

О дифференциальных уравнениях для диаграмм Фейнмана (Миниобзор)

В. Мишняков^{+*×◦1)}, П. Супрун^{+◦}

⁺Московский физико-технический институт, 141701 Долгопрудный, Россия

^{*}Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, 119991 Москва, Россия

[×]Институт теоретической и математической физики, МГУ им. М. В. Ломоносова, 119991 Москва, Россия

[◦]Национальный исследовательский центр “Курчатовский институт”, 117218 Москва, Россия

Поступила в редакцию 10 марта 2022 г.

После переработки 21 марта 2022 г.

Принята к публикации 21 марта 2022 г.

Каким образом современный физик должен вычислять петлевые интегралы, задаваемые диаграммами Фейнмана? Этот вопрос в последнее время привлекал к себе существенное внимание. Хотя его исследование остается незавершенным, можно выделить основные направления, в которых ведется активная работа. Одним из таких направлений является *метод дифференциальных уравнений*, основные идеи и особенности которого мы попытаемся обозначить с целью выделения стоящих за ним принципов в наибольшей общности.

DOI: 10.31857/S1234567822080122, EDN: fnljzp

1. Содержание метода. Типичный фейнмановский интеграл представляет из себя выражение вида

$$J(p_1, \dots, p_M; m_1, \dots, m_N) = \int \frac{d^d k_1 d^d k_2 \dots d^d k_l}{D_1 D_2 \dots D_n}, \quad (1)$$

где k_i – контурные импульсы, D – пропагаторы, зависящие от их сумм и разностей (конкретные комбинации задаются графом Фейнмана по широко известным правилам). Основной задачей подобных методов является установление зависимости функции J от ее аргументов – масс частиц-переносчиков m_i и внешних импульсов p_j . Идея метода дифференциальных уравнений заключается в том, чтобы искать и использовать соотношения между J и ее производными по параметрам [1]. Точнее, предлагаемый алгоритм можно описать следующим образом:

1. Продифференцировать исследуемый интеграл по параметрам, что дает (линейные комбинации) выражений вида

$$\partial_i J = \int \frac{P(k)}{D_1^{a_1} D_2^{a_2} \dots D_e^{a_e}} d^d k_1 d^d k_2 \dots d^d k_l, \quad (2)$$

где $P(k)$ – скалярный многочлен от петлевых и внешних импульсов.

2. Применить максимально возможное количество соотношений следующего типа (которые после взятия всех производных и раскрытия скобок связывают между собой различные интегралы, аналогичные по форме приведенным выше):

$$0 = \int \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}_i} \frac{P(k) \mathbf{q}_j}{D_1^{a_1} D_2^{a_2} \dots D_e^{a_e}} d^d k_1 d^d k_2 \dots d^d k_l = \dots \quad (3)$$

Основное содержание этих соотношений в том, что “интеграл от полной производной зануляется”.

3. Из бесконечного числа возможных интегралов фейнмановского типа (различающихся степенями пропагаторов и одночленами в числителе) выбрать конечное подмножество, содержащее исходный интеграл и обладающее тем свойством, что любая производная по параметру любого выбранного интеграла является рациональной линейной комбинацией интегралов, принадлежащих этому множеству. Иными словами, сумма интегралов, возникающая при дифференцировании любого выбранного, должна снова сводиться к выбранным интегралам в силу тождеств типа (3) и их линейных комбинаций. Для поиска такого множества су-

¹⁾e-mail: mishnyakovvv@gmail.com

ществуют специальные методы, из которых мы упомянем *алгоритм Лапорты*.

4. В результате должна получиться система дифференциальных уравнений следующего вида:

$$\partial_i J_\alpha = \sum A_{i\alpha\beta}(t_j) J_\beta, \quad (4)$$

где в левой части стоят производные по параметрам функций J_α , входящих в конечный набор, выбранный на предыдущем шаге, так называемых “master integrals”. Коэффициенты $A_{i\alpha\beta}(p_j, m_k)$ являются рациональными функциями своих параметров. Решение системы, заданной в подобной форме, может быть записано как:

$$\partial_i J_\alpha = \sum A_{i\alpha\beta}(t_j) J_\beta \rightarrow \mathbf{J} = \text{Rexp} \left(\int A dx \right), \quad (5)$$

