbf{r}_s - \mathbf{r}_i$  и разности времен  $\tau = t_s - t_i$  и представляет собой квадрат модуля трехмерного фурье-преобразования спектральной амплитуды  $f(\omega, \mathbf{q})$ :

$$G^{(2)}(\tau, \rho) = \left| \int d\omega d^2\mathbf{q} f(\omega, \mathbf{q}) \exp[-i(\omega\tau + \mathbf{q}\rho)] \right|^2. \quad (23)$$

Таким образом, если выделять лишь пары фотонов, пришедшие в одну точку, то время когерентности между ними  $\delta\tau$  будет обратно пропорционально интегральной ширине спектра  $\mathcal{Q}\omega$  [34], но такая фильтрация приведет к значительным потерям, и если регистрировать все пары фотонов, то их время корреляции  $\delta\tau$  будет обратно пропорционально ширине спектра в коллинеарном режиме  $\Delta\omega$ .

Корреляционную функцию второго порядка измеряют в экспериментах с интерферометром интенсивности (Хэнбери-Брауна-Твисса) [35]. В таком эксперименте можно измерить скорость счета совпадений  $R_{cc}(\tau) \sim G^{(2)}(\tau)$  в зависимости от времени задержки  $\tau$  между импульсами, идущими в схему совпадений (рис. 3а). В случаях, когда время корреляции  $\Delta^{(2)}\tau$  меньше ширины окна схемы совпадений,  $G^{(2)}(\tau)$  измеряют при помощи двухфотонных процессов, например, генерации суммарной частоты, вероятность которой также пропорциональна  $G^{(2)}(\tau)$  [36]. Процесс генерации суммарной частоты играет в этом случае роль прецизионной схемы совпадений (рис. 3б).

Заметим, что КФ второго порядка определяется не только модулем спектральной амплитуды бифотона, но и ее фазой, как следует из соотношения (23). Потому соотношение  $\delta\tau \sim 1/\Delta\omega$  определяет минимальное время корреляции, достижимое в случае, если зависимость фазы спектральной амплитуды от частоты мала (иными словами, спектр бифотонного поля Фурье ограничен). Таким образом, сам по себе широкий спектр бифотонов является необходимым, но не достаточным условием малости времени корреляции  $\delta\tau$ .

*3.2. Интерференция Хонга-Оу-Манделя.* Другое важное явление, в котором проявляются корреляционные свойства двухфотонных состояний, – “провал Манделя” [37].

Пусть сигнальный и холостой фотоны приходят на входы идеального светоделителя 50:50 (рис. 4). Причем в холостую моду вносится задержка по времени  $\tau_0$ . Тогда спектральная амплитуда поля запишется следующим образом:

$$F_{\text{НОМ}}(\omega_s, \omega_i) = F(\omega_s, \omega_i) e^{i\omega_i\tau_0}. \quad (24)$$

А состояние бифотонов станет

$$|\psi\rangle = \int d\omega_s d\omega_i \times F(\omega_s, \omega_i) a_s^\dagger(\omega_s) a_i^\dagger(\omega_i) e^{i\omega_i\tau_0} |\text{vac}\rangle. \quad (25)$$

После этого фотоны приходят на светоделитель, а затем измеряется скорость счета совпадений фотонов в его выходных модах. При измерении происходит проекция на состояние

$$|\psi_M(\omega_1, \omega_2)\rangle = a_1^\dagger(\omega_1) a_2^\dagger(\omega_2) |\text{vac}\rangle. \quad (26)$$

Учитывая связь входных и выходных мод светоделителя:

$$a_1 = \frac{a_s + a_i}{\sqrt{2}}, \quad a_2 = \frac{a_s - a_i}{\sqrt{2}}, \quad (27)$$

а также, что

$$\langle \text{vac} | a_2(\omega_2) a_1(\omega_1) a_s^\dagger(\omega_s) a_i^\dagger(\omega_i) | \text{vac} \rangle = \delta(\omega_s - \omega_2) \delta(\omega_i - \omega_1) \quad (28)$$

и

$$F(\omega_s, \omega_i) = F(\omega_i, \omega_s), \quad (29)$$

получим

$$\langle \psi_M | \psi \rangle \propto \frac{1}{2} [F(\omega_s, \omega_i) e^{i\omega_i\tau_0} - F(\omega_s, \omega_i) e^{i\omega_s\tau_0}] \times \delta(\omega_s - \omega_2) \delta(\omega_i - \omega_1). \quad (30)$$

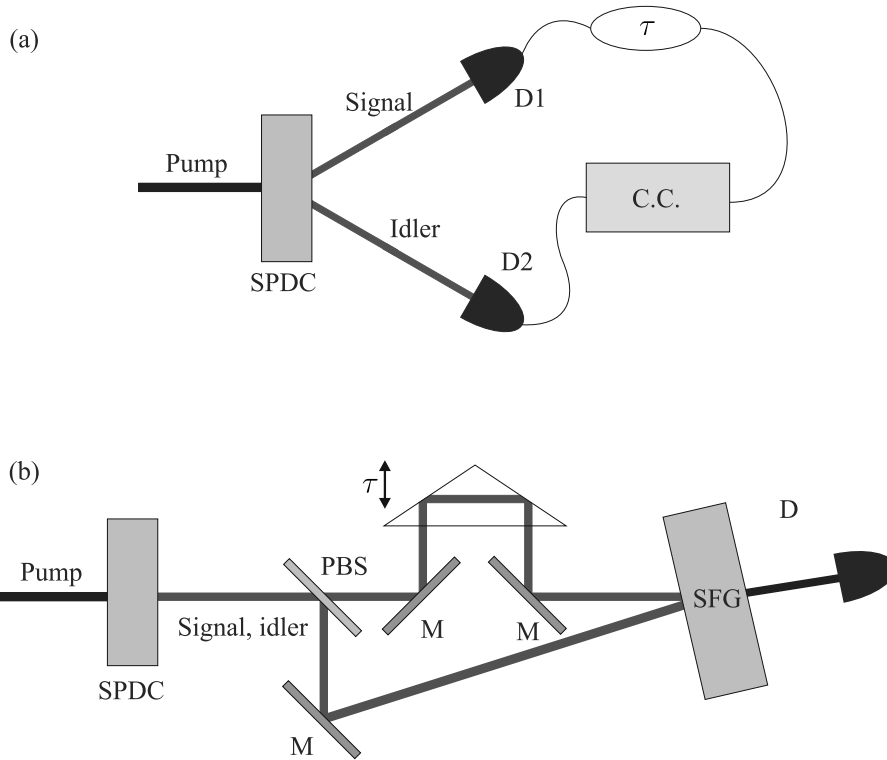


Рис. 3. (Цветной онлайн) Принципиальная схема измерения  $G^{(2)}(\tau)$ : (а) – при помощи интерферометра Хэнбри-Брауна-Твисса; (б) – при помощи генерации суммарной частоты

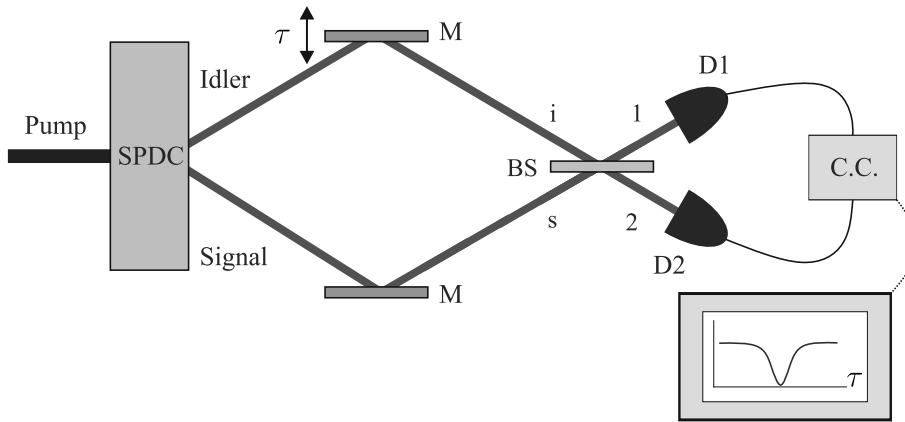


Рис. 4. (Цветной онлайн) Схема интерферометра Хонга-Оу-Манделя

Найдем выражение для скорости счета совпадений:

$$R_{cc} \propto \int d\omega_1 d\omega_2 |\langle \psi_M(\omega_1, \omega_2) | \psi \rangle|^2 \propto \int d\omega_1 d\omega_2 |F(\omega_1, \omega_2)|^2 |e^{i\omega_i \tau_0} - e^{i\omega_s \tau_0}|^2. \quad (31)$$

