

# Фазовая диаграмма четырехвершинной модели Поттса с конкурирующими обменными взаимодействиями

Д. Р. Курбанова<sup>1)</sup>, А. К. Муртазаев, М. К. Рамазанов, М. А. Магомедов

Институт физики им. Х. И. Амирханова Дагестанского федерального исследовательского центра РАН,  
367015 Махачкала, Россия

Поступила в редакцию 17 марта 2022 г.

После переработки 18 марта 2022 г.

Принята к публикации 18 марта 2022 г.

На основе алгоритма Ванга–Ландау методом Монте-Карло выполнены исследования фазовых переходов и магнитных структур основного состояния двумерной модели Поттса с числом состояний спина  $q = 4$  на треугольной решетке с конкурирующими обменными взаимодействиями первых  $J_1$  и вторых  $J_2$  ближайших соседей. Построена фазовая диаграмма зависимости критической температуры от величины  $J_2$ . Установлено, что переход из ферромагнитной фазы в парамагнитную является фазовым переходом второго рода, в то время как переход из страйповой и страйпово-триплетной фаз в парамагнитную фазу – первого рода. Получены магнитные структуры основного состояния, соответствующие разным областям фазовой диаграммы. Обнаружено, что в интервале  $-1.2 \leq J_2 \leq -0.9$  конкуренция обменных взаимодействий приводит к сильной фрустрации и нарушению магнитного упорядочения.

DOI: 10.31857/S1234567822080080, EDN: fnkohe

**1. Введение.** С момента своего появления модель Поттса сыграла значительную роль в статистической физике [1–3] и в приложениях к различным системам конденсированного состояния [4]. Большинство имеющихся результатов получены для двумерной модели Поттса с числом состояний спина  $q = 2$  и  $q = 3$  [5–8]. В зависимости от числа состояний спина  $q$  и пространственной размерности модель Поттса демонстрирует температурный фазовый переход (ФП) первого или второго рода. Критические свойства и фазовая диаграмма ферромагнитной модели Поттса достаточно хорошо изучены в двумерном случае [4, 9]: при  $q > 4$  система демонстрирует ФП первого порядка, в то время как при  $q \leq 4$  переход непрерывен. Поведение антиферромагнитной модели Поттса считается более сложным, поскольку сильно зависит от микроструктуры решетки. Антиферромагнитная модель Поттса с числом состояний спина  $q = 3$  на треугольной решетке демонстрирует слабый переход первого рода при нулевой температуре [10, 11], обычную конечно-температурную критическую точку на решетке кагоме [12]; на квадратной решетке она имеет критическую точку при нулевой температуре и разупорядочена при любой положительной температуре [13–16]; на наборе плоских четырехугольных решеток, модель либо имеет критическую точку при нулевой температуре, либо имеет

три упорядоченные сосуществующие фазы, в зависимости от того, является ли четырехугольник самодвойственным или нет [17].

Таким образом, можно сказать, что ферромагнитные модели Поттса достаточно хорошо изучены благодаря их универсальности; для антиферромагнитных моделей, ввиду большого разнообразия критического поведения системы, многие вопросы должны быть исследованы в каждом конкретном случае отдельно.

Мы проводим исследования двумерной модели Поттса с числом состояний спина  $q = 4$ , поскольку она довольно уникальна и до сих пор мало изучена. Эта модель может быть использована для описания поведения некоторых классов адсорбированных газов на графите [18]. Данная модель интересна и тем, что значение  $q = 4$  является граничным значением интервала  $q \leq 4$ , где наблюдается ФП второго рода и области значений  $q > 4$ , в котором ФП происходит как переход первого рода [4]. Кроме того, в рассматриваемой модели было обнаружено неоднозначное псевдокритическое поведение [6].

Результаты, полученные для двумерной модели Поттса с числом состояний спина  $q = 3$  и  $q = 4$  на разных типах решеток с конкурирующими обменными взаимодействиями, показывают, что многие физические свойства модели Поттса также зависят от величины взаимодействия вторых соседей  $J_2$  [11, 19–26]. В зависимости от геометрии решетки,

<sup>1)</sup>e-mail: d\_kurbanova1990@mail.ru

при определенных значениях  $J_2$  модель становится фрустрированной [25, 26]. Для модели Поттса на гексагональной решетке фрустрации наблюдаются в интервале  $-0.6 \leq J_2 \leq -0.3$  [25], а на решетке кагоме – при  $J_2 = -0.5$  [26]. Подобные исследования для двумерной модели Поттса с  $q = 4$  на треугольной решетке до сих пор не проводились.