где Rexp – упорядоченная экспонента, причем в ее разложение входят интегралы A -матрицы (связности) вида

$$J_{\text{iterated}} = \int_0^x dx_{n-1} A(x_{n-1}) \times \int_0^{x_{n-1}} dx_{n-2} A(x_{n-2}) \int_0^{x_{n-2}} \dots \int_0^{x_1} A(x_0) dx_0. \quad (6)$$

С другой стороны, эти соотношения между интегралами фейнмановского типа могут быть сформулированы в виде уравнения или системы уравнений более высокого порядка на меньшее число базисных интегралов. Система уравнений первого порядка приводится к такой форме взятием следующих производных и исключением дополнительных (к исходному) мастер-интегралов. Например, для процессов, включающих только один внешний импульс, таких как диаграммы типа собственной энергии, система сводится к единственному уравнению по переменной $t = p^2$:

$$\mathcal{L}[J] = 0, \quad (7)$$

где $\mathcal{L} = \frac{d^n}{dt^n} + \dots$ – дифференциальный оператор априори неизвестного порядка, который может быть достаточно высоким, а сам оператор – иметь сложную форму. В таком виде очевидно, что дифференциальная структура семейства интегралов фейнмановского типа полностью аналогична структуре классических уравнений Пикара–Фукса для периодов эллиптических кривых и кривых старшего рода. В следующем разделе мы приведем несколько примеров.

Напомним вкратце, как устроено уравнение Пикара–Фукса в случае рода 1. Период эллиптической кривой с “модулем” λ определяется следующим образом:

$$\omega(\lambda) = \oint \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-\lambda)}}. \quad (8)$$

После двукратного дифференцирования по λ получаем три замкнутые дифференциальные формы. Так как пространство когомологий эллиптической кривой двумерно, должна существовать линейная комбинация $\omega(\lambda)$, $\partial_\lambda \omega(\lambda)$ и $\partial_\lambda^2 \omega(\lambda)$, являющаяся интегралом точной формы по замкнутому контуру, и, следовательно, равная нулю. Это условие эквивалентно дифференциальному уравнению на ω , коэффициенты которого могут быть вычислены и оказываются следующими:

$$\left[\frac{d^2}{d\lambda^2} + \frac{1-2\lambda}{(\lambda-1)\lambda} \frac{d}{d\lambda} - \frac{1}{4(\lambda-1)\lambda} \right] \omega = 0 \quad (9)$$

Заметим, что уравнение имеет форму (7) и означает, в сущности, что интеграл от полной производной (точной 1-формы) обращается в нуль, в полной аналогии с уравнением (3). Единственное отличие от описанного выше метода состоит в том, что в данном случае мы начали с производных интеграла по параметру и объединили их в полную производную, в то время как выше мы сначала рассмотрели набор полных производных, которые затем выразили в форме соотношений между интересующими нас интегралами. Заметим также, что в задачах квантовой теории поля обычно требуется рассмотрение интегралов не по замкнутому контуру, а по некоторому интервалу. В этом случае соответствующее уравнение типа Пикара–Фукса может оказаться неоднородным, но после умножения на подходящий множитель и дополнительного дифференцирования его можно сделать однородным, увеличив порядок на единицу.

Поскольку пространство первых когомологий кривой рода g является $2g$ -мерным, порядок аналогичных уравнений на периоды старших кривых определяется их родом. Отсюда ясно, что задача определения порядка таких уравнений является вопросом теории когомологий. Построение соответствующей геометрической конструкции для интегралов Фейнмана является интересным открытым вопросом, активно изучаемым в последнее время [2], а также [3].

Последнее замечание, которое мы хотим сделать в этом разделе, состоит в том, что обращение в нуль интегралов от полных производных является основным содержанием тождеств Уорда (условий

Вирасоро) в теории матричных моделей [4, 5]. Соответственно, возникает интригующий вопрос, можно ли поднять тождества на отдельные диаграммы, возникающие из интегрирования по частям на уровень точных статистических сумм и корреляторов. Мы планируем уделить внимание этой проблеме в нашей дальнейшей работе.