Если аппроксимировать спектральную амплитуду бифотонного поля бигaussianной функцией

$$F(\omega_1, \omega_2) = \sqrt{\frac{2}{\pi \delta \omega \Delta \omega}} \times \exp \left[ -\frac{(\omega_1 - \omega_2)^2}{2(\Delta \omega)^2} \right] \exp \left[ -\frac{(\omega_1 + \omega_2 - \omega_0)^2}{2(\delta \omega)^2} \right], \quad (32)$$

то  $R_{cc} \propto 1 - e^{-\frac{1}{4} \Delta \omega^2 \tau_0^2}.$  (33)

Как можно видеть, при нулевой задержке  $R_{cc}(\tau_0 = 0) = 0$  и наблюдается провал Манделя, причем его ширина также обратно пропорциональна

ширине спектра бифотонного поля  $\Delta\omega$ . Более того, поскольку выражение (31) по сути представляет собой фурье-образ квадрата модуля комплексной амплитуды  $|e^{i\omega_i\tau_0} - e^{i\omega_s\tau_0}|^2$ , то ширина провала не зависит от ее фазы в отличие от ширины КФ второго порядка.

**4. Применение широкополосных бифотонных полей.** В ряде приложений требуются бифотонные поля с узким спектром. Так, например, для уже упоминавшейся генерации однофотонных состояний [38–41] требуется, как правило, чтобы полученное состояние было чистым, что, в силу соотношения (13), означает совпадение ширины как частотного, так и углового спектра бифотонного поля с шириной частотного и углового спектров накачки. Кроме того, узкополосные бифотонные поля необходимы для эффективного взаимодействия с атомными системами, реализующими квантовую память [42, 43].

Существует, однако, множество задач, в которых решающее значение имеет большая ширина спектра двухфотонного поля. Их можно отнести к двум группам: квантово-информационной и квантово-метрологической.

**4.1. Задачи квантовой информатики.** Несмотря на то, что, как правило, в современных системах квантового распределения ключей (квантовой криптографии) применяются ослабленные когерентные состояния с малым средним числом фотонов в импульсе [44, 45], использование перепутанных состояний света является перспективным как с точки зрения защиты от атак (*device independent quantum key distribution* [46]), так и с точки зрения применения квантовых повторителей [47].

Принципиальным отличием таких протоколов выступает возможность использования перепутанности, являющейся ресурсом в квантовой криптографии [48–51]. В настоящий момент большая часть протоколов передачи квантовой информации основана на кодировании информации поляризованными или фазовыми квантовыми состояниями, что ограничивает размерность пространства двумя базисными векторами. Поэтому кодирование информации в частотных бинах, временных бинах и в модах Шмидта [52, 53] позволяет существенно расширить количество базисных состояний.

Также перспективным способом повышения скорости передачи информации является частотное мультиплексирование, требующее широкополосных бифотонных полей, поскольку вместе с шириной канала растет скорость (частота) передачи данных [54–57].

Помимо этого, квантово-оптические системы являются одной из перспективных платформ для реализации квантовых вычислений. Так, в недавней работе было продемонстрировано квантовое превосходство в задаче бозонного сэмпинга с использованием 100-канального линейного интерферометра [58]. Однако для создания универсального квантово-оптического вычислителя необходимы многомодовые системы с высокой степенью перепутанности (кластерные состояния) [59, 60], в частности, перепутанные состояния большого числа частотно-временных, полученные в процессе параметрического рассеяния [61, 62].

Помимо кластерной схемы квантовых оптических вычислений, интерес представляет также и стандартная гейтовая модель. В рамках этой концепции необходимо создать нелинейный вентиль, реализующий двухкубитные условные операции. На текущий момент эта проблема решается при помощи вероятностных гейтов, преобразующих заданное состояние с вероятностью  $p_{\text{KLM}} = 0.25$  [63]. И хотя вероятность успеха можно повышать путем применения дополнительных мод, такой способ оказывается очень требовательным к ресурсам. Однако для создания детерминистической системы квантовых вычислений необходимо эффективное двухфотонное взаимодействие света с веществом, чтобы на его основе сделать нелинейно-оптический квантовый вентиль, работающий с вероятностью  $p_{\text{NL}} \rightarrow 1$ . Поскольку эффективность такого взаимодействия определяется не только квадратичной восприимчивостью вещества  $\chi^{(2)}$ , но и КФ второго порядка  $G^{(2)}(\tau, \rho)$ , для ее увеличения требуется использование бифотонного поля с предельно малым радиусом и временем корреляции, а значит, с широким частотным и угловым спектром (20).

**4.2. Задачи квантовой метрологии.** Описанные в разделе 3 корреляционные свойства широкополосных бифотонов обуславливают ряд их метрологических применений.

Так, в протоколе дистанционной синхронизации часов [64–68], основанном на совпадении отсчетов фотодетекторов, находящихся в удаленных узлах, точность определяется шириной корреляционной функции второго порядка. Поэтому для увеличения временного разрешения следует использовать бифотонные поля с большой шириной спектра. Этот протокол устойчив к дисперсии в канале и не требует точного измерения расстояния между узлами и времени следования импульса.

Малое время корреляции второго порядка необходимо в задачах, требующих эффективного взаимо-

действия бифотонного света с веществом, например, в задаче двухфотонной микроскопии [69–71], двухфотонной спектроскопии [72–74] и квантовой интерферометрической оптической литографии [75, 76]. В случае малых времен корреляции  $\delta\tau$  бифотон ведет себя как единый объект, длина волны де Бройля которого вдвое меньше, что обеспечивает двукратный выигрыш в разрешении. Несмотря на то, что разрешение, которое можно получить таким образом (300–400 нм), в настоящее время далеко от рекордного и даже регулярно использующегося в современной микроэлектронной промышленности, в некоторых случаях этот метод может быть оправдан, например, при применении фоторезиста, не подходящего для облучения жестким ультрафиолетом.

Примечательным с точки зрения микроскопии применением широкополосных бифотонов является также метод квантовой оптической когерентной томографии (КОКТ) [77–81].

В классической оптической когерентной томографии (ОКТ) [82] исследуемый образец помещается в одно из плеч интерферометра Майкельсона, тогда как изменением длины второго плеча задается глубина сканирования. Аксиальное разрешение такого устройства определяется длиной когерентности направляемого в интерферометр излучения, которая обратно пропорциональна ширине спектра. Однако применение широкополосных зондирующих полей приводит к сильному влиянию дисперсии, которая значительно уширяет длину когерентности.

Однако используя свойства бифотонных полей, можно достичь некоторых преимуществ. Рассмотрим ту же схему, что и в разделе 3.2. Однако теперь в сигнальном плече реализуется дополнительная задержка посредством внесения в пучок слоя толщиной  $d$  с показателем преломления  $n(\omega) = n_0 + \alpha(\omega - \omega_0)$ , а в референсном – задержка  $\tau_0$  посредством движения зеркала. Тогда общая задержка будет равна

$$\tau = \tau_0 - n(\omega)\frac{d}{c} = \tau_0 - [n_0 + \alpha(\omega_i - \omega_0)]\frac{d}{c}, \quad (34)$$

и амплитуда бифотонного поля перед светоделителем примет вид

$$F_{\text{НОМ}}(\omega_s, \omega_i) = F(\omega_s, \omega_i) \times \exp\left[i\omega_i\left(\tau_0 - [n_0 + \alpha(\omega - \omega_0)]\frac{d}{c}\right)\right]. \quad (35)$$

В этом случае скорость счета совпадений будет определяться выражением

$$R_{cc} \propto 1 - \frac{2}{\sqrt{4 + \kappa}} \exp\left(-\frac{\Delta\omega^2(\tau_0 - dn_0/c)^2}{4 + \kappa}\right), \quad (36)$$

где  $\kappa = \alpha^2 \delta\omega^2 \Delta\omega^2 \frac{d^2}{c^2}$ . Если сравнить выражение (36) с (33), видно, что появляется дополнительная дисперсия, из-за которой провал уширяется и мельчает. Но при этом, если ширина спектра накачки  $\delta\omega \ll \ll \frac{c}{d\alpha\Delta\omega}$ , то дисперсия компенсируется [83]. Заметим, что компенсация дисперсии касается только нечетных ее порядков. Стоит также отметить, что для эффективной компенсации дисперсии важна малость отношения условного и безусловного распределений, что, как было указано выше, соответствует большой степени перепутанности.