Исследование модели Поттса с числом состояний спина  $q = 4$  на треугольной решетке с конкурирующими обменными взаимодействиями в литературе практически не встречается. Конкуренция обменного взаимодействия в данной модели может привести к фрустрации, вырождению основного состояния, появлению различных фаз и ФП, а также влиять на его термодинамические, магнитные и критические свойства. В связи с этим в данной работе нами предпринята попытка на основе алгоритма Ванга–Ландау (F. Wang and D. P. Landau) метода Монте-Карло (МК) провести исследование ФП, магнитных структур основного состояния и термодинамических свойств этой модели в широком диапазоне величины  $J_2$ . Исследования проводятся на основе современных методов и идей, что позволит получить ответ на ряд вопросов, связанных с природой ФП и термодинамическим поведением фрустрированных спиновых систем и систем с конкурирующими обменными взаимодействиями.

**2. Модель и метод исследования.** Гамильтониан модели Поттса с числом состояний спина  $q = 4$  с учетом взаимодействий первых и вторых ближайших соседей может быть представлен в следующем виде:

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle, i \neq j} S_i S_j - \sum_{\langle i,k \rangle, i \neq k} S_i S_k =$$

$$= -J_1 \sum_{\langle i,j \rangle, i \neq j} \cos \theta_{i,j} - J_2 \sum_{\langle i,k \rangle, i \neq k} \cos \theta_{i,k}, \quad (1)$$

где  $J_1$  и  $J_2$  – параметры обменных ферро- ( $J_1 > 0$ ) и антиферромагнитного ( $J_2 < 0$ ) взаимодействия соответственно для первых и вторых ближайших соседей,  $\theta_{i,j}$ ,  $\theta_{i,k}$  – углы между взаимодействующими спинами  $S_i - S_j$  и  $S_i - S_k$ . Величина взаимодействия вторых соседей менялась в интервале  $-2.0 \leq J_2 \leq \leq 0.0$ .

Схематическое описание данной модели представлено на рис. 1. На вставке приведены направления для каждого из 4 значений спина и соответствующее цветовое представление. На рисунке также представлены взаимодействия между первыми и вто-

рыми ближайшими соседями. Направления спинов заданы таким образом, что выполняется равенство:

$$\theta_{i,j} = \begin{cases} 0, & \text{если } S_i = S_j \\ 109.47^\circ, & \text{если } S_i \neq S_j \end{cases},$$

$$\cos \theta_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{если } S_i = S_j \\ -1/3, & \text{если } S_i \neq S_j \end{cases}. \quad (2)$$

Согласно уравнению (2) для двух спинов  $S_i$  и  $S_j$  энергия парного обменного взаимодействия  $E_{i,j} = -J_1$ , если  $S_i = S_j$ . В случае, когда  $S_i \neq S_j$ , энергия  $E_{i,j} = J_1/3$ . Таким образом, энергия парного взаимодействия спинов равна одной величине при их одинаковом направлении, и принимает другое значение при не совпадении направлений спинов. Для модели Поттса с числом состояний спина  $q = 4$  в трехмерном пространстве такое возможно только при ориентации спинов, как показано на рис. 1.

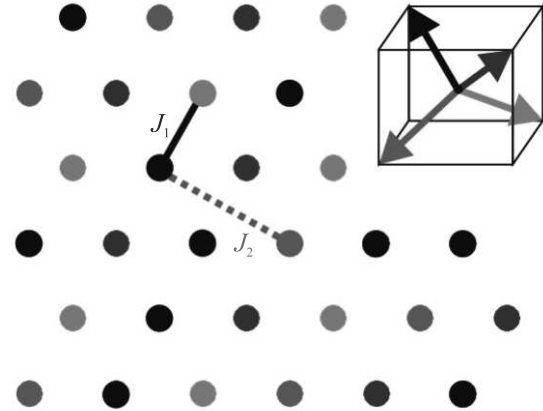


Рис. 1. (Цветной онлайн) Модель Поттса с числом состояний спина  $q = 4$

В настоящее время такие системы на основе микроскопических гамильтонианов успешно изучаются на основе метода МК [27–30]. В последнее время разработано много новых вариантов алгоритмов метода МК. Одним из наиболее эффективных для исследования подобных систем является алгоритм Ванга–Ландау [31, 32], особенно в низкотемпературной области.

