Письма в ЖЭТФ, том 115, вып. 7, с. 411 – 416

π^0-η -η' смешивание в теории с четырехкварковыми взаимодействиями

А. А. Осипов[1)]

Объединенный институт ядерных исследований, 141980 Дубна, Россия

Поступила в редакцию 27 февраля 2022 г.
После переработки 27 февраля 2022 г.
Принята к публикации 10 марта 2022 г.

Массовые формулы, углы смешивания и константы распада псевдоскалярных π^0, η и η' мезонов получены в теории с четырехкварковыми взаимодействиями с точностью до членов $\mathcal{O}(1/N_c^2)$ включительно. В отличие от стандартной модели Намбу–Иона-Лазинио, при получении мезонного лагранжиана используется ряд Вольтерры, что ведет к более детальному описанию эффектов, вызванных неравенством кварковых масс. Проводится сравнение с результатами аналогичных вычислений в $1/N_c$ киральной теории возмущений. Вычислены первые поправки к взаимодействию, нарушающему правило Цвейга, и показана их важность в описании спектра η-η'мезонов.

DOI: 10.31857/S1234567822070011, EDN: fksjyj

1. Введение. В работах [1, 2] для изучения свойств псевдоскалярного нонета мезонов использовался лагранжиан, эффективные вершины которого классифицируются по степеням импульсов, масс легких кварков и обратному числу цветовых степеней свободы $1/N_c$. Метод, получивший название $1/N_c$ киральной теории возмущений [3], позволил вычислить первую поправку к основному результату алгебры токов для массовых формул заряженных и обладающих ненулевой странностью псевдоскалярных мезонов, показать, что поправка мала (в то время имелись противоречия в описании распада $\eta \to 3\pi$), и установить ограничения на массы легких кварков. Позднее метод был распространен на состояния со спином единица [4]. В качестве свежих результатов, полученных на основе данного эффективного лагранжиана, отметим анализ двухфотонных распадов π^0, η и η' мезонов, учитывающий поправки как первого, так и второго порядка по $1/N_c$ [5].

Недавно было показано [6], что теория с четырехкварковыми взаимодействиями типа Намбу–Иона-Лазинио (НИЛ) [7, 8] приводит к тем же массовым формулам для псевдоскалярных $\pi^\pm$, $K^\pm$, K^0 и $\bar{K}^0$ мезонов, что и [1]. При этом удается связать параметры эффективной теории Лойтвиллера с параметрами динамической модели НИЛ. Достигается это путем замены ряда Тейлора (по степеням собственного времени) на ряд Вольтерры при разложении эффективного действия модели НИЛ по обратным степеням масс конституентных кварков [9–11]. Дополнительно используется гипотеза Лойтвиллера о поведении масс легких кварков m_i $(i = u, d, s)$ в пределе больших значений N_c, а именно, $m_i = \mathcal{O}(1/N_c)$.

Целью настоящей статьи является изучение физических характеристик оставшихся членов нонета: π^0, η, η'-мезонов, для которых мы вычисляем, с точностью до первой поправки по $1/N_c$ включительно, массы, углы смешивания, оцениваем константу аномального нарушения $U(1)_A$ симметрии, а также степень нарушения правила Окубо–Цвейга–Изуки (ОЦИ). Последние два вопроса представляют особенный интерес в связи с изучением глюонной структуры η и η' мезонов, которая активно исследуется в настоящее время с различных точек зрения (см., например, [12], где применяется дисперсионный подход к изучению аксиальной аномалии). Используемый нами формализм остается тем же, что и в работе [6]. Это, в частности, касается и численных значений параметров модели, зафиксированных в [6].

2. Модифицированная модель НИЛ. Исходный четырехкварковый лагранжиан, используемый нами, ничем не отличается от стандартной кварковой версии модели НИЛ [13–16]

$$\mathcal{L} = \bar{q}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)q + \mathcal{L}_{\rm int}. \tag{1}$$

Здесь γ^μ – матрицы Дирака, q – кварковые поля, а m – диагональная матрица $m = \mathrm{diag}(m_u, m_d, m_s)$, содержащая токовые массы u, d и s кварков. Плотность Лагранжа имеет вид $\mathcal{L}_{\rm int} = \mathcal{L}^{(0)} + \mathcal{L}^{(1)}$, где сумма включает $U(3)_L \times U(3)_R$ кирально симметричные комбинации, описывающие четырехкварковые взаимодействия со спином ноль и единица