2. Результаты. Свойства решений. Вышеописанный метод дает возможность представить диаграммы Фейнмана в виде некоторых новых интегралов, не выражающихся в элементарных функциях. Однако иногда указанные интегралы могут быть выражены через известные специальные функции. Следовательно, можно предположить, что те из них, которые не могут быть выражены подобным образом, дают указание на “правильное” обобщение традиционной системы спецфункций. Связь между диаграммами Фейнмана и специальными функциями можно грубо обозначить следующим образом:

1. Однопетлевые диаграммы представляют собой функции, выражаемые через *полилогарифмы* Li_n [6, 7].
2. Некоторые двухпетлевые диаграммы соответствуют *многократным полилогарифмам*, обобщающим обычные [6], но этих функций недостаточно: существуют диаграммы с двумя петлями, которые требуют для своего выражения повторных интегралов квадратных корней и других эллиптических функций, иногда называемых *эллиптическими полилогарифмами*, свойства которых на текущий момент остаются до конца не изученными [8–10].

3. “Правильное” обобщение обозначенной иерархии, в которое входят, по всей видимости, произвольно многократные полилогарифмы любого рода, и ее связь с интегралами Фейнмана общего вида в высших петлях, в настоящее время неизвестны, относительно прогресса в этом направлении см. [11, 12].

Определение многократных полилогарифмов (по Гончарову) следующее:

$$I(a_0; a_1, a_2, \dots, a_n; z) = \int_{a_0}^z \frac{dt_1}{t_1 - a_1} \int_{a_0}^{t_1} \frac{dt_2}{t_2 - a_2} \dots \int_{a_0}^{t_{n-1}} \frac{dt_n}{t_n - a_n}. \quad (10)$$

Наряду с функциями I , применение находят функции типа Li , определяемые как:

$$Li_{m_1, m_2, \dots, m_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{0 < k_1 < k_2 < \dots < k_n} \frac{x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}}{k_1^{m_1} k_2^{m_2} \dots k_n^{m_n}}. \quad (11)$$

Эти два класса функций эквивалентны в силу следующего тождества:

$$Li_{m_1, m_2, \dots, m_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = I \left(\underbrace{0}_{m_1}, \frac{1}{x_1}, \underbrace{0}_{m_2-1}, \frac{1}{x_1 x_2}, \dots, \underbrace{0}_{m_n-1}, \frac{1}{x_1 x_2 \dots x_n} \right). \quad (12)$$

(Еще не стандартное) определение эллиптических полилогарифмов:

$$ELi_{n_1, \dots, n_l; m_1, \dots, m_l; a_1, \dots, a_l}(x_i, y_j, q) = \sum_{j_r, k_s=0}^{\infty} \frac{x_1^{j_1}}{j_1^{m_1}} \cdot \frac{x_2^{j_2}}{j_2^{m_2}} \cdot \dots \cdot \frac{x_l^{j_l}}{j_l^{m_l}} \cdot \frac{y_1^{k_1}}{k_1^{m_1}} \cdot \frac{y_2^{k_2}}{k_2^{m_2}} \cdot \dots \cdot \frac{y_l^{k_l}}{k_l^{m_l}} \times \frac{q^{j_1 k_1 + j_2 k_2 + \dots + j_l k_l}}{(j_1 k_1 + j_2 k_2 + j_3 k_3 + \dots + j_l k_l)^{a_1} (j_2 k_2 + j_3 k_3 + \dots + j_l k_l)^{a_2} \dots (j_l k_l)^{a_l}}. \quad (13)$$

Ниже мы приводим примеры, в которых эти функции оказываются полезными.

2.1. Пример на уровне одной петли. Описанный метод применительно к безмассовой треугольной диаграмме, изображенной на рис. 1, дает следующий результат:

$$J_{\text{triangle}}(p_1, p_2, p_3) = \frac{2i}{p_1^2(z - \bar{z})} \times \left(Li_2(z) - Li_2(\bar{z}) + \frac{1}{2} \ln(z\bar{z}) \ln \frac{1-z}{1-\bar{z}} \right), \quad (14)$$

где

$$p_2^2 = p_1^2 |z|^2, \quad p_3^2 = p_1^2 |1-z|^2. \quad (15)$$

Хорошо видны полилогарифмы (в данном случае диллогарифмы).