Алгоритм Ванга–Ландау является реализацией метода энтропийного моделирования и позволяет вычислить функцию плотности состояний системы. Данный алгоритм основан на том, что совершая случайное блуждание в пространстве энергий с вероятностями, обратно пропорциональными плотности состояний  $g(E)$ , мы получаем равномерное распределение по энергиям. Подбрав вероятности перехода такими, что посещение всех энергетических состояний

стало бы равномерным, можно получить изначально неизвестную плотность состояний  $g(E)$ , зная которую, можно вычислить значения необходимых термодинамических параметров при любой температуре. Так как плотность состояний  $g(E)$  очень быстро растет с увеличением размеров исследуемых систем, для удобства хранения и обработки больших чисел пользуются величиной  $\ln g(E)$ .

Алгоритм Ванга–Ландау был использован нами в следующем виде:

Задается произвольная начальная конфигурация спинов. Стартовые значения плотности состояний  $g(E) = 1$ , гистограммы распределений по энергиям  $H(E) = 0$ , стартовый модификационный фактор  $f = f_0 = e^1 \approx 2.71828$ . Многократно совершаем шаги в фазовом пространстве, пока не получим относительно плоскую гистограмму  $H(E)$  (т.е. пока не будут посещены примерно одинаковое количество раз все возможные энергетические состояния системы). При этом вероятность перехода из состояния с энергией  $E_1$  в состояние с энергией  $E_2$  определяется по формуле  $p = g(E_1)/g(E_2)$ . Если переход в состояние с энергией  $E_2$  состоялся, то  $g(E_2) \rightarrow f \times g(E_2)$ ,  $H(E_2) \rightarrow H(E_2) + 1$ , иначе  $g(E_1) \rightarrow f \times g(E_1)$ ,  $H(E_1) \rightarrow H(E_1) + 1$ . Если гистограмма стала “плоской”, то обнуляем гистограмму  $H(E) \rightarrow 0$ , уменьшаем модификационный фактор  $f \rightarrow \sqrt{f}$  и продолжаем снова, пока  $f \geq f_{\min}$ . Гистограмма считается достаточно плоской, если в ней значение для всех возможных энергетических состояний принимают не менее 90% от общего среднего значения. В нашем случае было принято  $f_{\min} = 1.0000000001$ , что достигается на 34 шаге итерации (модификационный фактор при этом принимает значение  $f = e^{2^{-34}} \approx 1.0000000000582$ ). В стандартный алгоритм Ванга–Ландау нами внесены дополнения, которые позволяют получить магнитную структуру основного состояния системы. При достижении состояния с минимальной энергией (предположительно, основного состояния системы) магнитная структура сохраняется в памяти в виде строки, содержащей значения всех спинов. К примеру, ферромагнитные конфигурации, в которых все спины направлены вдоль одного из четырех направлений, будут представлены как 1111..., 2222..., 3333... или 4444.... При добавлении новой строки она сравнивается с уже имеющимися строками на уникальность. Так как энергетический минимум системы заранее не известен и не будет достигнут на начальных шагах итераций, данная процедура запускается только после 15 итераций. Если в ходе дальнейших расчетов обнаруживается состояние с более низкой энергией, то данное состояние

принимается за основное и массив строк очищается полностью от предыдущих данных. Для экономии вычислительных ресурсов хранятся не более 1000 строк уникальных конфигураций. Процедура является достаточно трудозатратной и эффективна только для систем малых размеров. При моделировании частиц больших размеров данная функция отключается. После завершения расчетов сравнивается количество строк  $N_{\text{string}}$  и округленное до целого значение плотности состояний  $N_{\text{GS}} = \text{Round}(g(E_{\min}))$ . Если основное состояние сильно не вырождено, то мы получим, что  $N_{\text{GS}} = N_{\text{string}}$ . В случае сильного вырождения основного состояния, пример которого приведен на рис. 2b, где для  $L = 120$  мы имеем  $N_{\text{GS}} \approx 10^{3000}$ , данная процедура также полезна, так как показывает сильное вырождение основного состояния и позволяет отображать некоторые из огромного числа всевозможных конфигураций.