[1)]e-mail: aaosipov@jinr.ru

$$\mathcal{L}^{(0)} = \frac{G_S}{2}\left[(\bar{q}\lambda_a q)^2 + (\bar{q}i\gamma_5\lambda_a q)^2\right], \quad (2)$$

$$\mathcal{L}^{(1)} = -\frac{G_V}{2}\left[(\bar{q}\gamma^\mu\lambda_a q)^2 + (\bar{q}\gamma^\mu\gamma_5\lambda_a q)^2\right], \quad (3)$$

где матрица $\lambda_0 = \sqrt{2/3}$, а λ_i – матрицы Гелл-Манна. Константы G_S и G_V при $N_c \to \infty$ имеют порядок $\mathcal{O}(1/N_c)$. Их численные значения были установлены в работе [6]: $G_S = 6.6\,\text{ГэВ}^{-2}$, $G_V = 6.8\,\text{ГэВ}^{-2}$.

Метод функционального интеграла позволяет преобразовать лагранжеву плотность (1) к виду

$$\mathcal{L}' = \bar{Q}(i\gamma^\mu d_\mu - M + \sigma)Q + \frac{1}{4G_V}\mathrm{tr}(V_\mu^2 + A_\mu^2) - - \frac{1}{4G_S}\mathrm{tr}\left(\sigma^2 - \{\sigma, M\} + (\sigma - M)\Sigma\right), \quad (4)$$

где мы воспользовались функциональной свободой выбора динамических переменных в пользу нелинейной реализации киральной симметрии. При этом векторные, аксиально-векторные, скалярные и псевдоскалярные поля описываются эрмитовыми матрицами $V_\mu = V_\mu^a\lambda_a$, $A_\mu = A_\mu^a\lambda_a$, $\sigma = \sigma_a\lambda_a$, $\phi = \phi_a\lambda_a$, а кварковые поля $Q = (\xi P_R + \xi^\dagger P_L)q$, где $P_{L,R} = (1 \mp \gamma_5)/2$, принадлежат фундаментальному представлению. Остальные обозначения имеют вид

$$d_\mu = \partial_\mu - i\left[\xi_\mu^{(+)} + V_\mu + \gamma_5\left(\xi_\mu^{(-)} + A_\mu\right)\right], \quad (5)$$

$$\xi_\mu^{(\pm)} = \frac{i}{2}\left(\xi\partial_\mu\xi^\dagger \pm \xi^\dagger\partial_\mu\xi\right), \quad (6)$$

$$\Sigma = \xi m\xi + \xi^\dagger m\xi^\dagger, \quad \xi = \exp\left(\frac{i}{2}\,\phi\right). \quad (7)$$

Псевдоскалярное поле ϕ безразмерно, позднее, при переходе к полевым функциям физических состояний, оно приобретет необходимую размерность массы. Элементами матрицы $M = \mathrm{diag}(M_u, M_d, M_s)$ являются массы конституентных кварков Q. Эти массы возникают в результате динамического нарушения симметрии и связаны с массами легких кварков уравнением щели

$$M_i\left(1 - \frac{N_c G_S}{2\pi^2}J_0(M_i)\right) = m_i \quad (i = u, d, s), \quad (8)$$

где

$$J_0(M_i) = \Lambda^2 - M_i^2\ln\left(1 + \frac{\Lambda^2}{M_i^2}\right). \quad (9)$$

Параметр обрезания Λ характеризует масштаб, на котором изучается рассматриваемая эффективная теория. В данном случае это масштаб адронных масс, который приблизительно равен $\Lambda = 1.1\,\text{ГэВ}$.

Математически уравнение щели является условием минимума эффективного потенциала, который, как и кинетическая часть эффективного действия, получаются в результате интегрирования по кварковым полям Q. Последнее дает кварковый детерминант, локальная часть которого описывается первыми членами его асимптотического разложения в ряд по степеням собственного времени. Неравенство кварковых масс приводит к проблеме, связанной с учетом разностных эффектов $M_i - M_j$. Для решения этой задачи было предложено асимптотическое разложение по обратным степеням тяжелых масс, которое основывается на ряде Вольтерры [11]. Именно в этом месте наши вычисления расходятся со стандартным подходом, традиционно использующим ряд Тейлора. Разница существенная, поскольку ряд Вольтерры содержит большое число конечных (при $\Lambda \to \infty$) вершин, обращающихся в нуль в пределе равных кварковых масс. Эти вершины содержат важную дополнительную информацию о нарушениях изоспиновой и флейворной симметрии, отсутствующую в стандартном мезонном лагранжиане модели НИЛ.