Заметим, что хотя в вышеописанном эксперименте используется интерферометр Хонга–Оу–Манделя, компенсация дисперсии должна наблюдаться и при использовании интерферометра Майкельсона [84]. Это открывает возможности для использования в системах КОКТ источников, генерирующих бифотонное поле в коллинеарном режиме.

**5. Методы уширения спектра бифотонного поля.** Все описанные выше приложения предполагают сопряжение поля с различными интерферометрами и волноводами, а значит, для повышения эффективности бифотонное поле должно быть пространственно одномодовым. Хотя широкополосное бифотонное поле можно получить, собирая рассеянное излучение в большом угловом диапазоне (рис. 2с), для практического применения из этого поля нужно будет, тем не менее, выделить одну пространственную моду.

Ниже будут представлены методы увеличения ширины частотного спектра бифотонов. Ширина спектра далее будет характеризоваться в терминах ширины частотного диапазона  $\Delta\nu$ , так как она однозначно связана с временами корреляции первого и второго порядков. Кроме того, ширина спектра, выраженная в длинах волн  $\Delta\lambda$ , зависит от центральной длины волны  $\lambda_0$ , что затрудняет сравнение между собой ширин бифотонных спектров, полученных в разных спектральных диапазонах.

Приведем для сравнения типичные ширины спектра бифотонного света, получаемого в экспериментах с кристаллом бета-бората бария (ВВО) толщиной 1 мм:  $\Delta\nu_I \sim 40$  ТГц для синхронизма типа I и  $\Delta\nu_{II} \sim 1.8$  ТГц для синхронизма типа II.

Большинство методов генерации широкополосных бифотонных полей можно разделить на две группы: в основе одних лежит использование пространственно однородных нелинейных сред, а в основе других – неоднородных.

**5.1. Однородные среды.** Как видно из выражения (8), частотный спектр двухфотонного света ограничен в первую очередь распределением



$\text{sinc}^2 [\Delta k(\omega, \mathbf{q})L/2]$ , ширина которого, в свою очередь, определяется выражением

$$|\Delta k(\omega, \mathbf{q})| \lesssim \frac{2\pi}{L}. \quad (37)$$

Напомним, что  $\Delta k(\omega, \mathbf{q})$  – это фазовая расстройка, а  $L$  – длина нелинейной среды.

Из выражения (37) следует, что ширина спектра увеличивается с уменьшением длины нелинейной среды. Так, в работе [85] с использованием кристалла ниобата лития ( $\text{LiNbO}_3$ ) длиной  $L = 6$  мкм было получено поле с шириной спектра 150 ТГц (500 нм). В работе в силу экстремально маленькой толщины кристалла, ведущей к большой продольной расстройке, была реализована схема без фазового синхронизма (так называемый синхронизм типа 0).

Однако из выражения (8) видно также, что спектральная интенсивность бифотонов пропорциональна  $L^2$ , а интегральная –  $L$  [11]. Существуют способы компенсации падения интенсивности генерации, связанные, например, с жесткой фокусировкой накачки и использованием оптической системы с большой числовой апертурой, чтобы собирать излучение СПР под большими углами [86, 85]. Также можно разместить тонкий кристалл внутри лазерного резонатора, что позволило в работах [87, 88] с использованием кристалла ВВО толщиной 0.1 мм, вырезанного под коллинеарный синхронизм типа I, получить бифотоны со спектром шириной 55 ТГц в неколлинеарном режиме со скоростью счета совпадений  $1883 \pm 2$  Гц/Вт, что почти в 40 раз превышает скорость счета в схеме без резонатора.

Существует другая группа методов генерации широкополосных бифотонов, основанных на таком подборе условий синхронизма, чтобы зависимость  $\Delta k(\omega_s)$  в некоторой области вблизи точного синхронизма  $\Delta k(\omega_{s0}) = 0$  была слабой. Найти эти условия нам будет удобно в терминах отстройки от точного синхронизма:

$$\begin{aligned} \Delta k(\Omega) &= k_p - k_s(\omega_{s0} + \Omega) - k_i(\omega_{i0} - \Omega) = \\ &= k_p - k_{s0}(\Omega) - k_{i0}(-\Omega), \end{aligned} \quad (38)$$

где  $k_{s0, i0}(\Omega) = k_{s0, i0}(\omega_{s0, i0} + \Omega)$ . Раскладывая  $\Delta k(\Omega)$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $\Omega = 0$ , получим:

$$\Delta k(\Omega) = [k_p - k_{s0} - k_{i0}] - [k'_{s0} - k'_{i0}]\Omega - \frac{1}{2}[k''_{s0} + k''_{i0}]\Omega^2 - \dots \quad (39)$$

Как видно из разложения, для обеспечения широко-

полосного синхронизма необходимо выполнить условия:

$$k_p - k_{s0} - k_{i0} \equiv 0, \quad (39.0)$$

$$k'_{s0} - k'_{i0} = 0, \quad (39.1)$$

$$k''_{s0} + k''_{i0} = 0, \dots \quad (39.2)$$

Здесь условие (39.0) означает равенство нулю фазовой расстройки для центральных частот  $\omega_{s0, i0}$  и выполняется по определению, условие (39.1) – равенство групповых скоростей сигнального и холостого фотонов, а условие (39.2) отвечает нулевой дисперсии групповых скоростей.

В вырожденном режиме генерации при синхронизме типа I, сигнальный и холостой фотоны неразличимы, поэтому  $k_{s0} \equiv k_{i0}$ , и (39.1), как и все прочие нечетные члены ряда Тейлора, также выполняется автоматически. Тогда  $\Delta k_I \sim \Omega^2$ , а в случае выполнения и (39.2) фазовая расстройка  $\Delta k_I \propto \Omega^4$ . В невырожденном режиме или при синхронизме типа II в общем случае  $\Delta k_{II} \propto \Omega$ , а при выполнении (39.1) расстройка становится  $\Delta k_{II} \propto \Omega^2$ .

Подбор условий, при которых выполняются соотношения (39), является нетривиальной (хотя и выполнимой) задачей. Так, в работе [89] рассчитано, что в коллинеарном вырожденном режиме с синхронизмом типа I для кристалла ВВО толщиной 14 мм и накачки на длине волны 728 нм ширина спектра составит 106 ТГц (750 нм).

Чаше для удовлетворения условиям (39) применяют периодически поляризованные кристаллы, у которых зависимость эффективной нелинейности  $\chi^{(2)}(z)$  имеет вид меандра с периодом  $\Lambda$ . Подставляя эту зависимость в интеграл (7) и раскладывая меандр в ряд Фурье, легко показать, что теперь условие фазового синхронизма может быть выполнено с точностью до целого числа  $m$  векторов обратной сверхрешетки  $\mathbf{k}_g$ :

$$\Delta \mathbf{k} = \mathbf{k}_p - \mathbf{k}_s - \mathbf{k}_i - m\mathbf{k}_g, \quad (40)$$

где  $k_g = 2\pi/\Lambda$ . Причем, чем меньше  $m$ , тем выше эффективность процесса, поскольку в разложении меандра в ряд Фурье коэффициенты падают с увеличением частоты. Таким образом, можно выбрать среду с нулевой дисперсией групповых скоростей и обеспечить выполнение соотношений (39.0–1), подбирая период  $\Lambda$ .

Так, в работе [90] в интегральном волноводе длиной 5 мм из периодически поляризованного ниобата лития были получены бифотоны со спектром шириной 100 ТГц (800 нм).