Определив плотность состояний системы, можно рассчитать значения термодинамических параметров при любой температуре. В частности, внутреннюю энергию  $U$ , свободную энергию  $F$ , удельную теплоемкость  $C$  и энтропию  $S$  можно вычислить, используя следующие выражения:

$$U(T) = \frac{\sum_E E g(E) e^{-E/k_B T}}{\sum_E g(E) e^{-E/k_B T}} \equiv \langle E \rangle_T, \quad (3)$$

$$F(T) = -k_B T \ln \left( \sum_E g(E) e^{-E/k_B T} \right), \quad (4)$$

$$C = \left( \frac{(|J_1|/k_B T)^2}{N} \right) (\langle U^2 \rangle - \langle U \rangle^2), \quad (5)$$

$$S(T) = \frac{U(T) - F(T)}{T}, \quad (6)$$

где  $N$  – число частиц,  $T$  – температура (здесь и далее температура дана в единицах  $|J_1|/k_B$ ). Расчеты проводились для систем с периодическими граничными условиями и линейными размерами  $L \times L = N$ ,  $L = 12 \div 120$ .

**3. Результаты моделирования.** Алгоритм Ванга–Ландау является эффективным методом для расчета плотности состояния энергии. Преимущество алгоритма заключается в том, что плотность состояний  $g(E)$  в системе не зависит от температуры. Зная плотность состояний системы, можно рассчитать температурную зависимость любого интересующего нас термодинамического параметра.

На рисунке 2a приведены плотности состояний  $g(E)$  системы для разных величин обменного взаимодействия  $J_2$  (здесь и далее статистическая по-

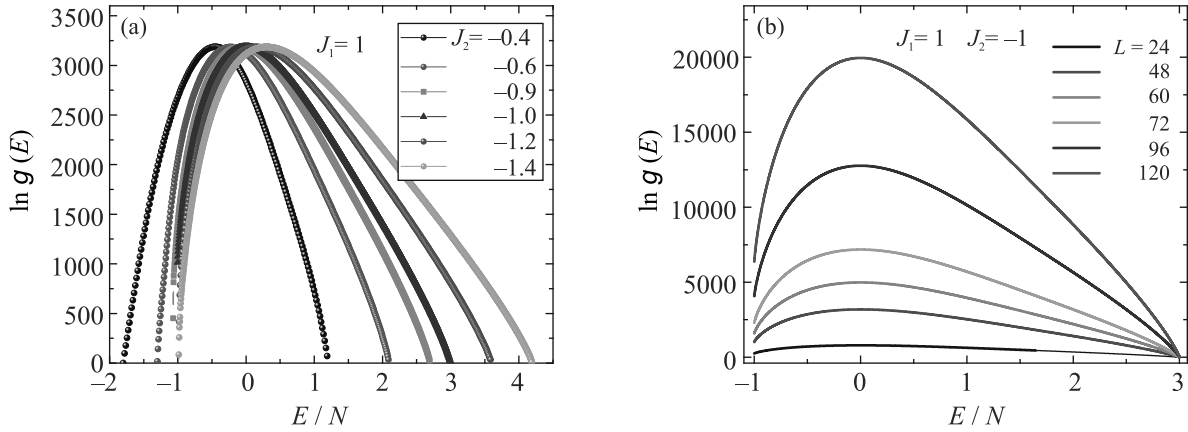


Рис. 2. (Цветной онлайн) (а) – Плотность состояний  $g(E)$  для различных значений  $J_2$ ; (б) – плотность состояний  $g(E)$  для  $J_2 = -1.0$  при различных линейных размерах  $L$

грешность не превышает размеров символов, использованных для построения зависимостей). Плотность состояний имеет куполообразную форму. В интервале  $-1.2 \leq J_2 \leq -0.9$  наблюдается сильное вырождение основного состояния, система становится фрустрированной (область, в которой конкуренция обменных взаимодействий приводит к полному нарушению упорядочения основного состояния). Плотности состояния  $g(E)$  фрустрированной области ( $J_2 = -1.0$ ) при различных линейных размерах системы приведены на рис. 2б. С увеличением линейных размеров системы, плотность состояний  $g(E)$  значительно возрастает, что обусловлено вырождением основного состояния.