Если кварки массивны, то возникает смешивание псевдоскалярных полей с аксиально-векторными. Для устранения смешивания необходимо переопределить аксиально-векторные поля [17]

$$A_\mu = A'_\mu - \kappa_A \circ \xi_\mu^{(-)}, \quad (10)$$

где κ_A – матрица, а символ $\circ$ означает адамаровское произведение матриц [18], которое определяется почленным умножением соответствующих элементов матриц $(A \circ B)_{ij} = A_{ij}B_{ij}$ без суммирования по повторяющимся индексам.

Нам здесь потребуются только диагональные элементы матрицы κ_A, которые имеют вид

$$(\kappa_A)_{ii}^{-1} = 1 + \frac{\pi^2}{N_c G_V M_i^2 J_1(M_i)}, \quad (11)$$

где

$$J_1(M) = \ln\left(1 + \frac{\Lambda^2}{M^2}\right) - \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 + M^2}. \quad (12)$$

Кварковый детерминант содержит кинетические члены лагранжиана свободных мезонных полей. Они примут канонический вид после соответствующего переопределения переменных

$$\phi_i = f_i^{-1}\,\phi_i^{\mathrm{R}} \quad (i = u, d, s), \quad (13)$$

где связь компонент $\phi_{u,d,s}$ с компонентами $\phi_{0,3,8}$, так же как и связь между компонентами $\phi_{u,d,s}^{\mathrm{R}}$ и $\phi_{0,3,8}^{\mathrm{R}}$, стандартна. Новые полевые переменные отмечены индексом R и, как легко видеть, имеют размерность массы, поскольку константы $f_i \sim \mathcal{O}(\sqrt{N_c})$ равны

$$f_i = \sqrt{\frac{(\kappa_A)_{ii}}{4G_V}}. \tag{14}$$

В результате получаем

$$\mathcal{L}_{\rm kin} = \frac{1}{4}\sum_{i=u,d,s}(\partial_\mu \phi_i^{\rm R})^2 = \frac{1}{2}\sum_{a=0,3,8}(\partial_\mu \phi_a^{\rm R})^2. \tag{15}$$

Массовая часть лагранжиана (4) диагональна, если используется флейворный базис

$$\mathcal{L}_{\phi^2} = -\frac{G_V}{G_S}\sum_{i=u,d,s}\frac{M_i m_i}{(\kappa_A)_{ii}}\left(\phi_i^{\rm R}\right)^2. \tag{16}$$

Однако, физические π^0, η и η' мезоны не являются чистыми флейворными состояниями. Поэтому удобно перейти к синглет-октетным компонентам $0,3,8$. В этом базисе недиагональные элементы массовой матрицы равны нулю только в случае точной $SU(3)_f$ симметрии. Итак, находим

$$\mathcal{L}_{\phi^2} = -\frac{1}{2}\sum_{a=0,3,8}\phi_a^{\rm R} m_{ab}^2 \phi_b^{\rm R}, \tag{17}$$

где элементы симметричной матрицы m_{ab}^2 имеют вид

$$\begin{aligned}
m_{00}^2 &= \frac{4G_V}{3G_S}\sum_{i=u,d,s}\frac{M_i m_i}{(\kappa_A)_{ii}},\\
m_{88}^2 &= \frac{2G_V}{3G_S}\left(\frac{M_u m_u}{(\kappa_A)_{uu}} + \frac{M_d m_d}{(\kappa_A)_{dd}} + 4\frac{M_s m_s}{(\kappa_A)_{ss}}\right),\\
m_{33}^2 &= \frac{2G_V}{G_S}\left(\frac{M_u m_u}{(\kappa_A)_{uu}} + \frac{M_d m_d}{(\kappa_A)_{dd}}\right),\\
m_{08}^2 &= \frac{2\sqrt{2}G_V}{3G_S}\left(\frac{M_u m_u}{(\kappa_A)_{uu}} + \frac{M_d m_d}{(\kappa_A)_{dd}} - 2\frac{M_s m_s}{(\kappa_A)_{ss}}\right),\\
m_{03}^2 &= \frac{2\sqrt{2}G_V}{\sqrt{3}G_S}\left(\frac{M_u m_u}{(\kappa_A)_{uu}} - \frac{M_d m_d}{(\kappa_A)_{dd}}\right),\\
m_{38}^2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}m_{03}^2.
\end{aligned} \tag{18}$$

Здесь необходимо учесть два важных обстоятельства: $U(1)_A$ аномалию и нарушение правила ОЦИ. Оба феномена объясняются в рамках $1/N_c$ разложения [19–21]. Их лидирующий вклад имеет порядок $\mathcal{O}(1/N_c)$, т.е., тот же самый порядок, что и лидирующий вклад в (18), где $m_i \sim \mathcal{O}(1/N_c)$. Лагранжианы, отвечающие этим процессам, имеют вид произведения двух шпуров. На кварк-глюонном уровне такой вклад возникает от диаграмм с кварковыми петлями, связанными посредством глюонного обмена.