Еще один способ ослабления зависимости  $\Delta k(\Omega)$  требует использования диспергирующих элементов. При прохождении через систему из двух дифракционных решеток (или призм), между которыми расположена двулучепреломляющая среда, световой импульс преобразуется так же [91–93], как если бы он распространялся через среду с эффективной обратной групповой скоростью  $k''_{\text{eff}}(\omega)$  и ее дисперсией  $k''_{\text{eff}}(\omega)$ :

$$k'_{\text{eff}} = k' + \alpha\varphi, \quad k''_{\text{eff}} = k'' - \frac{\alpha^2}{k}, \quad \varphi = \text{tg } \theta, \quad \alpha = \text{tg } \rho/c, \quad (41)$$

где  $\rho$  – угол между волновым вектором и вектором Пойнтинга (угол сноса), а  $\theta$  – угол наклона волнового фронта, возникающий после первого диспергирующего элемента и компенсирующийся вторым. Таким образом, подбирая нужные диспергирующие элементы, можно добиться выполнения условий (39.0–2). Так в работе [94] в кристалле ВВО толщиной 2 мм в вырожденном режиме при синхронизме типа II было получено бифотонное поле со спектром шириной 44 ТГц, а для кристалла ВВО типа I численно рассчитанная при таких же условиях ширина спектра составила 197 ТГц. Однако вопрос о справедливости соотношений (41) для спектра шириной в сотни ТГц требует дальнейшего уточнения.

В случае неколлинеарного синхронизма появляется дополнительный способ управления локальной зависимостью расстройки  $\Delta k(\Omega)$  [95, 96]. Рассмотрим процесс спонтанного параметрического рассеяния монохроматической накачки, обладающей угловым распределением  $E_p(q_p)$  ширины  $\Delta q_p$ , в нелинейной среде. Условия фазового синхронизма (40) сводятся к условиям, накладываемым на поперечную  $\Delta k_{\perp}$  и продольную  $\Delta k_{\parallel}$  компоненты волновой расстройки:

$$\Delta \mathbf{k}_{\perp} = 0, \quad |\Delta \mathbf{k}_{\parallel}| \leq \frac{2\pi}{L}. \quad (42)$$

Полагая угловой спектр накачки узким

$$q_p \equiv k_{p\perp} = k_p \sin \theta_p \approx k_p \theta_p, \quad k_{p\parallel} = k_p \cos \theta_p \approx k_p, \quad (43)$$

можно представить  $\Delta k_{\perp}$  и  $\Delta k_{\parallel}$  в виде

$$\begin{aligned} \Delta k_{\perp} &= q_p + k_s \sin \theta_s - k_i \sin \theta_i, \\ \Delta k_{\parallel} &= k_p - k_s \cos \theta_s - k_i \cos \theta_i. \end{aligned} \quad (44)$$

Раскладывая  $\Delta k_{\perp}$  и  $\Delta k_{\parallel}$  в ряд Тейлора в окрестности  $\Omega = 0$ , аналогично (39), получим

$$\begin{aligned} \Delta k_{\perp}(\Omega) &= q_p + [k_{s0} \sin \theta_s - k_{i0} \sin \theta_i] + \\ &+ [k'_{s0} \sin \theta_s + k'_{i0} \sin \theta_i] \Omega + \\ &+ \frac{1}{2} [k''_{s0} \sin \theta_s - k''_{i0} \sin \theta_i] \Omega^2 + \dots \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} \Delta k_{\parallel}(\Omega) &= [k_p - k_{s0} \cos \theta_s - k_{i0} \cos \theta_i] - \\ &- [k'_{s0} \cos \theta_s - k'_{i0} \cos \theta_i] \Omega - \\ &- \frac{1}{2} [k''_{s0} \cos \theta_s + k''_{i0} \cos \theta_i] \Omega^2 + \dots \end{aligned} \quad (46)$$

Тогда при вырожденном синхронизме типа I, где сигнальный и холостой фотоны поляризованы обыкновенно, и  $k_{s0} = k_{i0} = k_0$ ,  $\theta_s = \theta_i = \theta_0$ , в режиме точного синхронизма

$$k_p - k_{s0} \cos \theta_s - k_{i0} \cos \theta_i = 0 \quad (47)$$

соотношения (45) и (46) будут иметь вид

$$\begin{aligned} \Delta k_{\perp} &= q_p + 2\Omega k'_0 \sin \theta_0 + \dots, \\ \Delta k_{\parallel} &= -2\Omega^2 k''_0 \cos \theta_0 + \dots \end{aligned} \quad (48)$$

Условие  $\Delta k_{\perp} = 0$  ограничивает ширину спектра:

$$\Omega \leq \frac{1}{2k'_0 \sin \theta_0} \Delta q_p, \quad (49)$$

так же, как и условие  $|\Delta k_{\parallel}| \leq 2\pi/L$ :

$$\Omega \leq \sqrt{\frac{2\pi}{Lk''_0 \cos \theta_0}}. \quad (50)$$

Таким образом, в сильно неколлинеарном режиме с большим углом синхронизма  $\theta_0$  и при жестко сфокусированной накачке можно получить значительно широкополосное бифотонное поле. Заметим, что выражение (45), учитывая, что  $\Delta \mathbf{k}_{\perp} = 0$ , ограничивает ширину спектра бифотонов, и ограничение это усиливается с ростом  $\theta_s$  и  $\theta_i$ .

Такой метод позволил в работе [96] для вырожденного синхронизма типа I на длине волны 812 нм в кристалле йодата лития ( $\text{LiIO}_3$ ) толщиной 1.5 мм и диаметре перетяжки накачки 2.6 мкм получить бифотонное поле со спектром шириной 67 ТГц (148 нм).

Уширить спектр бифотонного поля можно при помощи уширения не только углового, но и частотного спектра пучка накачки. Как и ранее, введем частотные расстройки  $\Omega_{p,s,i} = \omega_{p,s,i} - \omega_{p0,s0,i0}$ , при этом  $\omega_{p0} = \omega_{s0} + \omega_{i0}$  и  $\Omega_p = \Omega_s - \Omega_i$ . Аналогично (39) и (45)–(46), разложим  $\Delta k$  в ряд Тейлора по степеням  $\Omega_p, \Omega_s, \Omega_i$ :

$$\begin{aligned} \Delta k &= [k_{p0} - k_{s0} - k_{i0}]_0 + \\ &+ [k'_{p0} \Omega_p - k'_{s0} \Omega_s + k'_{i0} \Omega_i]_1 - \\ &- \frac{1}{2} [k''_{s0} \Omega_s^2 + k''_{i0} \Omega_i^2]_2 + \dots \end{aligned} \quad (51)$$

Здесь мы ограничились первым порядком по  $\Omega_p$ , полагая ширину спектра накачки много меньшей ширины спектра бифотонов. В случае синхронизма типа I выражение  $[k_{p0} - k_{s0} - k_{i0}]_0$  обращается в нуль, и выражение (51) упрощается:

$$\Delta k = (k'_{p0} - k'_0) \Omega_p - k''_{s0} [\Omega_s^2 - \Omega_p \Omega_s]_2 = 0. \quad (52)$$

Разрешая это квадратное уравнение относительно  $\Omega_s$ , можно получить [97, 98]

$$\Omega = \frac{\Omega_p}{2} \pm \sqrt{\gamma \Omega_p}, \text{ где } \gamma = \frac{k'_{p0} - k'_0}{k''_0}. \quad (53)$$

Коэффициент  $\gamma$  неотрицателен в случае нормальной дисперсии. Таким образом, для фиксированной ширины спектра накачки  $\Delta\Omega_p$  ширина бифотонного поля составит  $\Delta\Omega = \sqrt{\gamma \Delta\Omega_p}$ .

Хотя, как следует из выражения (13), с увеличением ширины спектра накачки будет уменьшаться степень перепутанности бифотонов по частоте, при некоторых условиях можно добиться того, что небольшое уширение частотного спектра накачки приведет к сильному уширению частотного спектра бифотонного поля и степень перепутанности все же будет увеличиваться.

Так, в работе [99] в кристалле йодата лития длиной 12 мм получен спектр одиночных отсчетов шириной 168 ТГц (396 нм) с центром 840 нм. Ширина спектра накачки составила 16 ТГц (9.5 нм).

Подчеркнем, что все описанные выше механизмы уширения спектра бифотонов связаны с ослаблением зависимости  $\Delta k(\Omega)$  в пространственно однородных нелинейных средах, что обеспечивает выполнение условий синхронизма в некотором спектральном диапазоне. Кроме уширения модуля спектральной амплитуды, локальное ослабление зависимости расстройки ослабляет еще и зависимость фазы спектральной амплитуды от частоты, что позволяет сузить и ширину КФ второго порядка.