Для анализа порядка ФП и определения критической температуры из данных, полученных на основе алгоритма Ванга–Ландау в последние годы успешно используют метод, основанный на разности плотности состояний (DOS) [33–35]:

$$\frac{\Delta \ln g(E)}{\Delta E} = \frac{\ln g(E + \Delta E) - \ln g(E)}{\Delta E}. \quad (7)$$

Системы, демонстрирующие переход первого рода, имеют S-подобную структуру разности DOS. На рисунке 3 видно, что производная от плотности состояний имеет поведение, характерное для ФП первого рода. Температуру перехода  $T_C = 1/\beta_C$ , как и в термодинамике, можно определить по правилу Максвелла. Линия  $\beta_C$  разделяет разницу DOS в двух зонах с одинаковыми площадями  $\beta_C = 3.1058$  (рис. 3). Значение критической температуры, определенное из рис. 3, имеет высокую точность и дает такое же значение, что и другие методы ( $T_C = 1/\beta_C = 0.3219$ ).

Для анализа порядка ФП нами также был использован гистограммный анализ данных метода МК. Гистограммный анализ – один из наиболее

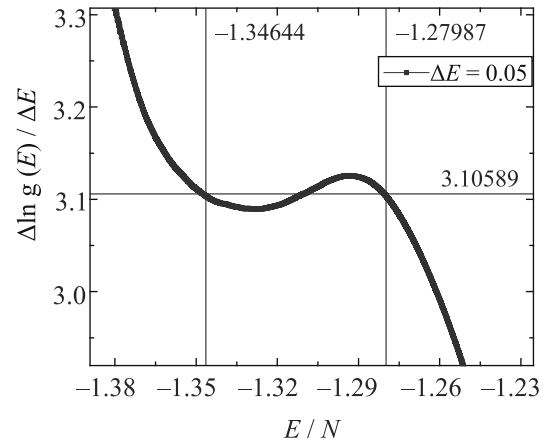


Рис. 3. (Цветной онлайн) Производная от плотности состояний для  $J_2 = -0.6$  при  $L = 60$ . Горизонтальная линия  $\beta_C = 3.1058$  соответствует обратной критической температуре, полученной с помощью правила равных площадей Максвелла  $T_C = 1/\beta_C = 0.3219$

точных методов, позволяющих установить род ФП [29, 30]. На рисунке 4 представлены гистограммы распределения энергии для системы с линейными размерами  $L = 60$ . Графики построены при различных температурах, близких к критической температуре. Видно, что в зависимости вероятности  $W$  от энергии  $E/N$  при критической температуре  $T_C = 0.3219$  и в ее окрестности наблюдаются два максимума. Наличие двойного пика на гистограммах распределения энергии является характерным признаком ФП первого рода. Отметим, что двойные пики на гистограммах распределения для исследуемой модели наблюдаются в интервалах  $-0.8 \leq J_2 \leq 0.0$  и  $-2.0 \leq J_2 \leq -1.3$ .

Однако наличие двойных пиков на гистограммах распределения энергии не является достаточным

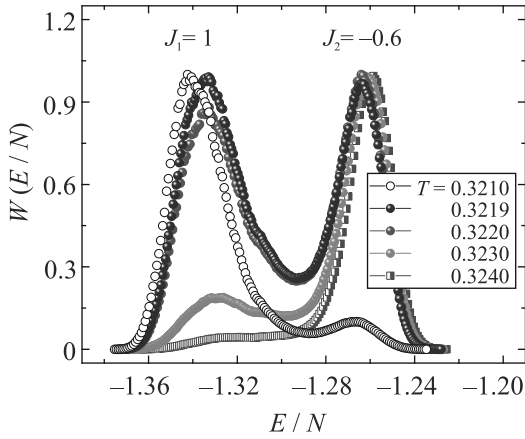


Рис. 4. (Цветной онлайн) Гистограмма распределения энергии для  $J_2 = -0.6$  при  $L = 60$

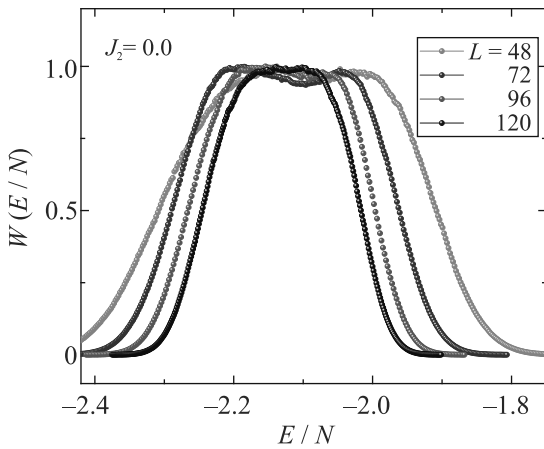


Рис. 5. (Цветной онлайн) Гистограмма распределения энергии для  $J_2 = 0.0$  при различных  $L$