Лагранжиан, нарушающий $U(1)_A$ симметрию, был получен в работе [22] (см. также [23]). Мы воспользуемся этим результатом, положив

$$\mathcal{L}_V = \frac{\lambda_V}{48}\left[\mathrm{tr}\left(\ln\xi\xi - \ln\xi^\dagger\xi^\dagger\right)\right]^2 = -\frac{\lambda_V}{2F^2}(\phi_0^R)^2. \tag{19}$$

Размерная константа λ_V фиксируется, исходя из физических масс псевдоскалярных мезонов и в пределе $N_c \to \infty$, не изменяется $\lambda_V = \mathcal{O}(N_c^0)$.

За нарушение правила ОЦИ отвечает лагранжиан [1]

$$\mathcal{L}_Z = \frac{i\lambda_Z}{\sqrt{6}}\,\mathrm{tr}(\phi)\,\mathrm{tr}\left[\chi(\xi^\dagger\xi^\dagger - \xi\xi)\right], \tag{20}$$

где $\lambda_Z = \mathcal{O}(N_c)$ – размерная константа, а матрица $\chi = 2Bm$ имеет вид

$$\chi = \frac{4G_V}{G_S}\mathrm{diag}\left(\frac{M_u m_u}{(\kappa_A)_{uu}}, \frac{M_d m_d}{(\kappa_A)_{dd}}, \frac{M_s m_s}{(\kappa_A)_{ss}}\right). \tag{21}$$

Его квадратичная часть ведет к смешиванию

$$\mathcal{L}_Z \to 8\lambda_Z\frac{G_V}{G_S}\,\phi_0\sum_{i=u,d,s}\frac{M_i m_i}{(\kappa_A)_{ii}}\,\phi_i. \tag{22}$$

Нефизические поля ϕ_0 и ϕ_i необходимо заменить на физические (13). Так для поля ϕ_0 находим

$$\begin{aligned}
\phi_0 &= \frac{\phi_0^{\rm R}}{3}\left(\frac{1}{f_u} + \frac{1}{f_d} + \frac{1}{f_s}\right) + \frac{\phi_3^{\rm R}}{\sqrt{6}}\left(\frac{1}{f_u} - \frac{1}{f_d}\right) + \\
&+ \frac{\phi_8^{\rm R}}{3\sqrt{2}}\left(\frac{1}{f_u} + \frac{1}{f_d} - \frac{2}{f_s}\right) = \frac{\phi_0^{\rm R}}{F} + \mathcal{O}(N_c^{-\frac{3}{2}}).
\end{aligned} \tag{23}$$

Отсюда следует, что выход за рамки лидирующего приближения в (22) влечет дополнительное смешивание между нейтральными компонентами, индуцированное нарушениями изоспиновой и $SU(3)_f$ симметрий.

Далее мы выделим из полученных выше формул первые члены в их разложении в ряд по $1/N_c$. Здесь мы сделаем только два первых шага, а именно представим элементы массовой матрицы физических состояний в виде лидирующего вклада (LO), который имеет порядок $\mathcal{O}(1/N_c)$ и первой поправки (NLO) к нему $\mathcal{O}(1/N_c^2)$. Вычисление второй поправки (NNLO) требует дополнительного рассмотрения мезонных однопетлевых вкладов, что выходит за рамки данной работы.

3. $1/N_c$ разложение. Шесть параметров модели Λ, G_S, G_V, m_i удовлетворяют следующим правилам счета: $\Lambda \sim \mathcal{O}(1)$, $G_S, G_V, m_i \sim \mathcal{O}(1/N_c)$. Первый из них определяет характерный энергетический масштаб, остальные малы по сравнению с ним. Это позволяет осуществить систематическое разложение эффективной теории по степеням $1/N_c$.