2.2. *Пример на уровне двух петель.* Возможно, самым простым примером, когда обычных (рода нуль) кратных интегралов недостаточно, является так называемая “sunrise”-диаграмма, изображенная на рис. 2. Система уравнений записана в терминах

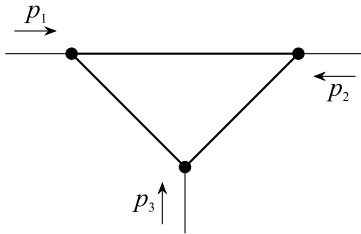


Рис. 1. Треугольная диаграмма

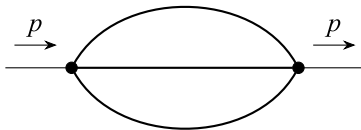


Рис. 2. Двупетлевая диаграмма собственной энергии

четырёх “master integrals” [13], но в случае равных масс их количество сокращается до двух [14].

$$J_1 = \int \frac{d^d k_1 d^d k_2}{(k_1^2 + 1)(k_2^2 + 1)((p - k_1 - k_2)^2 + 1)} \quad (16)$$

$$J_2 = \int \frac{d^d k_1 d^d k_2}{(k_1^2 + 1)^2(k_2^2 + 1)((p - k_1 - k_2)^2 + 1)}. \quad (17)$$

В этом случае зависимость от массы может быть частично учтена заменой нормировочного коэффициента. Тогда дифференциальные уравнения формулируются в терминах безразмерного импульса $z = p^2/m^2$:

$$\begin{aligned} \partial_z J_1 &= \frac{d-3}{z} J_1 + \frac{3}{z} J_2, \\ \partial_z J_2 &= \frac{(d-3)(8-3d)(z+3)}{2z(z+1)(z+9)} J_1 + \\ &+ \frac{(d-4)z^2 + 10(2-d)z + 9(8-3d)}{2z(z+1)(z+9)} J_2 + \\ &+ \frac{z}{2(d-4)^2 z(z+1)(z+9)}. \end{aligned} \quad (18)$$

С помощью подходящих операций дифференцирования эта система может быть записана в эквивалентной форме одного уравнения для S в форме Пикара–Фукса.

Система дифференциальных уравнений для случая различных масс здесь не приводится из-за ее гро-

мозкости и недостатка наглядности, см. [13]. Ответ, однако, мы приведем для общего случая [15]:

$$J_1 = \frac{4}{\sqrt[4]{(p^2 - \mu_1^2)(p^2 - \mu_2^2)(p^2 - \mu_3^2)(p^2 - \mu^2)}} \times \frac{K(k)}{\pi} \sum_{j=1}^3 E_{2;0}(w_j; -1; -q), \quad (19)$$

где $\mu = m_1 + m_2 + m_3$, $\mu_i = \mu - 2m_i$, q, k – стандартные параметры эллиптической кривой

$$-p^2 x_1 x_2 x_3 + (x_1 m_1^2 + x_2 m_2^2 + x_3 m_3^2)(x_1 + x_2 + x_3) = 0, \quad (20)$$

w_i – комплексные (униформизованные) координаты точек пересечения координатных осей (полосов подынтегральной функции) $x_i = x_j = 0$ с эллиптической кривой, приведенной к нормальной форме Якоби. Хорошо видны эллиптические дилогарифмы ($E_{2;0}$). Их связь с функциями ELi , определенными выше, дается формулой

$$\begin{aligned} E_{2;0}(x; y; q) &= -i \left(\frac{1}{2} Li_2(x) - \frac{1}{2} Li_2\left(\frac{1}{x}\right) + \right. \\ &\left. + ELi_{2;0}(x; y; q) - ELi_{2;0}\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, q\right) \right). \end{aligned} \quad (21)$$

3. Алгебраическая природа петлевых интегралов. Когда решение проблемы оказывается выраженным в терминах специальных функций, возникает обычный вопрос, делает ли это проблему “решенной” или предлагаемое решение не представляет из себя ничего сверх специального обозначения для функции, остающейся при этом по-прежнему загадочной. Разница между специальными функциями, решающими задачи, и специальными обозначениями для нерешенных задач заключается в том, что первые обладают достаточно полным набором хорошо изученных свойств. К счастью, специальные функции, возникающие в фейнмановских вычислениях, принадлежат к семейству, которое, по имеющимся данным, устроено “регулярно” с алгебраической точки зрения, что делает их весьма перспективными для использования и исследования. К сожалению, продвижения в изучении свойств этих функций можно считать существенными только для случая “рациональных” кратных полилогарифмов, в то время как для эллиптических такие продвижения можно в лучшем случае только обозначить. По этой причине в данном разделе обсуждаются только рациональные кратные полилогарифмы.