условием существования ФП первого рода. На рисунке 5 представлены гистограммы распределения энергии для систем с линейными размерами  $L = 48; 72; 96$  и  $120$  при  $J_2 = 0.0$ . Видно, что с увеличением линейных размеров системы расстояние между пиками на гистограмме уменьшается и два пика сходятся в один. Такое поведение характерно для систем, в которых наблюдаются фазовые переходы второго рода с признаками переходов первого рода, исчезающие в термодинамическом пределе. Аналогичное поведение на гистограммах распределения энергии наблюдается в интервале  $-0.5 < J_2 \leq 0.0$ . Данные, полученные в ходе исследования, показывают, что расстояние между перегибами функции плотности состояний в этом интервале также уменьшается с ростом линейных размеров решетки. На гистограммах, полученных для интервалов  $-0.8 \leq J_2 \leq -0.5$  и  $-2.0 \leq J_2 \leq -1.3$  с увеличением линейных размеров

пики не сливаются в один, а наоборот, становятся более ярко выраженными, что характерно для ФП первого рода. Таким образом, для исследуемой модели в интервале  $-0.5 < J_2 \leq 0.0$  наблюдается ФП второго рода с признаками перехода первого рода, а в интервалах  $-0.8 \leq J_2 \leq -0.5$  и  $-2.0 \leq J_2 \leq -1.3$  наблюдается ФП первого рода.

Фазовая диаграмма зависимости критической температуры от величины взаимодействия вторых ближайших соседей приведена на рис. 6. На

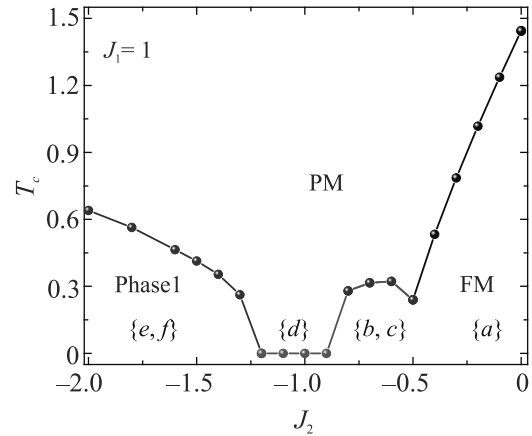


Рис. 6. (Цветной онлайн) Фазовая диаграмма четырехвершинной модели Поттса на треугольной решетке с взаимодействиями вторых ближайших соседей  $J_2$

диаграмме наблюдаются несколько различных фаз: ферромагнитная (FM), парамагнитная (PM), страйповая (в интервале  $-0.8 \leq J_2 \leq -0.5$ ), фрустрированная (в интервале  $-1.2 \leq J_2 \leq -0.9$ ) и Phase 1 (страйпово-триплетная). В интервале значений  $-1.2 \leq J_2 \leq -0.9$  критическая температура равна нулю и ФП отсутствует. Это объясняется тем, что конкуренция обменных взаимодействий первых и вторых ближайших соседей в данном интервале приводит к возникновению сильной фрустрации. Фрустрации нарушают порядок в системе и приводят к исчезновению ФП. Анализ порядка ФП, проведенный для всего рассмотренного интервала  $J_2$ , показывает, что ФП из ферромагнитной фазы в парамагнитную фазу является переходом второго рода, а переход страйповой и страйпово-триплетной фаз в парамагнитную фазу – первого рода. Значения  $J_2$ , при которых система становится фрустрированной, полученные в данном исследовании, не совпадают со значениями, полученными для аналогичной модели на гексагональной решетке ( $-0.6 \leq J_2 \leq -0.3$ ) [25] и на решетке кагоме ( $J_2 = -0.5$ ) [26]. Это позволяет говорить, что в двумерной модели Поттса с  $q = 4$  области, в которых

возникают фрустрированные состояния зависят от типа решетки.