Начнем с уравнения щели (8), решение которого будем искать в виде

$$M_i(m_i) = M_0 + M'(0)\, m_i + \mathcal{O}(m_i^2), \tag{24}$$

где M_0 – решение уравнения при больших значениях N_c. Тогда находим

$$M'(0) = \frac{\pi^2}{N_c G_S M_0^2 J_1^0} = \frac{G_V}{G_S}\left(\kappa_{A0}^{-1} - 1\right) \equiv a. \tag{25}$$

Здесь и далее индекс 0 у знака функции, зависящей от кварковых масс m_i, означает, что данная функция вычисляется в пределе $m_i \to 0$. Так $J_1^0 = J_1(M_0)$, а $\kappa_{A0}^{-1} = \lim_{m_i\to 0}(\kappa_A)_{ii}^{-1}$.

Для констант (14), в свою очередь, получаем

$$f_i = F\left[1 + \frac{m_i}{2M_0}(a - \delta_M)\right], \quad F = \sqrt{\frac{\kappa_{A0}}{4G_V}}, \tag{26}$$

где

$$\delta_M = a\left\{1 - 2(1-\kappa_{A0})\left[1 - \frac{\Lambda^4}{J_1^0(\Lambda^2 + M_0^2)^2}\right]\right\}. \tag{27}$$

Элементы массовой матрицы m_{ab}^2, с учетом всех рассмотренных выше вкладов, могут быть представлены в виде суммы $m_{ab}^2 \to \mathcal{M}_{ab}^2 = M_{ab}^2 + \Delta M_{ab}^2$, где первое слагаемое есть лидирующий вклад, а второе – первая поправка к нему. Основной вклад имеет порядок $\mathcal{O}(1/N_c)$ и описывается формулами

$$\begin{gathered}
M_{00}^2 = \frac{2}{3}B_0(m_u + m_d + m_s)(1 - 2\Delta_N) + \lambda_\eta^2, \\
M_{88}^2 = \frac{1}{3}B_0(m_u + m_d + 4m_s), \\
M_{08}^2 = \frac{\sqrt{2}}{3}B_0(m_u + m_d - 2m_s)(1 - \Delta_N), \\
M_{03}^2 = \sqrt{\frac{2}{3}}B_0(m_u - m_d)(1 - \Delta_N), \\
M_{38}^2 = \frac{1}{\sqrt{3}}B_0(m_u - m_d), \\
M_{33}^2 = B_0(m_u + m_d),
\end{gathered} \tag{28}$$

где мы ввели следующие обозначения:

$$\Delta_N = 2\sqrt{6}\,\frac{\lambda_Z}{F^2}, \quad \lambda_\eta^2 = \frac{\lambda_V}{F^2}, \tag{29}$$

$$B_0 = -\frac{\langle\bar{q}q\rangle_0}{F^2} = \frac{2G_V M_0}{G_S \kappa_{A0}} = \frac{M_0}{2G_S F^2}. \tag{30}$$

Этот результат совпадает с известными формулами, установленными Лойтвиллером [1], с той лишь разницей, что в рассматриваемом здесь случае все параметры, кроме Δ_N и λ_η^2, связаны с основными константами четырехкварковой динамики.

Смешивание $\phi_3^{\rm R}$ с $\phi_0^{\rm R}$ и $\phi_8^{\rm R}$ происходит за счет нарушения изоспиновой симметрии. В первом порядке по разности масс $m_d - m_u$ оно устраняется поворотом на малые углы ϵ' и ϵ соответственно. Смешивание компонент $\phi_0^{\rm R}$ и $\phi_8^{\rm R}$ – результат нарушения $SU(3)_f$ симметрии. Для его устранения необходимо осуществить поворот на угол θ. С точностью до первого порядка по нарушению изотопической симметрии преобразование нейтральных компонент к физическим состояниям π^0, η и η' имеет вид

$$\begin{gathered}
\phi_3^{\rm R} = \pi^0 - \epsilon\eta - \epsilon'\eta', \\
\phi_8^{\rm R} = (\epsilon\cos\theta + \epsilon'\sin\theta)\pi^0 + \cos\theta\eta + \sin\theta\eta', \\
\phi_0^{\rm R} = (\epsilon'\cos\theta - \epsilon\sin\theta)\pi^0 - \sin\theta\eta + \cos\theta\eta'.
\end{gathered} \tag{31}$$

Данное ортогональное преобразование диагонализует массовую матрицу M_{ab}^2, если углы смешивания удовлетворяют требованиям

$$\begin{gathered}
\tan 2\theta = \frac{2M_{08}^2}{M_{00}^2 - M_{88}^2}, \quad \epsilon = \frac{\sin\theta M_{03}^2 - \cos\theta M_{38}^2}{m_\eta^2 - m_{\pi^0}^2}, \\
\epsilon' = -\frac{\cos\theta M_{03}^2 + \sin\theta M_{38}^2}{m_{\eta'}^2 - m_{\pi^0}^2},
\end{gathered} \tag{32}$$

