

Статический казимировский конденсат биспинорного поля во вселенной Фрийдмана

А. Б. Арбузов^{+*1)}, С. М. Гайдар[×], А. Е. Павлов[×]

⁺Объединенный институт ядерных исследований, 141980 Дубна, Россия

^{*}Государственный университет “Дубна”, 141982 Дубна, Россия

[×]Российский государственный аграрный университет – МСХА им. К. А. Тимирязева, Институт механики и энергетики, 127434 Москва, Россия

Поступила в редакцию 9 февраля 2022 г.

После переработки 3 марта 2022 г.

Принята к публикации 3 марта 2022 г.

Квантовый казимировский конденсат массивного биспинорного в компактной вселенной Фрийдмана вычислен в статическом приближении. Для ренормировки расходящихся рядов использована формула Абеля–Плана.

DOI: 10.31857/S1234567822070023, EDN: fktmny

1. Введение. Квантовый конденсатный механизм происхождения массы бозона Хиггса без явного нарушения конформной симметрии был предложен в статье [1]. В этой конструкции конденсат топ-кварков заменяет тахионный массовый член в феноменологическом потенциале Хиггса. Значение кваркового конденсата не может быть напрямую вычислено в рамках КХД, поскольку соответствующие ему интегралы расходятся и требуют перенормировки с привлечением каких-либо дополнительных условий, например, экспериментальных данных. Нетривиальность топологии пространства может задать требуемое нам условие перенормировки в расчетах. Существуют различные эффективные методы регуляризации и перенормировки ультрафиолетовых расходимостей [2]. Первый такой последовательный метод был разработан в статье Я. Б. Зельдовича и А. А. Старобинского [3] в более общем случае анизотропной космологической модели типа I по Бианки, который совпадает с методом, позднее предложенным в статье [4]. Для случая топологического эффекта Казимира извлечение конечного значения фермионного конденсата можно достичь вычитанием из расходящейся суммы, определенной в пространстве-времени Фрийдмана соответствующего расходящегося интеграла, определенного в касательном пространстве Минковского. С этой целью применяется формула Абеля–Плана из теории аналитических функций, примененная впервые в космологическом контексте в работе [5], см. также книгу [6]. Конденсат

Казимира конформного массивного скалярного поля в компактной фрийдмановской вселенной в статическом приближении был ранее вычислен в работе [7].

2. Конформное массивное биспинорное поле. Конформная метрика пространства-времени вселенной Фрийдмана $\mathcal{M} = \mathbb{R}^1 \times S^3$ имеет вид

$$ds^2 = a^2(\eta) (-d\eta^2 + d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)), \quad (1)$$

где η – конформное время; $a(\eta)$ – конформный масштабный фактор, имеющий смысл радиуса трехмерной сферы S^3 ; χ , θ и ϕ – угловые координаты сферы. Выполним преобразование к конформной метрике $\tilde{g}_{\mu\nu}(x)$ и конформному биспинорному полю $\tilde{\psi}(x)$ согласно их конформным весам:

$$g_{\mu\nu}(x) = (a(\eta)/a_0)^2 \tilde{g}_{\mu\nu}(x), \quad \psi(x) = (a_0/a(\eta))^{3/2} \tilde{\psi}(x). \quad (2)$$

Канонический гамильтониан частиц с растущей массой в статическом пространстве приводит к конечным значениям плотности создаваемых частиц [8]. Современная диаграмма Хаббла интерпретируется в конформных переменных без введения так называемой темной энергии [9, 10]. Статический пространственно-временной интервал отвечает вселенной с современным радиусом a_0

$$d\tilde{s}^2 = a_0^2 (-d\eta^2 + d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)) \quad (3)$$

с кривизной $\tilde{R} = 6/a_0^2$. Переход к конформным переменным приводит к наблюдаемым величинам с регулярным поведением при $a = 0$. Теперь задача формулируется для биспинорного поля с массой (ma) в

¹⁾e-mail: arbuzov@theor.jinr.ru

статической вселенной Эйнштейна $\mathbb{R}^1 \times S^3$, где S^3 – сфера радиуса a_0 .