Многочисленные полилогарифмы являются обобщением классических, а классические полилогарифмы, как известно, удовлетворяют большому количе-

ству функциональных тождеств. Простейшим примером таких тождеств являются следующие:

$$\text{Li}_2(1 - z) = -\text{Li}_2(z) - \ln(z) \ln(1 - z) + \frac{\pi^2}{6}, \quad (22)$$

$$\text{Li}_2(1/z) = -\text{Li}_2(z) - \frac{\ln^2(-z)}{2} - \frac{\pi^2}{6}, \quad (23)$$

но, конечно, среди них существует и множество других, более сложных. Поэтому возникает естественный вопрос обобщения тождеств подобного рода на многократный случай, и возможное более или менее систематическое решение основано на использовании *Хопф-алгебраических соотношений* между исследуемыми функциями [16], которые мы в общих чертах описываем ниже.

Во-первых, произведение кратных полилогарифмов есть сумма полилогарифмов, что означает, что их семейство является алгеброй. Лучше всего это видно на интегралах, начинающихся с одной и той же точки:

$$\begin{aligned} & I(0, a_1, a_2, \dots, a_n) I(0, b_1, b_2, \dots, b_m) = \\ & = \sum_{S_{m+n}/S_m \times S_n} I(0, a_1, b_1, b_2, a_3, a_4, a_5, b_3 \dots) \end{aligned} \quad (24)$$

(суммирование происходит по всем “перетасовкам” a_i и b_j , сохраняющим порядок a и b между собой внутри каждого класса, но допускающим произвольное чередование самих классов букв).

Требование, чтобы первый аргумент I был равен нулю, не приводит к ограничению общности, поскольку

$$I(a_0, a_1, a_2) = I(0, a_1, a_2) - I(0, a_1, a_0).$$

Путем дальнейшего интегрирования этого тождества, получаем его аналог для четырех аргументов, $I(a_0, a_1, a_2, a_3) = I_0(0, a_1, a_2, a_3) - I(0, a_1, a_2, a_0) - I(0, a_1, a_0)(I(0, a_2, a_3) - I(0, a_2, a_0))$ и т.д. для всякого n . Из этого представления нетрудно видеть, что число интегрирований в I -функциях является градуировкой, согласованной с умножением (если $\text{grd}[a] = i$ и $\text{grd}[b] = j$, то ab строго однородна и $\text{grd}[ab] = i + j$). Предполагается также, что эта градуировка должна сохраняться всеми функциональными отношениями между многократными полилогарифмами и остается верной для ограничений этих функций, т.е. при наложении условий на набор аргументов (например, если принять все a_i равными z или 1). При таком подходе эта градуировка называется *трансцендентным весом*.

Во-вторых, это так называемое “перетасовочное произведение” допускает согласованное с ним копроизведение, так что эти две операции превращают семейство полилогарифмов в бIALгебру. Определение этого коумножения таково:

$$\begin{aligned} \Delta(I(a_0; a_1, a_2, \dots, a_n; a_{n+1})) &= \\ &= \sum I(a_0; a_i, a_j, \dots, a_k; a_{n+1}) \otimes \\ &\otimes \prod_{\text{all the rest}} I(a_p; a_{p+1}, a_{p+2}, \dots, a_{q-1}; a_q). \end{aligned} \quad (25)$$

Поскольку эта формула, вероятно, не отличается избытком ясности, приведем более подробное объяснение. Каждое слагаемое в копроизведении получается следующим образом:

1. Необходимо выбрать несколько переменных a_i, a_j, \dots, a_k , идущих по порядку между a_0 и a_{n+1} .
2. Тогда первый тензорный множитель равен $I(a_0; a_i, a_j, \dots, a_k; a_{n+1})$. Другой множитель получается в результате следующих шагов.
3. Выбранные параметры a_i, a_j, \dots, a_k делят всю последовательность $a_0; a_1, a_2, \dots, a_n; a_{n+1}$ в серию подпоследовательностей переменных a , идущих подряд, причем выбранные переменные являются концами этих подпоследовательностей. Каждой подпоследовательности соответствует функция $I(a_p; a_{p+1}, a_{p+2}, \dots, a_{q-1}; a_q)$, и все такие функции следует перемножить по всем подпоследовательностям, тогда полученное произведение будет являться вторым тензорным множителем.

Полученные тензорные объекты затем суммируются по всем возможным выборам, сделанным в п. 1. Например, для $n = 2$ получается следующее выражение:

$$\begin{aligned} \Delta(I(a_0; a_1, a_2, a_3)) &= 1 \otimes I(a_0; a_1, a_2; a_3) + \\ &+ I(a_0; a_1, a_2; a_3) \otimes 1 + I(a_0; a_1; a_3) \otimes I(a_1; a_2; a_3) + \\ &+ I(a_0; a_2; a_3) \otimes I(a_0; a_1; a_2). \end{aligned} \quad (26)$$

Эту процедуру можно проиллюстрировать графически, см. рис. 3.