где

$$\begin{gathered}
m_{\eta,\eta'}^2 = \frac{1}{2}\left[M_{00}^2 + M_{88}^2 \mp \sqrt{(M_{00}^2 - M_{88}^2)^2 + 4M_{08}^4}\right], \\
m_{\pi^0}^2 = M_{33}^2.
\end{gathered} \tag{33}$$

Поскольку формулы (28) содержат только два неизвестных параметра Δ_N и λ_η^2, их можно определить, исходя из известных масс η и η' мезонов. Для этого сначала найдем массы кварков, воспользовавшись физическими массами π^+, K^+ и K^0 мезонов, которые в данном приближении определяются формулами алгебры токов: $\bar\mu_{\pi^+}^2 = B_0(m_u + m_d)$, $\bar\mu_{K^+}^2 = B_0(m_u + m_s)$, $\bar\mu_{K^0}^2 = B_0(m_d + m_s)$. Черта над символом массы указывает на то, что данное выражение получено без учета электромагнитных взаимодействий. Если же их учесть, то массы заряженных состояний вырастают:

$$\begin{gathered}
\mu_{\pi^+}^2 = \bar\mu_{\pi^+}^2 + \Delta_{el}^2, \quad \mu_{\pi^0}^2 = \bar\mu_{\pi^+}^2 = \bar\mu_{\pi^0}^2, \\
\mu_{K^+}^2 = \bar\mu_{K^+}^2 + \tilde\Delta_{el}^2, \quad \mu_{K^0}^2 = \bar\mu_{K^0}^2.
\end{gathered} \tag{34}$$

Известно, что разница масс заряженного и нейтрального пионов обусловлена в основном электромагнитным взаимодействием. Вклад сильных взаимодействий пропорционален $(m_d - m_u)^2$, и поэтому пренебрежимо мал. Если воспользоваться теоремой Дашена $\Delta_{el}^2 = \tilde\Delta_{el}^2$ [24], то из приведенных массовых формул находим $m_u = 2.6$ МэВ, $m_d = 4.7$ МэВ, и

$m_s = 95$ МэВ. Затем из системы двух уравнений на массы η и η' мезонов определяем параметры $\lambda_\eta^2 = 0.891$ ГэВ^2 и $\Delta_N = 0.48$. Углы смешивания оказываются равными $\epsilon = 0.014$, $\epsilon' = 0.0037$, $\theta = -10.5°$.

Приведенные выше оценки показывают, что в лидирующем приближении правило Цвейга сильно нарушено, что также отмечалось в [1, 25]. Только такой ценой можно добиться удовлетворительного описания спектра η-η' мезонов. В отсутствии лагранжиана (20) масса η мезона оказывается значительно ниже своего феноменологического значения, а угол $\theta = -18.3°$. Взаимодействие, нарушающее правило Цвейга, успешно решает спектральную задачу, но ведет к уменьшению абсолютной величины угла θ. Заметим, что этот результат близок к величине $\theta = -12.3°$ [26], и в точности совпадает с результатом работы [27], полученным однако уже с учетом первой поправки в $1/N_c$ киральной теории возмущений.

Сделаем следующий шаг и вычислим первую поправку ΔM_{ab} к основному результату. Вклад в нее дают как формулы (18), так и формулы (22). В итоге получаем

$$\Delta M_{00}^2 = \frac{2B_0}{3M_0}\left\{(m_u^2+m_d^2+m_s^2)\left[(a-3\delta_M)\Delta_N+\delta_M\right] + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{3}(m_u+m_d+m_s)^2(a-\delta_M)\right\},$$
$$\Delta M_{88}^2 = \frac{B_0}{3M_0}\left[(m_u^2+m_d^2+4m_s^2)\delta_M + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{3}(2m_s-m_u-m_d)^2\Delta_N\right],$$
$$\Delta M_{08}^2 = \frac{\sqrt{2}B_0}{3M_0}\left\{(2m_s^2-m_u^2-m_d^2)\left[\frac{3\delta_M-a}{2}\Delta_N-\delta_M\right] + \right.$$
$$\left. + \frac{\Delta_N}{3}(2m_s-m_u-m_d)(m_u+m_d+m_s)(\delta_M-a)\right\},$$
$$\Delta M_{03}^2 = \sqrt{\frac{2}{3}}\frac{B_0}{M_0}\left\{(m_d^2-m_u^2)\left[\frac{3\delta_M-a}{2}\Delta_N-\delta_M\right] + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{3}\Delta_N(m_d-m_u)(m_u+m_d+m_s)(\delta_M-a)\right\},$$
$$\Delta M_{38}^2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{B_0}{M_0}(m_d-m_u)\left[(2m_s-m_u-m_d)\frac{a-\delta_M}{3}\Delta_N - \right.$$
$$\left. -(m_d+m_u)\delta_M\right],$$
$$\Delta M_{33}^2 = \frac{B_0}{M_0}(m_u^2+m_d^2)\delta_M. \qquad (35)$$