Однако ширина получаемого таким образом спектра СПР ограничена сравнительно небольшими отстройками  $\Omega$  от центральной частоты, когда в разложении в ряд по  $\Omega$  можно ограничиться первыми членами. Кроме того, в случае синхронизма типа II или невырожденного режима эта группа методов работает плохо.

**5.2. Неоднородные среды.** Применение пространственно неоднородных (вдоль направления распространения накачки) структур позволяет замкнуть фазовый синхронизм для различных по частоте бифотонов в различных частях нелинейной среды. В итоге бифотонное поле, родившееся в разных частях кристалла, на выходе из него складывается, давая широкий спектр сложной (вследствие интерференции) формы. При этом зависимость фазы спектральной амплитуды от частоты может быть нетривиальной, в результате чего спектр не будет Фурьеограничен, и для уменьшения ширины КФ второго порядка придется использовать методы компрессии, речь о которых пойдет в разделе 5.3.

Самым простым способом неоднородного уширения спектра является генерация бифотонных пар в нескольких последовательно стоящих пространственно однородных нелинейных кристаллах, оптические оси которых наклонены под разными углами к вектору распространения пучка накачки. Так, в работе [100] при помощи двух кристаллов ВВО типа I толщиной 2 мм в слабо неколлинеарном режиме был получен спектр единичных отсчетов шириной 73 ТГц (160 нм).

Логическим развитием этого метода (несмотря на то, что хронологически он был реализован позже) является применение аперидически поляризованных кристаллов, период поляризации которых возрастает так, чтобы обеспечить линейный рост (чирп) вектора обратной сверхрешетки [101]:

$$k_g(z) = k_{g0} + \varkappa z, \quad (54)$$

тогда фазовая расстройка примет вид

$$\Delta k(\Omega, z) = k_p - k_{s0}(\Omega) - k_{i0}(-\Omega) - mk_g(z). \quad (55)$$

По мере увеличения волновой расстройки вместе с координатой  $z$  спектр бифотонов будет наполняться новыми частотами. Так, в работе [102] при варьировании параметра чирпа  $\varkappa$  в гребенчатом волноводе из стехиометрического танталата лития (PPSLT) длиной 10 мм для синхронизма типа 0 (когда оба фотона имеют ту же поляризацию, что и накачка) были получены поля со спектром от 6.7 ТГц (20 нм) при отсутствии чирпирования до 150 ТГц (340 нм) с центральной длиной волны 810 нм.

Реализовать условие (54) можно не только на этапе изготовления кристалла, но и создав линейную зависимость модуляции показателя преломления:

$$n_{p,s,i}(z) = n_{p,s,i}^{(0)} + \eta_{p,s,i} z. \quad (56)$$

В вырожденном режиме при синхронизме типа I  $\eta_s = \eta_i = \eta$ , и фазовая расстройка  $\Delta k$  приобретет следующий вид:

$$\Delta k = \Delta k^{(0)} + \frac{\omega_p}{c} (\eta_p - \eta) z. \quad (57)$$

Линейной модуляции показателя преломления (56) можно добиться путем неоднородного нагрева (охлаждения) кристалла. Таким способом в работе [103] в кристалле дигидрофосфата калия (KDP) длиной 20 мм было получено бифотонное поле со спектром шириной до 154 ТГц с центральной длиной волны 702 нм.

Также условие (56) можно выполнить, используя электрооптический эффект. В работе [104] на верхнюю и нижнюю поверхности кристалла KDP длиной 30 мм наносились пары электродов, к которым

прикладывалось постоянное напряжение до 15 кВ. В результате электростатическое поле внутри кристалла можно было изменять в диапазоне от  $-30$  до  $30$  кВ/см, что позволило получить бифотоны со спектром шириной до 69 ТГц.

Также широкополосные бифотонные поля можно генерировать в кристаллах с нелинейным, например, гиперболическим, чирпом. В случае параметрической сверхлюминесценции, когда плотность рассеянных фотонов на моду становится больше единицы, такие среды позволяют получить Фурьеограниченные широкополосные поля с небольшим временем корреляции второго порядка даже без применения методов компрессии [105, 106].

*5.3. Методы компрессии.* В общем случае, генерация бифотонов в пространственно неоднородных средах приводит к Фурье-неограниченной спектральной амплитуде, и для получения узкой КФ второго порядка необходимо использовать методы компрессии. Рассмотрим излучение СПР в нелинейной среде длины  $L$  с линейной зависимостью расстройки фазы от координаты  $z$ :

$$\Delta k(\Omega, z) = D\Omega + \alpha z. \quad (58)$$

Такой вид фазовой расстройки характерен для линейно чирпированных апериодически поляризованных нелинейных сред, где  $D \equiv k'_s - k'_i$  (в случае невырожденного синхронизма), а вторые производные  $k''_{s,i}(\Omega)$  малы. Фаза амплитуды бифотонов  $\varphi \equiv \arg[f(\Omega)]$  тогда имеет вид [107, 108]

$$\varphi(\Omega) = -\underbrace{\frac{DL}{2}}_{c_1} \Omega + \underbrace{\frac{D^2}{4\alpha}}_{c_2} \Omega^2. \quad (59)$$

Поскольку КФ второго порядка связана с функцией  $f(\Omega)$  преобразованием Фурье (20), на ее ширину влияет лишь коэффициент  $c_2$ . Чтобы скомпенсировать фазовый набег, можно использовать различные методы.

В основе одного из них лежит прохождение бифотонов через диспергирующую среду. Пусть дисперсионная зависимость среды

$$\begin{aligned} \tilde{k} &= \tilde{k}(\omega_{s0} + \Omega) = \underbrace{\tilde{k}(\omega_{s0})}_{\tilde{k}_{s0}} + \underbrace{\tilde{k}'(\omega_{s0})}_{\tilde{k}'_s} \Omega + \frac{1}{2} \underbrace{\tilde{k}''(\omega_{s0})}_{\tilde{k}''_s} \Omega^2 = \\ &= \tilde{k}(\omega_{i0} - \Omega) = \underbrace{\tilde{k}(\omega_{i0})}_{\tilde{k}_{i0}} - \underbrace{\tilde{k}'(\omega_{i0})}_{\tilde{k}'_i} \Omega + \frac{1}{2} \underbrace{\tilde{k}''(\omega_{i0})}_{\tilde{k}''_i} \Omega^2, \end{aligned} \quad (60)$$

тогда набег фазы бифотонного поля в среде длиной  $\tilde{L}$  определяется выражением

$$\tilde{\varphi}(\Omega) = \left[ \tilde{k}(\omega_{s0} + \Omega) + \tilde{k}(\omega_{i0} - \Omega) \right] \tilde{L} = \tilde{c}_0 + \tilde{c}_1 \Omega + \tilde{c}_2 \Omega^2, \quad (61)$$

где коэффициент  $\tilde{c}_2 = (\tilde{k}''_s + \tilde{k}''_i) \tilde{L} / 2$ . Условием компенсации дисперсии будет  $c_2 + \tilde{c}_2 = 0$  или

$$\frac{D^2}{4\alpha} = -(\tilde{k}''_s + \tilde{k}''_i) \tilde{L} / 2. \quad (62)$$

Таким образом, для любого отрицательного коэффициента  $\alpha$  можно использовать среду соответствующей длины с нормальной дисперсией ( $k''_{s,i} > 0$ ) для временной компрессии бифотонов. Если  $\alpha$  положителен, для компрессии можно использовать среду с отрицательным эффективным значением дисперсии групповых скоростей  $k''$  [73].

В случае произвольной зависимости  $\Delta k(\Omega, z)$  необходимо иметь возможность изменять фазу  $\varphi(\Omega)$  разных частотных компонент независимо. Для этого необходимо использовать формирователь коротких импульсов, состоящий из двух дифракционных решеток и пространственного модулятора света [109, 110].

*5.4. Пространственное преобразование частотно-углового спектра.* Ранее мы отмечали, что полный спектр бифотонного поля изначально широкий (рис. 2с), но разным частотным компонентам соответствуют разные поперечные компоненты волнового вектора или углы. Если собирать излучение по всем углам, то можно добиться очень малого времени корреляции  $\delta\tau$  (рис. 2д). Так, авторы работы [34], увеличив ширину углового диапазона сбора параметрического рассеяния с  $0.79^\circ$  до  $6^\circ$ , смогли увеличить ширину спектра с  $\Delta\nu = 55$  до  $\Delta\nu = 162$  ТГц и соответственно уменьшить время корреляции с  $\delta\tau = 26$  до  $\delta\tau = 6$  фс.