На рисунке 7 представлены магнитные структуры основного состояния, соответствующие различ-

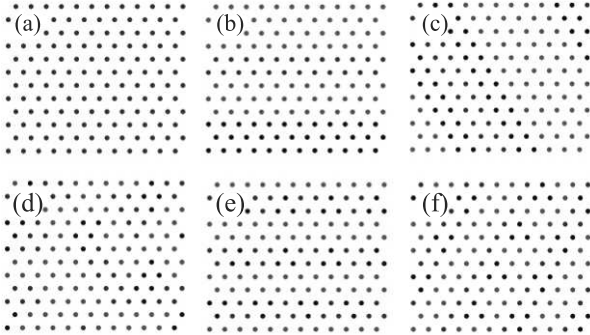


Рис. 7. (Цветной онлайн) Магнитные структуры основного состояния, реализуемые в системе при  $J_1 = 1$  и различных значениях  $J_2$ : (a)  $-0.4 \leq J_2 \leq 0.0$ ; (b), (c)  $-0.8 \leq J_2 \leq -0.5$ ; (d)  $-1.2 \leq J_2 \leq -0.9$ ; (e), (f)  $-2.0 \leq J_2 \leq -1.3$

ным областям фазовой диаграммы. Спины, обозначенные кружками одного и того же цвета, имеют одинаковое направление. На рисунке 7а представлены магнитные структуры основного состояния для  $J_2 = 0.0$ . Основное состояние является ферромагнитным, в котором все спины ориентированы вдоль одного из четырех направлений – система четырехкратно вырождена (для систем любых линейных размеров  $N_{GS} = 4$ ). Такая картина наблюдается в интервале значений  $-0.5 < J_2 \leq 0.0$ . На рисунках 7b и c приведены магнитные структуры основного состояния для случаев  $J_2 = -0.5$  и  $J_2 = -0.7$ . Происходит нарушение ферромагнитного упорядочения. Наблюдается полосовая структура, причем ширина, цвет и направление полос может быть произвольным. Количество состояний пропорционально  $\ln(N_{GS}) \propto L$ . Для  $J_2 = -1.0$  (рис. 7d) учет антиферромагнитных взаимодействий вторых ближайших соседей приводит к полному нарушению магнитного упорядочения. Степень вырождения основного состояния в данном случае  $\ln(N_{GS}) \propto L^2$ . Аналогичная картина наблюдается в диапазоне  $-1.2 \leq J_2 \leq -0.9$ . Выше этой области в интервале  $-2.0 \leq J_2 \leq -1.3$  (рис. 7e, f) в системе возникают триплетные и страйпово-триплетные структуры. Количество состояний пропорционально  $\ln(N_{GS}) \propto L$ .

Таким образом, в зависимости от величины обменного взаимодействия  $J_2$ , с понижением температуры в системе возможны несколько сценариев упорядочения:

1. Триплетное или смешанное страйпово-триплетное состояние (рис. 7e, f) в интервале  $-2.0 \leq J_2 \leq -1.3$ .

2. Фрустрированное неупорядоченное состояние (рис. 7d) в интервале  $-1.2 \leq J_2 \leq -0.9$ .

3. Страйповое состояние (рис. 7b и c) в интервале  $-0.8 \leq J_2 \leq -0.5$ .

4. Упорядоченное ферромагнитное состояние (рис. 7a) при  $J_2 > -0.5$ .

**4. Заключение.** Исследование фазовых переходов, магнитных структур основного состояния и термодинамических свойств двумерной модели Поттса с числом состояний спина  $q = 4$  на треугольной решетке с конкуренцией обменных взаимодействий выполнено с использованием алгоритма Ванга–Ландау метода Монте-Карло. Построена фазовая диаграмма зависимости критической температуры от величины взаимодействия вторых ближайших соседей. Используя метод разности плотности состояний и гистограммный метод, проведен анализ порядка фазовых переходов. Установлено, что переход из ферромагнитной фазы в парамагнитную фазу является переходом второго рода, а переход из страйповой и страйпово-триплетной фаз в парамагнитную фазу – первого рода. В интервале  $-1.2 \leq J_2 \leq -0.9$  наблюдаются сильные эффекты фрустрации, что приводит к нарушению магнитного упорядочения.

Определены магнитные структуры основного состояния, соответствующие различным областям фазовой диаграммы: триплетное или смешанное страйпово-триплетное состояние для фазы 1, неупорядоченное сильно вырожденное состояние для фрустрированной фазы, многослойное слабо вырожденное состояние для страйповой фазы и упорядоченное ферромагнитное состояние для ферромагнитной фазы. Показано, что в зависимости от соотношений обменных взаимодействий между первыми и вторыми ближайшими соседями, основное состояние системы может быть как сильно вырожденным, что свидетельствует о наличии фрустрации в системе, так и слабо вырожденным.