Уравнение Дирака для массивного биспинорного поля $\psi(x)$ в пространстве-времени Фридмана [2] имеет вид

$$\begin{aligned} \gamma^0 \left(\frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{3a'}{2a} \right) \psi(x) + \gamma^1 \left(\frac{\partial}{\partial \chi} + \cot \chi \right) \psi(x) + \\ + \gamma^2 \frac{1}{\sin \chi} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \cot \theta \right) \psi(x) + \\ + \gamma^3 \frac{1}{\sin \chi \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \psi(x) + iam \psi(x) = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где используются матрицы Дирака в стандартном представлении. Штрих означает дифференцирование по конформному времени η . Для разделения переменных возьмем анзац [6]

$$\tilde{\psi}_J(x) = \begin{pmatrix} f_{\lambda+}(\eta)I & 0 \\ 0 & f_{\lambda-}(\eta)I \end{pmatrix} N_J(\chi, \theta, \phi), \quad (5)$$

где I – единичная матрица (2×2); $N_J(\chi, \theta, \phi) = (N_1, N_2, N_3, N_4)^T$ – биспинор с комбинированным индексом $J \equiv \{\lambda, j, l, M\}$:

$$\begin{aligned} \lambda = 3/2, 5/2, \dots; \quad j = 1/2, 3/2, \dots, \\ \lambda - 1; \quad l = j \pm 1/2; \quad -j \leq M \leq j. \end{aligned} \quad (6)$$

Переменные $f_{\lambda+}$ и $f_{\lambda-}$ как функции конформного времени подчиняются осцилляторным уравнениям второго порядка

$$\begin{aligned} f''_{\lambda\pm} + (\omega_\lambda^2(\eta) \pm ima'(\eta)) f_{\lambda\pm} = 0, \\ \omega^2(\eta) \equiv \lambda^2 + m^2 a^2(\eta). \end{aligned} \quad (7)$$

После подстановки (5) уравнение Дирака (4) принимает вид

$$\begin{aligned} -i\lambda \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} N_J + \\ + \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ -\sigma_1 & 0 \end{pmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial \chi} + \cot \chi \right) N_J + \\ + \frac{1}{\sin \chi} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ -\sigma_2 & 0 \end{pmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \cot \theta \right) N_J + \\ + \frac{1}{\sin \chi \sin \theta} \begin{pmatrix} 0\sigma_3 & \\ -\sigma_3 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial N_J}{\partial \phi} = 0, \end{aligned}$$

где были использованы матрицы Паули σ_i .

3. Казимировский конденсат массивного биспинорного поля. Чтобы оценить вакуумное

среднее фермионного поля (его конденсат), разложим оператор поля в виде полного набора собственных спиноров с положительной и отрицательной частотой. Затем оператор квантового поля комбинируется как сумма

$$\tilde{\psi}(x) = \sum_J \left(\tilde{\psi}_J^{(+)}(x) \hat{a}_J + \tilde{\psi}_J^{(-)}(x) \hat{b}_J^+ \right). \quad (8)$$

Здесь \hat{a}_J – оператор уничтожения частиц и \hat{b}_J^+ – оператор рождения античастиц. Мы определяем квантовый конденсат Казимира как вакуумное среднее значение двух операторов в одной точке. После использования стандартных антикоммутиационных соотношений мы получаем следующую формулу суммы мод:

$$\begin{aligned} \langle 0 | \tilde{\psi}(x) \tilde{\psi}(x) | 0 \rangle &= \sum_J \bar{\tilde{\psi}}_J^{(-)}(x) \tilde{\psi}_J^{(-)}(x) = \\ &= \sum_J \psi_J^{(-)+}(x) \gamma^0 \psi_J^{(-)}(x), \end{aligned} \quad (9)$$

где $\bar{\psi} \equiv \psi^+ \gamma^0$. Согласно (9) можно заключить, что казимировский конденсат образован виртуальными античастицами. Представим сумму (9) в матричном виде

$$\begin{aligned} \sum_J N_J^+(\chi, \theta, \phi) \begin{pmatrix} f_{\lambda+}^{(-)}(\eta)I & 0 \\ 0 & f_{\lambda-}^{(-)}(\eta)I \end{pmatrix} \gamma^0 \times \\ \times \begin{pmatrix} f_{\lambda+}^{(-)}(\eta)I & 0 \\ 0 & f_{\lambda-}^{(-)}(\eta)I \end{pmatrix} N_J(\chi, \theta, \phi). \end{aligned} \quad (10)$$

Ограничим наше внимание чисто статическим вкладом в квантовый конденсат и рассмотрим случай квазистатического состояния ($a' = 0$) [2]. Решения с положительной и отрицательной частотой следующие:

$$\begin{aligned} f_{\lambda\pm}^{(+)}(\eta) &= \pm \sqrt{\frac{\omega \mp ma}{\omega}} e^{i\omega\eta}, \\ f_{\lambda\pm}^{(-)}(\eta) &= \sqrt{\frac{\omega \pm ma}{\omega}} e^{-i\omega\eta}. \end{aligned} \quad (11)$$

Отрицательно-частотные решения (11) удовлетворяют равенству

$$|f_{\lambda+}^{(-)}|^2 - |f_{\lambda-}^{(-)}|^2 = 2ma/\omega. \quad (12)$$

Применим формулу суммирования по квантовым числам для дальнейших расчетов квантового конденсата:

$$\sum_{j,l,M} \psi_J^{(\pm)+}(x) \psi_J^{(\pm)}(x) = \frac{1}{\pi^2 a^3} \left(\lambda^2 - \frac{1}{4} \right). \quad (13)$$