Однако, как отмечалось в начале раздела 5, для практических приложений необходимо пространственно одномодовое широкополосное поле. Для этого можно преобразовать частотно-угловой спектр СПР таким образом, чтобы разные частотные компоненты оказались в одной угловой моде. В работе [111] частотно-угловой спектр  $f(\lambda, \theta)$  был преобразован с помощью дифракционной решетки (рис. 5). В результате был получен спектр  $f'(\lambda, \theta)$ , ширина которого в заданном угловом диапазоне составила  $\Delta\nu' \approx 100$  ТГц, в то время как изначальная ширина была равна  $\Delta\nu \approx 40$  ТГц.

*5.5. Источники бифотонного поля на основе четырехволнового смешения.* Для полноты приведенного обзора следует упомянуть об источниках би-

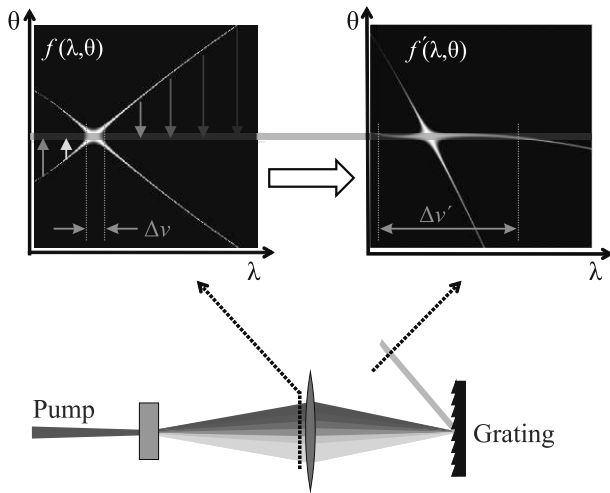


Рис. 5. (Цветной онлайн) Получение пространственно одномодового широкополосного бифотонного поля за счет модификации частотно-углового спектра с помощью дифракционной решетки [111]

фотонного поля, основанных на спонтанном четырехволновом смешении (СЧВС), нелинейном оптическом процессе, в котором пара фотонов накачки рассеивается в среде с кубической нелинейностью восприимчивости  $\chi^{(3)}$ , рождая новую пару фотонов.

Генерация бифотонных полей при помощи СЧВС происходит, как правило, в волоконном световоде, что позволяет достичь определенных преимуществ по сравнению со способами, предложенными выше. Излучение СЧВС, полученное в волокне, можно легко сопрягать с другими устройствами волоконной оптики, тогда так излучение СПР, полученное в кристалле, как правило, не является дифракционно ограниченным, вследствие чего заводится в одномодовое оптоволокно с большими потерями.

Преимущество СЧВС по сравнению с СПР состоит в том, что поскольку накачка и бифотоны имеют одинаковую центральную частоту, то условия синхронизма выполняются автоматически, а если подобрать нелинейную среду таким образом, чтобы в ней отсутствовала дисперсия групповых скоростей в соответствующем диапазоне частот, то можно добиться выполнения условий синхронизма в широком диапазоне [112]. Однако из-за малых значений кубической нелинейности для эффективной генерации необходимы более длинные среды, что накладывает более жесткие ограничения на выполнение условий синхронизма. Так в работах [113–118] были получены поля с шириной спектра 10–15 ТГц, что в 3–4 раза меньше ширины типичных спектров СПР в кристалле ВВО толщиной 1 мм.

Кроме того, стоит отметить, что применение данных методов на практике сопряжено с рядом проблем. СЧВС сложно детектировать в вырожденном режиме, поскольку излучение идет на частоте накачки. Кроме того, за счет нелинейности  $\chi^{(3)}$  наблюдается ряд побочных эффектов, сравнимых по интенсивности с СЧВС, самым сильным из которых является эффект комбинационного рассеяния.

**6. Заключение.** В настоящем миниобзоре рассмотрены основные свойства широкополосных бифотонных полей. Описана связь его спектральных характеристик со степенью перепутанности и с корреляционными характеристиками. В частности, показано, что с увеличением ширины спектра растет степень перепутанности и уменьшается время корреляции.

Рассмотрено применение этих свойств в ключевых приложениях бифотонных полей. В частности, показано, что широкополосные бифотоны обладают высокой информационной емкостью, а их малое время корреляции позволяет добиться высокого разрешения в различных метрологических задачах.

Наконец, рассмотрены основные методы приготовления широкополосных полей, основанные как на использовании пространственно однородных, так и пространственно неоднородных сред.

В заключение отметим, что в связи с большим числом практических приложений интерес к этому направлению исследований за последнее десятилетие только возрастает, а прогресс в разработке методов приготовления широкополосных бифотонных полей уже вплотную приблизил нас к возможности получения пар фотонов, коррелированных с точностью до одного периода оптических колебаний.

Работа выполнена в рамках “Программы развития” Междисциплинарной научно-образовательной школы Московского университета “Фотонные и квантовые технологии. Цифровая медицина” при поддержке Российского научного фонда, грант # 19-72-10069.

1. V. A. Fock, Z. Phys **75**(9–10), 622 (1932).
2. P. Grangier, G. Roger, and A. Aspect, Europhysics Letters (EPL) **1**(4), 173 (1986).
3. D. T. Pegg, R. Loudon, and P. L. Knight, Phys. Rev. A **33**(6), 4085 (1986).
4. A. V. Burlakov, M. V. Chekhova, D. N. Klyshko, S. P. Kulik, A. N. Penin, Y. H. Shih, and D. V. Strekalov, Phys. Rev. A **56**(4), 3214 (1997).
5. P. G. Kwiat, K. Mattle, H. Weinfurter, A. Zeilinger, A. V. Sergienko, and Y. Shih, Phys. Rev. Lett. **75**(24), 4 (1995).