Наконец, отображение антипода может быть однозначно определено из копроизведения для алгебр этого класса [17], что делает рассматриваемое функциональное пространство настоящей алгеброй Хопфа.

Копроизведение функции класса I – это сумма тензорных произведений функций того же класса с (как правило) меньшим трансцендентным весом; последовательно применяя копроизведение к тензорным множителям, можно сопоставить данной функции элемент тензорной алгебры над обсуждаемым

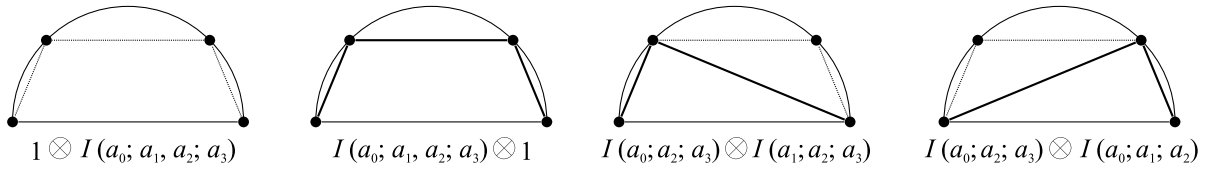


Рис. 3. Правило коумножения в алгебре Хопфа полилогарифмов веса 2

функциональным пространством, все более и более высокой тензорной степени, но со все более и более низким трансцендентным весом сомножителей. Следовательно, в некоторой степени Δ одной из однородных компонент (относительно трансцендентного веса отдельных тензорных множителей, т.е. $3 \otimes 1$ -, $2 \otimes 2$ - и $1 \otimes 3$ -компоненты считаются имеющими разный вес) будет сумма произведений обычных логарифмов (веса 1). Эта однородная компонента, называемая “символом” данной функции, ставится ей в соответствие и содержит информацию о “наиболее трансцендентной части” этой функции. Так как символы функций являются произведениями обыкновенных логарифмов, свойства последних определяют соотношения между символами, которые, в свою очередь, являются отражением соотношений между их прообразами на уровне старшей трансцендентности. Отслеживая ядра операторов коумножения, которые были применены к данной функции, и рассматривая другие однородные компоненты, можно восстановить менее трансцендентные поправки. Описанная техника была с успехом применена при вычислении двухпетлевой амплитуды двухпетлевого рассеяния в суперсимметричной теории Янга–Миллса [18]. Сказанное может быть проиллюстрировано диаграммным образом, см. рис. 4.

Приведем простой пример вычисления методом символов. Допустим, что нам требуется выразить $\text{Li}_2(1/z)$ через $\text{Li}_2(z)$. Согласно приведенному выше описанию, мы должны взять n -е копроизведение $\text{Li}_2(1/z)$ (в данном случае просто обычное копроизведение) и взять его однородную компоненту трансцендентного веса (точнее, набора весов) $1 \otimes 1 \otimes \dots \otimes 1$ (в данном случае $1 \otimes 1$). Обозначая через $\Delta_{1,1}$ проекцию копроизведения на эту однородную компоненту, имеем:

$$\begin{aligned} \Delta_{1,1}(\text{Li}_2(1/z)) &= -\ln(1 - 1/z) \otimes \ln(1/z) = \\ &= \ln(1 - z) \otimes \ln(z) - \ln(z) \otimes \ln(z) + i\pi \otimes \ln(z) = \\ &= \Delta_{1,1}(\text{Li}_2(z) - \frac{1}{2}(\ln z)^2 + i\pi \ln z), \end{aligned} \quad (27)$$

поэтому (поскольку ядро $\Delta_{1,1}$ веса 2 состоит только из $\text{Li}_2(1) = \zeta(2)$)

$$\text{Li}_2(1/z) = \text{Li}_2(z) - \frac{1}{2}(\ln z)^2 + i\pi \ln z + A\zeta(2). \quad (28)$$

Сравнивая левую и правую части при $z = 1$ получаем, что $A = 2$. Чтобы доказать равенство $\Delta_{1,1}(\zeta(2)) = 0$, заметим, что

$$\text{Li}_2(z) = \int_0^z \frac{dt_2}{t_2} \int_0^{t_2} \frac{dt_1}{1 - t_1} = I(0, 1, 0, z),$$