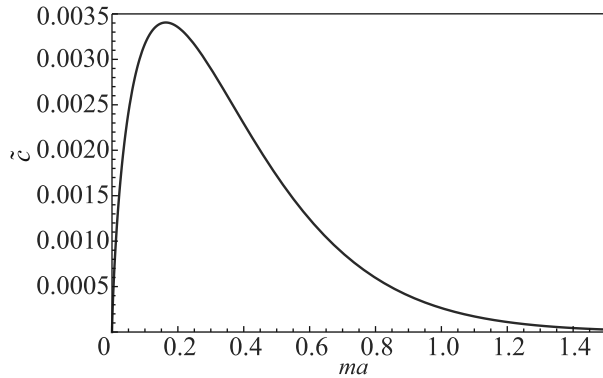


Рис. 1. (Цветной онлайн) Казимировский конденсат массивного фермионного поля как функция переменной массы частицы ma

Суммируя по квантовым числам, получаем расходящийся ряд

$$\langle 0 | \bar{\psi}(x) \psi(x) | 0 \rangle = \frac{ma}{\pi^2} \sum_{\lambda=3/2, 5/2, \dots}^{\infty} \frac{\lambda^2 - 1/4}{\sqrt{\lambda^2 + m^2 a^2}}. \quad (14)$$

Формула Абеля–Плана для перенормировки аналитической функции [2]

$$\begin{aligned} \text{ren} \sum_{\lambda=0}^{\infty} F(\lambda + 1/2) &\equiv \sum_{\lambda=0}^{\infty} F(\lambda + 1/2) - \\ &- \int_0^{\infty} dt F(t) = -i \int_0^{\infty} dt \frac{F(it) - F(-it)}{\exp(2\pi t) + 1} \end{aligned} \quad (15)$$

применяется в случае суммирования с полуцелыми числами. В случае трехмерного евклидова пространства, касательного к S^3 , мы имеем топологический эффект Казимира, который приводит к перенормированному результату в виде следующего сходящегося интеграла:

$$\begin{aligned} \tilde{c} &:= \langle 0 | \bar{\psi}(x) \psi(x) | 0 \rangle^{\text{ren}} = \\ &= 2 \frac{ma}{\pi^2} \int_{ma}^{\infty} \frac{d\lambda (\lambda^2 + 1/4)}{\sqrt{\lambda^2 - m^2 a^2} (\exp(2\pi\lambda) + 1)}. \end{aligned} \quad (16)$$

В нижнем пределе интегрирования (16) стоит зависящая от масштабного фактора безразмерная масса фермиона ma . Зависимость от этой массы конформного конденсата Казимира $\tilde{c} = \tilde{c}(ma)$ показана на рис. 1.

4. Заключение. Таким образом, мы вычислили конденсат биспинорного поля во фридмановской вселенной как функцию масштабного фактора. Топологические условия Казимира в выбранной нами метрике позволили перенормировать расходящийся ряд и получить конечный конкретный ответ для искомой величины. Проведенные вычисления выполнены с использованием методов, описанных в книге [6], и дополняют представленные там результаты. Полученный нами результат будет использован для описания эволюции полей в ранней вселенной. Прямое использование нашего результата для вычисления кварковых конденсатов в КХД невозможно в силу необходимости учета там динамики сильных взаимодействий и нарушения конформной инвариантности.

1. A. B. Arbuzov, R. G. Nazmitdinov, A. E. Pavlov, V. N. Pervushin, and A. F. Zakharov, *EPL* **113**, 31001 (2016).
2. В. М. Мостепаненко, Н. Н. Трунов, *Эффект Казимира и его приложения*, Энергоатомиздат, М. (1990).
3. Я. Б. Зельдович, А. А. Старобинский, *ЖЭТФ* **61**, 2161 (1971).
4. L. Parker and S. A. Fulling, *Phys. Rev. D* **9**, 341 (1974).
5. С. Г. Мамаев, В. М. Мостепаненко, А. А. Старобинский, *ЖЭТФ* **70**, 1577 (1976).
6. А. А. Гриб, С. Г. Мамаев, В. М. Мостепаненко, *Вакуумные квантовые эффекты в сильных полях*, Энергоатомиздат, М. (1988).
7. A. B. Arbuzov and A. E. Pavlov *Mod. Phys. Lett. A* **33**, 1850162 (2018).
8. A. A. Grib and Yu. V. Pavlov, *Grav. Cosmol.* **22**, 107 (2016).
9. A. F. Zakharov and V. N. Pervushin, *Int. J. Mod. Phys. D* **19**, 1875 (2010).
10. A. E. Pavlov, *RUDN J. Math. Inform. Sc. Phys.* **25**, 390 (2017).