6. Yu. I. Bogdanov, M. V. Chekhova, S. P. Kulik, G. A. Maslennikov, A. A. Zhukov, C. H. Oh, and M. K. Tey, *Phys. Rev. Lett.* **93**(23), 230503 (2004).
7. M. V. Chekhova, L. A. Krivitsky, S. P. Kulik, and G. A. Maslennikov, *Phys. Rev. A* **70**(5), 053801 (2004).
8. E. V. Moreva, G. A. Maslennikov, S. S. Straupe, and S. P. Kulik, *Phys. Rev. Lett.* **97**(2), 023602 (2006).
9. G. M. D'Agiano, P. Mataloni, and M. F. Sacchi, *Phys. Rev. A* **71**(6), 062337 (2005).
10. Д. Н. Клышко, *Письма в ЖЭТФ* **6**(1), 490 (1967).
11. Д. Н. Клышко, *Фотоника и нелинейная оптика*, Наука, М. (1980).
12. И. Р. Шен, *Принципы нелинейной оптики*, пер. с англ., под ред. С. А. Ахманова, Наука, М. (1989).
13. S. Shwartz, R. N. Coffee, J. M. Feldkamp, Y. Feng, J. B. Hastings, G. Y. Yin, and S. E. Harris, *Phys. Rev. Lett.* **109**(1), 013602 (2012).
14. В. Д. Султанов, К. А. Кузнецов, А. А. Леонтьев, Г. Х. Китаева, *Письма в ЖЭТФ* **112**(5), 297 (2020).
15. П. А. Прудковский, *Письма в ЖЭТФ* **114**(4), 204 (2021).
16. А. А. Леонтьев, К. А. Кузнецов, П. А. Прудковский, Д. А. Сафроненков, Г. Х. Китаева, *Письма в ЖЭТФ* **114**(10), 635 (2021).
17. М. В. Чехова, *Письма в ЖЭТФ* **75**(5), 271 (2002).
18. A. V. Belinsky and D. N. Klyshko, *Laser Physics* **4**(4), 663 (1994).
19. E. Schmidt, *Math. Ann.* **65**(1), 370 (1908).
20. М. Нильсен and И. Чанг, *Квантовые вычисления и квантовая информация*, Мир, М. (2006), 824 с.
21. R. Horodecki, P. Horodecki, M. Horodecki, and K. Horodecki, *Rev. Mod. Phys.* **81**(2), 865 (2009).
22. R. Grobe, K. Rzazewski, and J. H. Eberly, *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics* **27**(16), L503 (1994).
23. M. V. Fedorov, M. A. Efremov, A. E. Kazakov, K. W. Chan, C. K. Law, and J. H. Eberly, *Phys. Rev. A* **69**(5), 052117 (2004).
24. M. V. Fedorov, M. A. Efremov, P. A. Volkov, and J. H. Eberly, *J. Phys. B At. Mol. Opt. Phys.* **39**(13), S467 (2006).
25. M. V. Fedorov, M. A. Efremov, P. A. Volkov, E. V. Moreva, S. S. Straupe, and S. P. Kulik, *Phys. Rev. Lett.* **99**(6), 063901 (2007).
26. G. Brida, V. Caricato, M. V. Fedorov, M. Genovese, M. Gramegna, and S. P. Kulik, *EPL (Europhysics Letters)* **87**(6), 64003 (2009).
27. W. P. Grice, A. B. U'Ren, and I. A. Walmsley, *Phys. Rev. A* **64**(6), 063815 (2001).
28. A. B. U'Ren, K. Banaszek, and I. A. Walmsley, *Quantum Inf. & Comput.* **3**(7), 480 (2003).
29. P. J. Mosley, C. Silberhorn, A. B. U'Ren, I. A. Walmsley, and M. G. Raymer, *Generation of pure state single photon wavepackets*, in *2005 European Quantum Electronics Conference*, IEEE Computer Society (2005), p. 268.
30. M. Hendrych, M. Micuda, and J. P. Torres, *Opt. Lett.* **32**(16), 2339 (2007).
31. W. P. Grice, R. S. Bennink, D. S. Goodman, and A. T. Ryan, *Physical Review A – Atomic, Molecular, and Optical Physics* **83**(2), 1 (2011).
32. H. Di Lorenzo Pires, F. M. G. J. Coppens, and M. P. van Exter, *Physical Review A – Atomic, Molecular, and Optical Physics* **83**(3), 1 (2011).
33. R. J. Glauber, *Phys. Rev. Lett.* **10**(3), 84 (1963).
34. O. Jedrkiewicz, J.-L. Blanchet, E. Brambilla, P. Di Trapani, and A. Gatti, *Phys. Rev. Lett.* **108**(25), 253904 (2012).
35. R. H. Brown and R. Q. Twiss, *Philos. Mag. J. Sci.* **45**(366), 663 (1954).
36. I. Abram, R. K. Raj, J. L. Oudar, and G. Dolique, *Phys. Rev. Lett.* **57**(20), 2516 (1986).
37. C. K. Hong, Z. Y. Ou, and L. Mandel, *Phys. Rev. Lett.* **59**(18), 2044 (1987).
38. M. D. Eisaman, J. Fan, A. Migdall, and S. V. Polyakov, *Rev. Sci. Instrum.* **82**(7), 071101 (2011).
39. T. Aichele, A. I. Lvovsky, and S. Schiller, *The European Physical Journal D – Atomic, Molecular and Optical Physics* **18**(2), 237 (2002).
40. G. Kh. Kitaeva, D. N. Klyshko, and I. V. Taubin, *Sov. J. Quantum Electron.* **12**(3), 333 (1982).
41. Д. Н. Клышко, А. Н. Пенин, *Успехи физических наук* **152**(8), 653 (1987).
42. P.-J. Tsai and Y.-Ch. Chen, *Quantum Science and Technology* **3**(3), 034005 (2018).
43. X.-H. Bao, Y. Qian, J. Yang, H. Zhang, Z.-B. Chen, T. Yang, and J.-W. Pan, *Phys. Rev. Lett.* **101**(19), 190501 (2008).
44. С. Н. Молотков, *ЖЭТФ* **157**(6), 963 (2020).
45. С. Н. Молотков, *ЖЭТФ* **160**(3), 327 (2021).
46. U. Vazirani and Th. Vidick, *Communications of the ACM* **62**(4), 133 (2019).
47. L. Jiang, J. M. Taylor, K. Nemoto, W. J. Munro, R. van Meter, and M. D. Lukin, *Phys. Rev. A* **79**(3), 032325 (2009).
48. H. Bechmann-Pasquinucci and A. Peres, *Phys. Rev. Lett.* **85**(15), 3313 (2000).
49. M. Bourennane, A. Karlsson, and G. Björk, *Phys. Rev. A* **64**(1), 012306 (2001).
50. D. Bruß and C. Macchiavello, *Phys. Rev. Lett.* **88**(12), 127901 (2002).
51. F. Caruso, H. Bechmann-Pasquinucci, and C. Macchiavello, *Phys. Rev. A* **72**(3), 032340 (2005).
52. J. Roslund, R. M. de Araújo, Sh. Jiang, C. Fabre, and N. Treps, *Nature Photonics* **8**(2), 109 (2014).
53. B. Bessire, C. Bernhard, T. Feurer, and A. Stefanov, *New J. Phys.* **16**(3), 033017 (2014).