Поправки, индуцированные формулой (18), с точностью до общего множителя совпадают с результатом $1/N_c$ киральной теории возмущений [27]. Соответствие между множителями имеет вид

$$\frac{\delta_M}{M_0} \to 16\,\frac{B_0}{F_0^2}(2L_8 - L_5). \qquad (36)$$

Поправки $\sim \Delta_N$ в [27] не рассматривались.

При получении (35) мы, как и ранее, пренебрегли членами второго порядка по нарушению изотопической симметрии. Напомним, что в этом приближении массовая матрица $\mathcal{M}_{ab}^2$ по-прежнему диагонализуется ортогональным преобразованием (31).

Чтобы получить численные значения, во-первых, необходимо определить величины масс легких кварков. Для этого будем использовать массовые формулы $\pi^\pm$, $K^\pm$ и K^0 мезонов, в которых также учтена первая поправка к результату алгебры токов, а именно

$$\bar{m}_{\pi^+}^2 = \bar{\mu}_{\pi^+}^2\left(1+\frac{m_u+m_d}{2M_0}\,\delta_M\right), \qquad (37)$$
$$\bar{m}_{K^+}^2 = \bar{\mu}_{K^+}^2\left(1+\frac{m_u+m_s}{2M_0}\,\delta_M\right), \qquad (38)$$
$$\bar{m}_{K^0}^2 = \bar{\mu}_{K^0}^2\left(1+\frac{m_d+m_s}{2M_0}\,\delta_M\right). \qquad (39)$$

Во-вторых, необходимо также учесть, что теорема Дашена справедлива только в лидирующем приближении кирального разложения. При выходе за его рамки следует принять во внимание возможное отклонение от нее, т.е., считать, что $\tilde{\Delta}_{el}^2 \neq \Delta_{el}^2 = m_{\pi^+}^2 - m_{\pi^0}^2$. В результате массовые формулы (37)–(39) приобретают дополнительную зависимость от параметра $\tilde{\Delta}_{el}$, область изменения которого можно зафиксировать из наблюдаемой ширины распада $\eta \to \pi^+\pi^-\pi^0$ [1]. Это позволяет установить следующий интервал для величины $\tilde{\Delta}_{el} = (44.8 \pm 4.5)$ МэВ, и как следствие зафиксировать кварковые массы: $m_u = (2.65 \pm 0.07)$ МэВ, $m_d = (4.63 \pm 0.07)$ МэВ, $m_s = (85.94 \pm 0.07)$ МэВ. Теперь, как и раньше, исходя из феноменологических значений η и η' масс, определим параметры Δ_N и λ_η^2. В результате находим, что $\theta = -20.4°$,

$$\epsilon = 0.013 \pm 0.001, \quad \epsilon' = 0.0039 \pm 0.0003,$$
$$\Delta_N = 0.38, \quad \lambda_\eta^2 = (0.730 \pm 0.001)\,\text{ГэВ}^2. \qquad (40)$$

Интересно отметить, что учет NLO поправок практически не отразился на значениях углов ϵ и ϵ', которые согласуются с феноменологическими оценками $\epsilon = 0.014$, $\epsilon' = 0.0037$ [28], а вот абсолютная величина угла θ заметно выросла и находится в согласии с результатом киральной теории возмущений $\theta = -20° \pm 4°$ [29], но несколько превышает результат аномальных правил сумм $\theta = -14.2° \pm 0.7°$ [30]. Параметр Δ_N, характеризующий степень нарушения правила Цвейга, уменьшился. Величина константы

λ_η^2 тоже уменьшилась и практически совпала с оценкой $\lambda_\eta^2 = 0.726\,$ГэВ^2, сделанной в работе [20].

Из формул (14) получаем величины констант $f_u = 92.7$ МэВ, $f_d = 93.7$ МэВ и $f_s = 132.8$ МэВ. Зная, что для константы слабого распада пиона модель дает значение $f_\pi = 93.2\,$МэВ, находим, что отношение $f_s/f_\pi = 1.42$. Эта величина находится в согласии с оценкой аномальных правил сумм $f_s/f_\pi = 1.65 \pm 0.25$ [30] и близка к феноменологической оценке $f_s/f_\pi = 1.34 \pm 0.06$, приведенной в работе [31].