следовательно,

$$\begin{aligned} \Delta(\text{Li}_2(z)) &= I(0, 1, 0, z) \otimes 1 + 1 \otimes I(0, 1, 0, z) + \\ &+ I(0, 1, z) \otimes I(1, 0, z) + I(0, 0, z) \otimes I(0, 1, 0) = \\ &= \text{Li}_2(z) \otimes 1 + 1 \otimes \text{Li}_2(z) - \ln(1 - z) \otimes \ln(z). \end{aligned}$$

Подстановкой $z = 1$ получаем

$$\Delta(\zeta(2)) = 1 \otimes \zeta(2) + \zeta(2) \otimes 1.$$

В это выражение не входят члены с весовой структурой $1 \otimes 1$, следовательно, $\Delta_{1,1}(\zeta(2)) = 0$.

4. Обсуждение. В этой заметке нами обсуждались наиболее базовые свойства петлевых интегралов в квантовой теории поля. Из этих свойств мы рассмотрели три основных сюжета. Во-первых, это структура D -модуля на петлевых интегралах. Вместо вычисления в явной форме, интегралы Фейнмана представляются в виде решений систем дифференциальных уравнений, имеющих когомологическое происхождение в терминах некоторой внутренней геометрии. Очень похожий подход используется при исследовании свойств статистических сумм в теории матричных моделей. С другой стороны, при анализе решений возникает интересная иерархия сложности решений этих уравнений как функций импульсов и масс, которая отсутствует (или, по крайней мере, не видна при наивном походе) в нульмерных моделях. Полная характеристика этой иерархичности в терминах топологии графа Фейнмана или каких-либо других параметров на сегодняшний день неизвестна. Наконец, свойства алгебры Хопфа функций на графах тесно связаны с общими свойствами статистических сумм в КТП. Билинейный характер хопфово-алгебраических соотношений позволяет, по видимому, перевести их на язык свойств, подобных

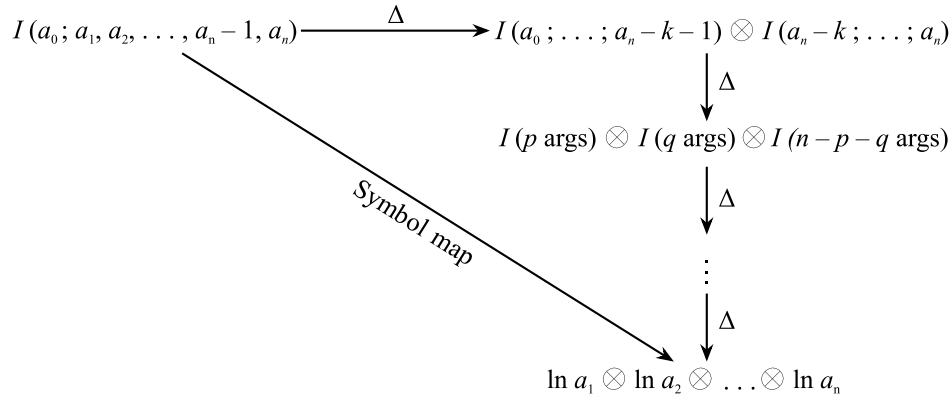


Рис. 4. Диаграмма для отображения символа

интегрируемости, для полных статистических сумм. Эта программа была исследована в наиболее общей постановке [19–21] и в простейших КТП – матричных моделях [5]. Однако, как мы видим, подобными свойствами обладают и основные строительные блоки фейнмановских интегралов (см. также [22] и ссылки в нем для более подробной информации о билинейных тождествах в контексте петлевых интегралов). Обычно интегрируемость матричных моделей не рассматривается с точки зрения соотношений между диаграммами. Однако и для теорий такого вида подобное рассмотрение возможно, и приводит к выводу, что билинейные уравнения на статистические суммы на уровне теории возмущений задают коммутативное кольцо в алгебре Хопфа графов (см. также [23]). В целом, активное изучение интегралов Фейнмана за последние годы показывает, что и КТП в обычном смысле проявляет свойства, аналогичные свойствам матричных моделей, хотя и формулируемые в более сложном виде. Среди таких свойств отметим билинейные соотношения общего вида и уравнения типа Пикара–Фукса, аналогичные условиям Вирасоро. Следовательно, можно ожидать, что дальнейшие исследования должны позволить нам установить наиболее общие свойства интегрируемости и для теорий поля в ненулевых измерениях.