54. H. Ch. Lim, A. Yoshizawa, H. Tsuchida, and K. Kikuchi, *Opt. Express* **16**(26), 22099 (2008).
55. T. E. Chapuran, P. Toliver, N. A. Peters, J. Jackel, M. S. Goodman, R. J. Runser, S. R. McNown, N. Dallmann, R. J. Hughes, K. P. McCabe, J. E. Nordholt, C. G. Peterson, K. T. Tyagi, L. Mercer, and H. Dardy, *New J. Phys.* **11**(10), 105001 (2009).
56. I. Herbauts, B. Blauensteiner, A. Poppe, T. Jennewein, and H. Hübel, *Opt. Express* **23**, 29013 (2013).
57. J. M. Donohue, J. Lavoie, and K. J. Resch, *Phys. Rev. Lett.* **113**(16), 163602 (2014).
58. H.-S. Zhong, H. Wang, Y.-H. Deng et al. (Collaboration), *Science* **370**(6523), 1460 (2020).
59. H. J. Briegel, D. E. Browne, W. Dür, R. Raussendorf, and M. van den Nest, *Nature Phys.* **5**(1), 19 (2009).
60. M. Gimeno-Segovia, P. Shadbolt, D. E. Browne, and T. Rudolph, *Phys. Rev. Lett.* **115**(2), 020502 (2015).
61. Sh. Yokoyama, R. Ukai, S. C. Armstrong, Ch. Sornphiphatphong, T. Kaji, Sh. Suzuki, J.-i. Yoshikawa, H. Yonezawa, N. C. Menicucci, and A. Furusawa, *Nature Photon.* **7**(12), 982 (2013).
62. M. Chen, N. C. Menicucci, and O. Pfister, *Phys. Rev. Lett.* **112**(12), 120505 (2014).
63. E. Knill, R. Laflamme, and G. J. Milburn, *Nature* **409**(6816), 46 (2001).
64. V. Giovannetti, S. Lloyd, and L. Maccone, *Nature* **412**(6845), 417 (2001).
65. V. Giovannetti, S. Lloyd, L. Maccone, and F. N. C. Wong, *Phys. Rev. Lett.* **87**(11), 117902 (2001).
66. A. Valencia, G. Scarcelli, and Y. Shih, *Appl. Phys. Lett.* **85**(13), 2655 (2004).
67. R. Quan, R. Dong, Y. Zhai, F. Hou, X. Xiang, H. Zhou, Ch. Lv, Zh. Wang, L. You, T. Liu, and Sh. Zhang, *Opt. Lett.* **44**(3), 614 (2019).
68. R. Quan, R. Dong, X. Xiang, B. Li, T. Liu, and Sh. Zhang, *Rev. Sci. Instrum.* **91**(12), 123109 (2020).
69. V. Giovannetti, *Science* **306**(5700), 1330 (2004).
70. J. P. Dowling, *Contemp. Phys.* **49**(2), 125 (2008).
71. O. Varnavski and Th. Goodson, *J. Am. Chem. Soc.* **142**(30), 12966 (2020).
72. B. E. A. Saleh, B. M. Jost, H. B. Fei, and M. C. Teich, *Phys. Rev. Lett.* **80**(16), 3483 (1998).
73. B. Dayan, A. Pe'er, A. A. Friesem, and Y. Silberberg, *Phys. Rev. Lett.* **94**(4), 043602 (2005).
74. F. Schlawin, K. E. Dorfman, and Sh. Mukamel, *Acc. Chem. Res.* **51**(9), 2207 (2018).
75. A. N. Boto, P. Kok, D. S. Abrams, S. L. Braunstein, C. P. Williams, and J. P. Dowling, *Phys. Rev. Lett.* **85**(13), 2733 (2000).
76. M. D'Angelo, M. V. Chekhova, and Y. Shih, *Phys. Rev. Lett.* **87**(1), 013602 (2001).
77. A. F. Abouraddy, M. B. Nasr, B. E. A. Saleh, A. V. Sergienko, and M. C. Teich, *Physical Review A – Atomic, Molecular, and Optical Physics* **65**(5), 6 (2002).
78. M. B. Nasr, B. E. A. Saleh, A. V. Sergienko, and M. C. Teich, *Phys. Rev. Lett.* **91**(8), 083601 (2003).
79. S. Kurimura, R. Okamoto, H. H. Lim, Sh. Takeuchi, N. Nishizawa, and M. Okano, *Sci. Rep.* **5**(1), 1 (2015).
80. S. M. Kolenderska, F. Vanholsbeeck, and P. Kolenderski, *Opt. Express* **28**(20), 29576 (2020).
81. P. Yepiz-Graciano, A. M. A. Martínez, D. Lopez-Mago, H. Cruz-Ramirez, and A. B. U'Ren, *Photonics Research* **8**(6), 1023 (2020).
82. W. Drexler and J. G. Fujimoto, *Optical Coherence Tomography*, Springer International Publishing, Cham (2015), v. 54(4).
83. M. Okano, R. Okamoto, A. Tanaka, Sh. Ishida, N. Nishizawa, and Sh. Takeuchi, *Phys. Rev. A* **88**(4), 043845 (2013).
84. D. Lopez-Mago and L. Novotny, *Phys. Rev. A* **86**(2), 023820 (2012).
85. C. Okoth, A. Cavanna, T. Santiago-Cruz, and M. V. Chekhova, *Phys. Rev. Lett.* **123**(26), 263602 (2019).
86. K. G. Katamadze and S. P. Kulik, *Broadband biphotons in the single spatial mode through high pump focusing and walk-off effect*, in *International Conference on Micro- and Nano-Electronics 2016*, **10224**, 102242N (2016); doi: 10.1117/12.2266937.
87. K. G. Katamadze, N. A. Borshchevskaya, I. V. Dyakonov, A. V. Paterova, and S. P. Kulik, *Laser Phys. Lett.* **10**(4), 045203 (2013).
88. К. Г. Катамадзе, *Управление частотно-угловым спектром бифотонного поля. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук*, МГУ им. М. В. Ломоносова, М. (2013).
89. A. Pe'er, Y. Silberberg, B. Dayan, and A. A. Friesem, *Phys. Rev. A* **74**(5), 053805 (2006).
90. U. A. Javid, J. Ling, J. Staffa, M. Li, Y. He, and Q. Lin, *Phys. Rev. Lett.* **127**(18), 183601 (2021).
91. C. R. Menyuk, R. Schiek, and L. Torner, *J. Opt. Soc. Am. B* **11**(12), 2434 (1994).
92. J. P. Torres, S. Carrasco, L. Torner, and E. W. van Stryland, *Opt. Lett.* **25**(23), 1735 (2000).
93. J. P. Torres, M. Hendrych, and A. Valencia, *Adv. Opt. Photonics* **2**(3), 319 (2010).
94. M. Hendrych, X. Shi, A. Valencia, and J. P. Torres, *Physical Review A – Atomic, Molecular, and Optical Physics* **79**(2), 1 (2009).
95. S. Carrasco, J. P. Torres, L. Torner, A. Sergienko, B. E. A. Saleh, and M. C. Teich, *Phys. Rev. A* **70**(4), 043817 (2004).

96. S. Carrasco, A. V. Sergienko, B. E. A. Saleh, M. C. Teich, J. P. Torres, and L. Torner, *Phys. Rev. A* **73**(6), 063802 (2006).
97. Y. M. Mikhailova, P. A. Volkov, and M. V. Fedorov, *Phys. Rev. A* **78**(6), 062327 (2008).
98. M. V. Fedorov, Y. M. Mikhailova, and P. A. Volkov, *J. Phys. B At. Mol. Opt. Phys.* **42**(17), 175503 (2009).
99. M. B. Nasr, G. Di Giuseppe, B. E. A. Saleh, A. V. Sergienko, and M. C. Teich, *Opt. Commun.* **246**(4–6), 521 (2005).
100. M. Okano, R. Okamoto, A. Tanaka, Sh. Subashchandran, and Sh. Takeuchi, *Opt. Express* **20**(13), 13977 (2012).
101. S. Carrasco, J. P. Torres, L. Torner, A. Sergienko, B. E. A. Saleh, and M. C. Teich, *Opt. Lett.* **29**(20), 2429 (2004).
102. B. Cao, R. Okamoto, M. Hisamitsu, K. Tokuda, and Sh. Takeuchi, *Highly efficient ultra-broadband entangled photon-pair generation using a chirped ppslt ridge waveguide*, in *European Quantum Electronics Conference*, paper eb\_p\_25, Optical Society of America (2019).
103. К. Г. Катамадзе, С. П. Кулик, *ЖЭТФ* **139**(1), 26 (2011).
104. К. Г. Катамадзе, А. В. Патерова, Е. Г. Якимова, К. А. Бальгин, С. П. Кулик, *Письма в ЖЭТФ* **94**(4), 284 (2011).
105. D. B. Horoshko and M. I. Kolobov, *Phys. Rev. A* **95**(3), 033837 (2017).
106. M. V. Chekhova, S. Germanskiy, D. B. Horoshko, G. Kh. Kitaeva, M. I. Kolobov, G. Leuchs, Ch. R. Phillips, and P. A. Prudkovskii, *Opt. Lett.* **43**(3), 375 (2018).
107. Г. Х. Китаева, М. В. Чехова, О. А. Шумилкина, *Письма в ЖЭТФ* **90**(3), 190 (2009).
108. G. Brida, M. V. Chekhova, I. P. Degiovanni, M. Genovese, G. Kh. Kitaeva, A. Meda, and O. A. Shumilkina, *Phys. Rev. Lett.* **103**(19), 193602 (2009).
109. A. Pe'er, B. Dayan, A. A. Friesem, and Y. Silberberg, *Phys. Rev. Lett.* **94**(7), 1 (2005).
110. B. Li, Y. Xu, H. Zhu, F. Lin, and Y. Li, *Physical Review A – Atomic, Molecular, and Optical Physics* **91**(2), 6 (2015).
111. К. Г. Катамадзе, N. А. Боршчевская, I. V. Dyakonov, A. V. Paterova, and S. P. Kulik, *Phys. Rev. A* **92**(2), 023812 (2015).
112. А. В. Белинский, Р. Сингх, *ЖЭТФ* **159**(2), 258 (2021).
113. J. Fan and A. Migdall, *Opt. Express* **15**(6), 2915 (2007).
114. J. Fan, M. D. Eisaman, and A. Migdall, *Phys. Rev. A* **76**(4), 043836 (2007).
115. P. Kultavewuti, E. Y. Zhu, L. Qian, V. Pusino, M. Sorel, and J. S. Aitchison, *Opt. Express* **24**(4), 3365 (2016).
116. M. Liscidini, J. E. Sipe, and L. G. Helt, *Opt. Express* **24**(8), 9130 (2016).
117. K.-I. Harada, H. Takesue, H. Fukuda, T. Tsuchizawa, T. Watanabe, K. Yamada, Y. Tokura, and S.-I. Itabashi, *IEEE J. Sel. Top. Quantum Electron.* **16**(1), 325 (2010).
118. Y.-H. Li, Zh.-Y. Zhou, L.-T. Feng, W.-T. Fang, Sh.-l. Liu, Sh.-K. Liu, K. Wang, X.-F. Ren, D.-Sh. Ding, L.-X. Xu, and B.-S. Shi, *Phys. Rev. Appl.* **7**(6), 064005 (2017).