4. Выводы. В работе вычислены основные характеристики π^0-η-η' системы в модели с четырехкварковыми взаимодействиями. При бозонизации кварковых вершин использован новый метод для низкоэнергетического разложения кваркового детерминанта с виртуальными частицами неравной массы. Предположив, что массы легких кварков обращаются в нуль в пределе $N_c \to \infty$, мы получили массовые формулы и константы распада данных псевдоскалярных состояний в виде двух первых членов их разложения в ряд по $1/N_c$. В результате удалось описать спектр масс η-η' мезонов и исследовать вопрос о степени нарушения правила Цвейга. Полученная здесь оценка $\Delta_N = 0.38$ указывает на умеренное нарушение правила ОЦИ. Подчеркнем, что рассмотренные здесь $\mathcal{O}(1/N_c^2)$ поправки к взаимодействию, нарушающему правило Цвейга, ранее в литературе не изучались. Например, в работе [32] эффективный лагранжиан, хотя и содержит взаимодействия, нарушающие правило Цвейга, но только в лидирующем порядке по $1/N_c$.

---

1. H. Leutwyler, Phys. Lett. B **374**, 163 (1996).
2. H. Leutwyler, Phys. Lett. B **374**, 181 (1996).
3. R. Kaiser and H. Leutwyler, Eur. Phys. J. C **17**, 623 (2000).
4. P. Herrera-Siklódy, J. I. Latorre, P. Pascual, and J. Taron, Nucl. Phys. B **497**, 345 (1997).
5. P. Bickert and S. Scherer, Phys. Rev. D **102**, 074019 (2020).
6. A. A. Osipov, JETP Lett. **115**(6), 339 (2022).
7. Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, Phys. Rev. **122**, 345 (1961).
8. Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, Phys. Rev. **124**, 246 (1961).
9. A. A. Osipov, JETP Lett. **113**(6), 413 (2021).
10. A. A. Osipov, Phys. Lett. B **817**, 136300 (2021).
11. A. A. Osipov, Phys. Rev. D **104**(10), 105019 (2021).
12. S. Khlebtsov, Y. Klopot, A. Oganesian, and O. Teryaev, Phys. Rev. D **104**, 016011 (2021).
13. M. K. Volkov, Ann. of Phys. **157**, 282 (1984).
14. A. Dhar, R. Shankar, and S. R. Wadia, Phys. Rev. D **31**, 3256 (1985).
15. M. K. Volkov, ЭЧАЯ **17**, 432 (1986).
16. D. Ebert and H. Reinhardt, Nucl. Phys. B **271**, 188 (1986).
17. J. Morais, B. Hiller, and A. A. Osipov, Phys. Lett. B **773**, 277 (2017).
18. G. P. H. Styan, Linear. Algebra and its Appl. **6**, 217 (1973).
19. E. Witten, Nucl. Phys. B **156**, 269 (1979).
20. G. Veneziano, Nucl. Phys. B **159**, 213 (1979).
21. E. Witten, Nucl. Phys. B **160**, 57 (1979).
22. P. Di Vecchia and G. Veneziano, Nucl. Phys. B **171**, 253 (1980).
23. C. Rosenzweig, J. Schechter, and G. Trahern, Phys. Rev. D **21**, 3388 (1980).
24. R. Dashen, Phys. Rev. **183**, 1245 (1969).
25. А. И. Вайнштейн, В. И. Захаров, В. А. Новиков, М. А. Шифман, Физика элементарных частиц и атомного ядра **13**(3), 542 (1982).
26. Th. Feldmann and P. Kroll, Phys. Rev. D **58**, 114006 (1986).
27. J. L. Goity, A. M. Bernstein, and B. R. Holstein, Phys. Rev. D **66**, 076014 (2002).
28. T. Feldman, Int. J. Mod. Phys. A **15**(02), 159 (2000).
29. J. Gasser and H. Leutwyler, Nucl. Phys. B **250**, 465 (1985).
30. Y. Klopot, A. Oganesian, and O. Teryaev, Phys. Rev. D **87**, 036013 (2013).
31. P. Kroll, Mod. Phys. Lett. A **20**, 2667 (2005).
32. A. A. Osipov, B. Hiller, and A. H. Blin, Phys. Rev. D **93**, 116005 (2016).