Мы благодарны А. Морозову за предложение подумать над этим кругом вопросов и полезные замечания, а также участникам рабочего семинара ИГЭФ/МФТИ за ценные обсуждения. Работа Виктора Мишнякова частично финансировалась Российским фондом фундаментальных исследований и МОСТ, проект # 21-52-52004 и грант РФФИ 20-01-00644.

of Feynman Amplitudes, Springer Nature Switzerland, Cham (2021), v. 2; arXiv: 2102.07424 [hep-ph].

2. R. N. Lee and A. A. Pomeransky, JHEP **11**, 165 (2013); arXiv:1308.6676 [hep-ph].
3. S. Müller-Stach, S. Weinzierl, and R. Zayadeh, Commun. Math. Phys. **326**, 237 (2014); arXiv:1212.4389 [hep-ph].
4. A. Mironov and A. Morozov, Phys. Lett. B **252**, 47 (1990).
5. A. Morozov, Phys.-Uspekhi **37**, 1 (1994); arXiv:hep-th/9303139.
6. E. Panzer, *Feynman integrals and hyperlogarithms*, PhD thesis, Humboldt U. (2015); arXiv:1506.07243 [math-ph].
7. G. 't Hooft and M. J. G. Veltman, Nucl. Phys. B **153**, 365 (1979).
8. J. Broedel, C. Duhr, F. Dulat, B. Penante, and L. Tancredi, JHEP **05**, 120 (2019); arXiv:1902.09971 [hep-ph].
9. J. Broedel, C. Duhr, F. Dulat, and L. Tancredi, JHEP **05**, 093 (2018); arXiv:1712.07089 [hep-th].
10. S. Weinzierl, *Iterated Integrals Related to Feynman Integrals Associated to Elliptic Curves*, in *Antidifferentiation and the Calculation of Feynman Amplitudes*, Springer Nature Switzerland, Cham (2020), v. 12; arXiv:2012.08429 [hep-th].
11. J.L. Bourjaily, A.J. McLeod, M. von Hippel, and M. Wilhelm, Phys. Rev. Lett. **122**(3), 031601 (2019); arXiv:1810.07689.[hep-th].
12. K. Bönisch, C. Duhr, F. Fischbach, A. Klemm, and C. Nega, arXiv:2108.05310 [hep-th].
13. M. Caffo, H. Czyz, S. Laporta, and E. Remiddi, Nuovo Cim. A **111**, 365 (1998); arXiv:hep-th/9805118.
14. S. Laporta and E. Remiddi, Nucl. Phys. B **704**, 349 (2005); arXiv:hep-ph/0406160.
15. L. Adams, C. Bogner, and S. Weinzierl, *A walk on sunset boulevard*, RADCOR2015, UCLA, PoS, Los Angeles (2016), v. 096; arXiv:1601.03646 [hep-ph].

1. A. V. Kotikov, *Differential Equations and Feynman Integrals*, in *Antidifferentiation and the Calculation*

16. C. Duhr, *Mathematical aspects of scattering amplitudes*, in *Theoretical Advanced Study Institute in Elementary Particle Physics: Journeys Through the Precision Frontier: Amplitudes for Colliders*, World Scientific Publishing, Singapore (2015), p. 419; arXiv:1411.7538 [hep-ph].
17. C. Duhr and F. Dulat, *JHEP* **08**, 135 (2019); arXiv:1904.07279 [hep-th].
18. A.B. Goncharov, M. Spradlin, C. Vergu, and A. Volovich, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 151605 (2010); arXiv:1006.5703 [hep-th].
19. A. Gerasimov, A. Morozov, and K. Selivanov, *Int. J. Mod. Phys. A* **16**, 1531 (2001); arXiv:hep-th/0005053.
20. A. Morozov, *AIP Conf. Proc.* **1562**(1), 167 (2013).
21. A. Connes and D. Kreimer, *Commun. Math. Phys.* **199**, 203 (1998); arXiv:hep-th/9808042.
22. S.L. Cacciatori, M. Conti, and S. Trevisan, *Universe* **7**(9), 328 (2021); arxiv:2107.14721 [hep-th].
23. S. Chmutov, M. Kazarian, and S. Lando, *Selecta Mathematica* **26**(3), 1 (2020).