1. С. Е. Коршунов, УФН **176**, 233 (2006).
2. С. С. Сосин, Л. А. Прозорова, А. И. Смирнов, УФН **175**, 92 (2005).
3. G. Toulouse, Commun. Phys. **2**, 115 (1977).
4. F. Y. Wu, Rev. Mod. Phys. **54**, 235 (1982).
5. Zh. Fu, W. Guo, and H. W. J. Blöte, Phys. Rev. E **101**, 012118 (2020).
6. N. Schreiber, R. Cohen, and S. Haber, Phys. Rev. E **97**, 032106 (2018).

7. D. P. Foster and C. Gérard, Phys. Rev. B **70**, 014411 (2004).
8. I. Puha and H. T. Diep, J. Appl. Phys. **87**, 5905 (2000).
9. R. J. Baxter, J. Phys. C **6**, 445 (1973).
10. J. Adler, A. Brandt, W. Janke, and S. Shmulyian, J. Phys. A **28**, 5117 (1995).
11. M. K. Ramazanov, A. K. Murtazaev, and M. A. Magomedov, Physica A **521**, 543 (2019).
12. R. Kotecký, J. Salas, and A. D. Sokal, Phys. Rev. Lett. **101**, 030601 (2008).
13. J. K. Burton Jr. and C. L. Henley, J. Phys. A: Math. Gen. **30**, 8385 (1997).
14. J. Kolafa, J. Phys. A: Math. Gen. **17**, L777 (1984).
15. M. P. M. den Nijs, M. P. Nightingale, and M. Schick, Phys. Rev. B **26**, 2490 (1982).
16. J. Salas and A. D. Sokal, J. Stat. Phys. **92**, 729 (1998).
17. J. P. Lv, Y. Deng, J. L. Jacobsen, and J. Salas, J. Phys. A: Math. Theor. **51**, 365001 (2018).
18. E. Domany, M. Schick, and J. S. Walker, Phys. Rev. Lett. **38**, 1148 (1977).
19. F. A. Kassan-Ogly and A. I. Proshkin, Phys. Solid State **60**, 1090 (2018).
20. Y. Panov and O. Rojas, Phys. Rev. E **103**, 062107 (2021).
21. H. T. Diep, *Frustrated Spin Systems*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore (2004), p. 624.
22. Д. П. Курбанова, А. К. Муртазаев, М. К. Рамазанов, М. А. Магомедов, Т. А. Тааев, ЖЭТФ **158**, 1095 (2020).
23. А. К. Муртазаев, М. К. Рамазанов, М. К. Мазагаева, М. А. Магомедов, ЖЭТФ **156**, 502 (2019).
24. М. К. Рамазанов, А. К. Муртазаев, М. А. Магомедов, М. К. Мазагаева, ФТТ **62**, 442 (2020).
25. А. К. Муртазаев, М. К. Мазагаева, М. К. Рамазанов, М. А. Магомедов, А. А. Муртазаева, ФТТ **63**, 622 (2021).
26. M. K. Ramazanov, A. K. Murtazaev, M. A. Magomedov, T. R. Rizvanova, and A. A. Murtazaeva, Low Temp. Phys. **47**, 396 (2021).
27. Л. Е. Свистов, А. И. Смирнов, Л. А. Прозорова, О. А. Петренко, А. Я. Шапиро, Л. Н. Демьянец, Письма в ЖЭТФ **80**, 231 (2004).
28. А. О. Сорокин, Письма в ЖЭТФ **109**, 423 (2019).
29. А. О. Сорокин, Письма в ЖЭТФ **111**, 34 (2020).
30. D. P. Landau and K. Binder, *Monte Carlo Simulations in Statistical Physics*, Cambridge University Press, Cambridge (2000).
31. F. Wang and D. P. Landau, Phys. Rev. E **64**, 056101 (2001).
32. C. Zhou and R. N. Bhatt, Phys. Rev. E **72**, 025701 (2005).
33. F. Wang and D. P. Landau, Phys. Rev. Lett. **86**, 2050 (2001).
34. F. Wang and D. P. Landau, Phys. Rev. E **64**, 056101 (2001).
35. Y. Komura and Y. Okabe, Phys. Rev. E **85**, 010102 (2012).